Aléatoire PC5

Ex 6 1) $\varepsilon < 1/2$ $\quad \mathbb{P}(|X_n|\leq\varepsilon)=\mathbb{P}(X_n=0)=1-\frac{1}{n}\longrightarrow 1$

2) $\mathbb{P}\left(\bigcap_{n\geq m}^{\ell}\{X_n=0\}\right)=\prod_{n=m}^{\ell}\left(1-\frac{1}{n}\right)$

$= e^{\sum_{n=m}^{\ell}\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)}$

$\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)<-\frac{1}{n}$

$0\leq\mathbb{P}\left(\bigcap_{m}^{\ell}\{\ \}\right)\leq e^{-\sum_{m}^{\ell}\frac{1}{n}}$

D'où $\lim_{\ell\to\infty}\mathbb{P}(\ )\leq 0$.

$\mathbb{P}\left(\bigcap_{n\geq m}\{X_n=0\}\right)=\mathbb{P}\left(\bigcap_{\ell>n}\underbrace{\left(\bigcap_{\ell\geq n\geq m}\{X_n=0\}\right)}_{\text{suite} \searrow \text{ d'ensemble}}\right)=\lim_{\ell\to\infty}\mathbb{P}\left(\bigcap_{m}^{\ell}\{X_n=0\}\right)$

Donc $\mathbb{P}\left(\bigcup_{m\geq 1}\bigcap_{n\geq m}\{X_n=0\}\right)\leq\sum_{m\geq 1}\mathbb{P}\left(\bigcap_{n\geq m}\{X_n=0\}\right)=0$

ie $\mathbb{P}(\lim X_n=0)=0$

Si $\forall n,\ x_n\in\{0,1\}$, $\lim_n x_n=0 \iff \exists n\geq 1,\ \forall n\geq n,\ x_n=0$

Ex 7: 1) $X_k=k\bar{X}_k-(k-1)\bar{X}_{k-1}$ donc $\frac{X_k}{k}=\bar{X}_k-\frac{k-1}{k}\bar{X}_{k-1}$

si les X_j indep LFGN $\left.\begin{array}{l}\bar{X}_k\xrightarrow{p.s}\mathbb{E}(X)\\ \bar{X}_{k-1}\xrightarrow{p.s}\mathbb{E}(X_1)\end{array}\right\}\ \frac{X_k}{k}\xrightarrow{p.s}0$.

2) $X:\Omega\to\mathbb{N}$

$\mathbb{E}(X)=\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{\infty}\mathbb{1}_{\{X\geq i\}}\right)=\sum_{i=1}^{\infty}\mathbb{P}(X\geq i)$

$m\in\mathbb{N}^*$ $\quad\mathbb{P}\left(\frac{X_k}{k}\geq\frac{1}{m}\right)=\mathbb{P}\left(X\geq\frac{k}{m}\right)=\mathbb{P}\left(X\geq\left\lceil\frac{k}{m}\right\rceil\right)$

Donc $\sum_{k=1}^{\infty}\mathbb{P}\left(\frac{X_k}{k}\geq\frac{1}{m}\right)=\sum_{k=1}^{\infty}\underbrace{\mathbb{P}\left(X\geq\left\lceil\frac{k}{m}\right\rceil\right)}_{=\mathbb{P}(X\geq\ell)\text{ pour } k\in\{m(\ell-1)+1,\dots,m\ell\}}=m\sum_{k=1}^{\infty}\mathbb{P}(X\geq 1)=m\mathbb{E}(X)<\infty$

Ainsi $\mathbb{E}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\mathbb{1}_{\{\frac{X_k}{k}\geq\frac{1}{m}\}}\right)<\infty$

Donc p.s $\sum_{k=1}^{\infty}\mathbb{1}_{\{\frac{X_k}{k}\geq\frac{1}{m}\}}<\infty$. ie $\mathbb{P}\left(\exists N,\forall n\geq n,\ \frac{X_k}{k}<\frac{1}{m}\right)=1$.

Donc $\frac{X_k}{k}\xrightarrow{p.s}0$

3) On pose $M_n = \frac{1}{n}\max(X_1, \dots, X_n)$

$$(n+1) M_{n+1} = \max(nM_n, X_{n+1}) \quad \text{ie} \quad M_{n+1} = \max\left(\frac{n}{n+1} M_n, \frac{X_{n+1}}{n+1}\right)$$

<u>Lemme</u> Soit $u_n \to 0$. et $\begin{cases} m_{n+1} = \max\left(\frac{n}{n+1} m_n, u_{n+1}\right) \\ m_0 = 0 \end{cases}$ Alors $m_n \to 0$.

<u>Preuve</u> Soit $\varepsilon > 0$. $\exists N, \forall n \geq N, u_n < \varepsilon$

Donc pour $n \geq N$ $m_{n+1} \leq \max\left(\frac{n}{n+1} m_n, \varepsilon\right)$.

si $m_N \leq \varepsilon$ alors $\forall n \geq N \quad 0 \leq m_n \leq \varepsilon$

Sinon, comme $\prod_{\ell=N}^{N+p} \frac{\ell}{\ell+1} \xrightarrow[p\to\infty]{} 0$ $\quad \log(-) = \sum_N^{N+p} \underbrace{\log\left(1 - \frac{1}{\ell+1}\right)}_{\sim -\frac{1}{\ell+1}} \to -\infty$.

$\exists \tilde{N} \geq N, \forall n \geq \tilde{N}, 0 \leq m_n \leq \varepsilon$.

4)

$$\underset{\substack{\downarrow n\to\infty \\ 0}}{\frac{X_1}{n}} \leq \frac{1}{n}\max(X_1, \dots, X_n) \leq \frac{1}{n}\max\left(\lceil \max(X_1, 0)\rceil, \dots, \lceil\max(X_n, 0)\rceil\right)$$

$\lceil\max(X, 0)\rceil \leq \max(X, 0) + 1$ est intégrable et donc le terme de droite $\to 0$ p.s.

<u>Ex 8</u> 1) $\sum_{j=1}^{k} 2j = 2\frac{k(k+1)}{2} \geq k^2$

$$X_1^2 \mathbb{1}_{\{X_1 \leq n\}} \leq \sum_{k=1}^{n} k^2 \mathbb{1}_{\{k-1 < |X_1| \leq k\}}$$

$$\leq \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{k} 2j \mathbb{1}_{\{k-1 < |X_1| \leq k\}}$$

$$\mathbb{E}(\ ) \leq \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{k} 2j \underbrace{\left[\mathbb{P}(|X_1| \leq k) - \mathbb{P}(|X_1| \leq k-1)\right]}_{= \mathbb{P}(|X_1| > k-1) - \mathbb{P}(|X_1| > k)}$$

$$\overset{\shortparallel}{\sum_{j=1}^{n}} \sum_{k=j}^{n} 2j \left[\ \text{———}\ \right]$$

$$\overset{\shortparallel}{\sum_{j=1}^{n}} 2j \left(\mathbb{P}(|X_1| > j-1) - \mathbb{P}(|X_1| > n)\right)$$

$$\leq \sum_{j=1}^{n} 2j\, \mathbb{P}(|X_1| > j-1)$$

2) Comme les X_j sont indep et id

$$\mathrm{Var}\left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_j \mathbb{1}_{|X_j|\le n}\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{j=1}^{n} \underbrace{\mathrm{Var}\left(X_j \mathbb{1}_{|X_j|\le n}\right)}$$

$$= \frac{1}{n}\mathrm{Var}\left(X_1 \mathbb{1}_{|X_1|\le n}\right) \cancel{E(X_j^2 \mathbb{1}_{|X_j|\le n})}$$

$$\le \frac{1}{n}E\left(X_1^2 \mathbb{1}_{|X_1|\le n}\right) \le \frac{2}{n}\sum_{j=1}^{n} j\,P(|X_1|>j-1)$$

puis lemme de Cesaro si $\varepsilon_n \to 0$ alors $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i \to 0$.

car $\exists N, \forall n \ge N, |\varepsilon_i| \le \eta$.

et $\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i\right| \le \underbrace{\frac{1}{n}\left(\left|\sum_{1}^{N}\varepsilon_i\right| + (n-N)\eta\right)}_{<2\eta \text{ pour } n \text{ assez grand}}$

3) $\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \mathbb{1}_{|X_i|\le n} + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \mathbb{1}_{|X_i|>n}$$

$$|\bar{X}_n - x| \le \left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \mathbb{1}_{|X_i|\le n} - E[X_1 \mathbb{1}_{|X_1|\le n}]\right| + \underbrace{\left|E[X_1 \mathbb{1}_{|X_1|\le n}] - x\right|}_{\le \frac{\varepsilon}{2}} + \left|\frac{1}{n}\sum_{1}^{n} X_i \mathbb{1}_{|X_i|>n}\right|$$

$$\{|\bar{X}_n - x| \ge \varepsilon\} \subset \left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{1}^{n} X_i \mathbb{1}_{|X_i|\le n} - E(X_1 \mathbb{1}_{|X_1|\le n})\right| \ge \frac{\varepsilon}{2}\right\} \cup \{\exists i \in \{1,\dots,n\}, |X_i| > n\}$$

D'où $P(\quad) \le \underbrace{P\left(\left|\quad\right| \ge \frac{\varepsilon}{2}\right)}_{\text{bienaymé-Chebychev}} + \underbrace{P\left(\bigcup_{i=1}^{n} |X_i| > n\right)}_{\le n P(|X_1|>n) \to 0}$

$$\le \left(\frac{2}{\varepsilon}\right)^2 \underbrace{\mathrm{Var}\left(\frac{1}{n}\sum_{1}^{n} X_j \mathbb{1}_{|X_j|>n}\right)}_{\to 0}.$$

Donc $\bar{X}_n \xrightarrow{P} x$.

4) $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x\ln x}\,dx = +\infty$ on prend une loi de densité $c\,\frac{1}{x^2\ln|x|}\mathbb{1}_{|x|>2}$.

non intégrable et $\mathbb{P}(|X|>n) = 2c\int_{n\vee 2}^{\infty} \frac{1}{u^2\ln(u)}\,du$ $\quad n\geq 2$.

$$\leq \frac{2c}{\ln(n)} \times \frac{1}{n}$$

Ex9 : f C^0

1) $|f(S_n^x/n) - f(x)| \leq \sup_{\substack{y,z\in[0,1]\\ |y-z|\leq\alpha}} |f(y)-f(z)|\, \mathbb{1}_{\{|S_n^x/n - x|\leq\alpha\}}$

$$+ \mathbb{1}_{\{|\quad|>\alpha\}} \times 2\|f\|_\infty .$$

2) $\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n^x}{n} - x\right| \geq \alpha\right) \leq \frac{1}{\alpha^2} \mathrm{Var}\left(\frac{S_n^x}{n}\right) = \frac{1}{\alpha^2 n} x(1-x) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

Donc, en utilisant le thm de Heine pour le second terme,

$$\mathbb{E}\left(\left|f\left(\frac{S_n^x}{n}\right) - f(x)\right|\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

$x(1-x)\leq\frac{1}{4}$ et $\mathbb{E}(|\quad|) \leq \frac{\|f\|_\infty}{2\alpha^2 n} + \sup_{\substack{y,z\in[0,1]\\ |y-z|\leq\alpha}} |f(y)-f(z)|$.

3) $\mathbb{E}\left(f\left(\frac{S_n^x}{n}\right)\right) = \sum_{i=0}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right) x^i (1-x)^{n-i}$ est un polynôme en x.

$$\left|\mathbb{E}\left(f\left(\frac{S_n^x}{n}\right)\right) - f(x)\right| \leq \mathbb{E}\left(\left|f(S_n^x/n) - f(x)\right|\right)$$

$$\leq \frac{\|f\|_\infty}{2\alpha^2 n} + \sup_{\substack{y,z\in[0,1]\\ |y-z|\leq\alpha}} |f(y)-f(z)|$$

Soit $\varepsilon>0$ $\quad\alpha$ t.q le module de continuité $<\varepsilon$

et N t.q $\frac{\|f\|_\infty}{2\alpha^2 N} < \varepsilon$ $\quad \forall n\geq N, \forall x\in[0,1]$

$$\left|\mathbb{E}\left(f\left(\frac{S_n^x}{n}\right)\right) - f(x)\right| \leq 2\varepsilon .$$