Aléatoire PC 4 :

Groupes 5 & 17 – Aurélien Alfonsi

Exercice 1.

Soit X et Y deux variables aléatoires réelles indépendantes et $S = X + Y$.

Lorsque X et Y suivent la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$, déterminer la loi conditionnelle de X sachant $S = s$. En déduire $\mathbb{E}(X|S)$.

Reprendre cette question lorsque X et Y suivent la loi uniforme sur $[0, 1]$.

Exercice 2.

Pour $n \geq 2$, soient $U_1, \dots, U_n$ des variables aléatoires uniformes sur $[0, 1]$ indépendantes et $(X, Y) = (\min_{1 \leq i \leq n} U_i, \max_{1 \leq i \leq n} U_i)$. Pour $0 \leq x \leq y \leq 1$, calculer $\mathbb{P}(x < X, Y \leq y)$. En déduire la loi conditionnelle de X sachant $Y = y$ puis $\mathbb{E}[X|Y]$.

Exercice 3.

Soit R une variable exponentielle de paramètre $1/2$ et Θ une variable uniforme sur $[0, 2\pi]$ indépendantes.

1. Quelle est la loi de $(X, Y) = (\sqrt{R} \cos(\Theta), \sqrt{R} \sin(\Theta))$? Comment simuler un couple de variables gaussiennes centrées réduites indépendantes à partir de deux variables uniformes sur $[0, 1]$ indépendantes U_1 et U_2 ?
2. Quelle est la loi de $a \frac{W}{Z}$ où $a > 0$ et Z et W sont deux gaussiennes centrées réduites indépendantes? Et celle de l'inverse d'une variable de Cauchy de paramètre a de densité $x \mapsto \frac{a}{\pi(x^2+a^2)}$?

Exercice 4. Soient $a, b, c, \theta > 0$. On note $\Gamma(a, \theta)$ la loi de densité $1_{\{x>0\}} \frac{\theta^a}{\Gamma(a)} x^{a-1} e^{-\theta x}$ où $\Gamma(a) = \int_0^{+\infty} x^{a-1} e^{-x} dx$. On considère trois variables aléatoires réelles $X \sim \Gamma(a, \theta)$, $Y \sim \Gamma(b, \theta)$ et $Z \sim \Gamma(c, \theta)$ indépendantes. On pose

$$S = X + Y + Z, \quad T = \frac{X}{X + Y + Z}, \quad U = \frac{Y}{X + Y + Z}.$$

Calculer la loi de (S, T, U) (on donnera la densité de ce vecteur aléatoire). Indiquer, de la façon la plus précise possible, quelles variables aléatoires sont indépendantes.

Exercice 5. : Simulation suivant la loi bêta

Soit $a, b > 0$ et (U, V) de la loi uniforme sur le domaine $D = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2, u > 0, v > 0, u^{\frac{1}{a}} + v^{\frac{1}{b}} < 1\}$ (i.e. (U, V) possède la densité $1_{\{(u,v) \in D\}}/|D|$ où $|D|$ est la surface de D)

1. Déterminer la loi de $(S, X) = \left(U^{\frac{1}{a}} + V^{\frac{1}{b}}, \frac{U^{\frac{1}{a}}}{U^{\frac{1}{a}} + V^{\frac{1}{b}}} \right)$.
2. Vérifier que X suit la loi bêta de paramètres a et b . Les variables aléatoires S et X sont-elles indépendantes? Que vaut $|D|$?

Exercice 6. : La méthode du rejet

1. Soit $(W_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, et de même loi à densité $w(x)$. On considère un ensemble borélien $A \subset \mathbb{R}^d$ tel que $p = \mathbb{P}(X_1 \in A) > 0$. On pose $N = \inf\{n \in \mathbb{N}^*, W_n \in A\}$. Montrer que N suit la loi géométrique de paramètre p , W_N suit la loi de densité $\frac{1}{p} w(x) \mathbf{1}_{\{x \in A\}}$, et que N et W_N sont indépendantes.

2. Application : on considère deux densités de probabilité $p, q : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ telles qu'il existe $k > 0, \forall x \in \mathbb{R}^d, p(x) \leq kq(x)$. On suppose que l'on sait simuler une suite $(Y_n)_{n \geq 1}$ de variables aléatoires indépendantes suivant la loi de densité q , et on note $(U_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires uniformes sur $[0, 1]$ indépendantes qui est indépendante de $(Y_n)_{n \geq 1}$. On pose $N = \inf\{n \in \mathbb{N}^*, kq(Y_n)U_n \leq p(Y_n)\}$. Montrer que X_N suit la loi de densité p et calculer la probabilité de rejet.

Exercice 7. Soit $((X_i, Y_i))_{i \geq 1}$ une suite I.I.D. avec X_1 et Y_1 variables exponentielles de paramètre 1 indépendantes. On se donne également indépendamment de cette suite une variable ε t.q. $\mathbb{P}(\varepsilon = 1) = \mathbb{P}(\varepsilon = -1) = \frac{1}{2}$ et on pose

$$N = \inf\{i \geq 1 : 2Y_i \geq (1 - X_i)^2\} \text{ et } Z = \varepsilon X_N.$$

1. Quelle est la loi de N ? Donner $\mathbb{E}(N)$.
2. Quelle est la loi de X_N ? En déduire celle de Z .
3. En déduire une méthode pour simuler une variable distribuée suivant la loi normale centrée réduite.

Exercice 8. Borne de Letac pour la méthode du rejet

Soit p une densité de probabilité sur l'intervalle $[0, 1]$ suivant laquelle on souhaite simuler en utilisant un algorithme de rejet construit à l'aide d'une suite $((U_i, X_i))_{i \geq 1}$ de vecteurs aléatoires i.i.d. où les U_i sont uniformément réparties sur $[0, 1]$. Plus précisément, on suppose qu'il existe un ensemble d'acceptation $\mathcal{A}$ tel que $\mathbb{P}((U_1, X_1) \in \mathcal{A}) > 0$ et que la loi conditionnelle de U_1 sachant $(U_1, X_1) \in \mathcal{A}$ possède la densité p . On note $N = \min\{i \geq 1 : (U_i, X_i) \in \mathcal{A}\}$ et B un sous-ensemble borélien de $[0, 1]$.

1. Quelle est la loi de N ? Et celle de U_N ?
2. Montrer que pour $n \in \mathbb{N}^*, \mathbb{P}(U_n \in B, N \geq n) = \mathbb{P}(U_n \in B)\mathbb{P}(N \geq n)$.
3. En déduire que $\mathbb{P}(U_N \in B) \leq \mathbb{P}(U_1 \in B)\mathbb{E}(N)$.
4. Conclure que $\mathbb{E}(N) \geq \sup\{\rho \geq 0 : \int_0^1 1_{\{p(u) \geq \rho\}} du > 0\}$.