Aléatoire PC 6 :

Groupes 5 & 17 – Aurélien Alfonsi

Exercice 1. On considère (X_n) une suite de variable aléatoires à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ et (X'_n) une suite de variable aléatoires à valeurs dans $\mathbb{R}^{d'}$.

1. On suppose que $X_n \overset{p.s.}{\to} X$, $X'_n \overset{p.s.}{\to} X'$. Montrer que $(X_n, X'_n) \overset{p.s.}{\to} (X, X')$.
2. On suppose que $X_n \overset{L^1}{\to} X$, $X'_n \overset{L^1}{\to} X'$. Montrer que $(X_n, X'_n) \overset{L^1}{\to} (X, X')$.
3. On suppose que $X_n \overset{\mathbb{P}}{\to} X$, $X'_n \overset{\mathbb{P}}{\to} X'$. Montrer que $(X_n, X'_n) \overset{\mathbb{P}}{\to} (X, X')$.
4. Montrer qu'il n'y a pas de résultat général analogue pour la convergence en loi. (On pourra prendre $G \sim \mathcal{N}(0,1)$, $X_n = G$ et $X'_n = (-1)^n G$). Montrer qu'en revanche, si pour tout n, X_n est indépendant de X'_n, $X_n \overset{\mathcal{L}}{\to} X$ et $X'_n \overset{\mathcal{L}}{\to} X'$, alors $(X_n, X'_n) \overset{\mathcal{L}}{\to} (X, X')$, avec X indépendante de X'.

Exercice 2. On considère (X_n) une suite de variable aléatoires à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ et $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^q$.

1. On suppose que $X_n \overset{p.s.}{\to} X$ et f continue. Montrer que $f(X_n) \overset{p.s.}{\to} f(X)$.
2. On suppose que $X_n \overset{\mathcal{L}}{\to} X$ et f continue. Montrer que $f(X_n) \overset{\mathcal{L}}{\to} f(X)$.
3. On suppose que $X_n \overset{L^1}{\to} X$ et f globalement lipschitzienne, i.e. $\exists K > 0, \forall x, y \in \mathbb{R}^d, |f(x) - f(y)| \le K|x - y|$. Montrer que $f(X_n) \overset{L^1}{\to} f(X)$.
4. On suppose que $X_n \overset{\mathbb{P}}{\to} X$ et f globalement lipschitzienne. Montrer que $f(X_n) \overset{\mathbb{P}}{\to} f(X)$. On admettra que cela reste vrai lorsque f est continue bornée.

Les exercices 1 et 2 donnent en particulier :
– si $X_n \overset{p.s.}{\to} X$, $X'_n \overset{p.s.}{\to} X'$ et $f : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{d'} \to \mathbb{R}^q$ est continue, $f(X_n, X'_n) \overset{p.s.}{\to} f(X, X')$,
– si $(X_n, X'_n) \overset{\mathcal{L}}{\to} (X, X')$ et $f : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{d'} \to \mathbb{R}^q$ est continue, $f(X_n, X'_n) \overset{\mathcal{L}}{\to} f(X, X')$.
Cela permet de traiter notamment la somme ou le produit de limites.

Exercice 3.
Soit $(X_n)_{n\ge1}$ une suite de variables indépendantes t.q. $\mathbb{P}(X_n = 1) = \mathbb{P}(X_n = -1) = \frac{1}{2}$. Calculer la fonction caractéristique de $Y_n = \sum_{k=1}^n \frac{X_k}{2^k}$. En remarquant que

$$\sin(u/2^n) \prod_{k=1}^n \cos(u/2^k) = \sin(u)/2^n,$$

en déduire que la suite Y_n converge en loi vers Y de loi uniforme sur $[-1, 1]$.

Exercice 4.
Soit Y une variable aléatoire réelle de loi de Laplace de paramètre $\lambda > 0$ (densité : $\frac{\lambda}{2} e^{-\lambda|y|}$).

1. Calculer la fonction caractéristique Φ_Y.
2. En déduire la fonction caractéristique d'une variable aléatoire qui suit la loi de Cauchy de paramètre λ (densité $u \mapsto \frac{\lambda}{\pi(\lambda^2+u^2)}$).
3. Soit $(X_n)_{n\ge1}$ une suite de variables i.i.d. suivant la loi de Cauchy. Quelle est la loi de la moyenne empirique $\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k$? Commenter.

Exercice 5. : élections
Lors du second tour de l'élection présidentielle, un sondage est effectué à la sortie des urnes sur un échantillon de 1 000 personnes. Le candidat A recueille a% (a proche de 50) des suffrages des personnes interrogées. A l'aide du théorème de la limite centrale, donner un intervalle de confiance à 95% pour le score S_A réalisé par ce candidat. Pour un seuil de 97,5% de confiance, à partir de quelle valeur de a, peut-on se baser sur le sondage pour déterminer le résultat de l'élection ?

Exercice 6.
Soit $(X_j)_{j\geq 1}$ une suite de variables aléatoires I.I.D. suivant la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$ ($\forall k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(X_1 = k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$).

1. Calculer ϕ_{X_1} et en déduire la loi de $X_1 + \ldots + X_n$.

On suppose désormais que $\lambda = 1$.

2. Quelle est la limite de la suite $u_n = e^{-n}\sum_{k=0}^{n}\frac{n^k}{k!}$ lorsque $n \to +\infty$ (*Indication :* on pourra utiliser le théorème de la limite centrale) ?
3. Pour $x \in \mathbb{R}$, on note $x^+ = \max(x, 0)$ et $x^- = \max(-x, 0)$.
   (a) Calculer $\mathbb{E}\left[\sqrt{n}(\bar{X}_n - 1)^-\right]$ et $\mathbb{E}[G^-]$ où $G \sim \mathcal{N}_1(0, 1)$.
   (b) Pour $M > 0$, justifier que $\lim_{n\to\infty}\mathbb{E}\left[\min\left(\sqrt{n}(\bar{X}_n - 1)^-, M\right)\right] = \mathbb{E}\left[\min\left(G^-, M\right)\right]$.
   (c) Montrer que pour X une variable aléatoire réelle de carré intégrable et $M > 0$, $\mathbb{E}\left[(X^- - M)^+\right] \leq \frac{\mathbb{E}[X^2]}{M}$. En remarquant que $x = \min(x, M) + (x - M)^+$, en déduire que $\lim_{n\to\infty}\mathbb{E}\left[\sqrt{n}(\bar{X}_n - 1)^-\right] = \mathbb{E}[G^-]$ et retrouver la formule de Stirling $n! \sim \sqrt{2\pi n}(n/e)^n$ pour $n \to \infty$.

Exercice 7.
Soit $(X_k)_{k\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes et indentiquement distribuées suivant une densité $p(x)$ paire, bornée, continue en 0 et telle que $p(0) > 0$

1. Quelle est la loi de $Y_k = \frac{1}{X_k}$?
2. Montrer que la fonction caractéristique Φ commune aux Y_k vérifie
$$\Phi(u) - 1 = 2|u|\int_0^{+\infty}\frac{\cos(z) - 1}{z^2}p\left(|u|/z\right)dz.$$
On rappelle que $\int_0^{+\infty}\frac{1-\cos(z)}{z^2}\,dz = \frac{\pi}{2}$. Vérifier que $\Phi(u) = 1 - \pi p(0)|u| + o(u)$ pour $u \to 0$.
3. En déduire que $\bar{Y}_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} Y_k$ converge en loi vers Y qui suit la loi de Cauchy de paramètre $\pi p(0)$.
4. Conclure que la moyenne harmonique $n/\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{X_k}$ des X_k converge en loi vers une limite que l'on précisera.