Aléatoire PC 7 :

Groupes 5 & 17 – Aurélien Alfonsi

- Exercice 1.**
1. Soit X et Y des variables gaussiennes réelles indépendantes. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que les variables $X + Y$ et $X - Y$ soient indépendantes.
 2. Soient $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ un vecteur gaussien d'espérance m et de matrice de covariance Γ , et $u, v \in \mathbb{R}^d$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $u \cdot X$ et $v \cdot X$ soient indépendantes.

Exercice 2. Soit X une variable gaussienne centrée réduite et ε une variable vérifiant $\mathbb{P}(\varepsilon = 1) = \mathbb{P}(\varepsilon = -1) = 1/2$ indépendantes.

1. Quelle est la loi de $Y = \varepsilon X$?
2. Donner la matrice de covariance et la fonction caractéristique du vecteur (X, Y) . Ce vecteur est-il gaussien ?

Exercice 3. Soient $(X_k)_{k \geq 1}$ une suite de vecteurs aléatoires à valeurs $\mathbb{R}^d$ i.i.d. de carré intégrable. On note respectivement $\mu \in \mathbb{R}^d$ et $\Gamma \in \mathbb{R}^{d \times d}$ leurs vecteur espérance et matrice de covariance communs. Pour $u \in \mathbb{R}^d$, on pose $Y_k = u \cdot X_k$. On note $\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k$ et $\bar{Y}_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n Y_k$. Calculer $\mathbb{E}(Y_k)$ et $\text{Var}(Y_k)$. Quel est le comportement asymptotique de $\sqrt{n}(\bar{Y}_n - u \cdot \mu)$? En déduire la limite de $\Phi_{\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu)}(u)$ lorsque $n \rightarrow \infty$. Conclure que $\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu)$ converge en loi vers une limite à préciser.

Exercice 4. Soit $(X_j)_{j \geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles I.I.D. et de carré intégrable t.q. $\text{Var}(X_1) > 0$ et $\exists c > 0$, $\frac{X_1 + X_2}{c} \stackrel{\mathcal{L}}{=} X_1$.

1. Déterminer c à l'aide d'un calcul de variance puis en déduire l'espérance commune des X_i ?
2. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, que peut-on dire de la loi $\frac{X_1 + \dots + X_{2^k}}{2^{k/2}}$?
3. En déduire que les X_j sont des variables gaussiennes.

Exercice 5. Soit $(G_j)_{j \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. suivant la loi normale centrée réduite.

1. Déterminer la loi de G_1^2 . En déduire sans calcul celle de $G_1^2 + \dots + G_n^2$ appelée loi du χ^2 à n degrés de liberté.
2. Montrer que $T_n = \frac{G_0}{\sqrt{\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n G_j^2}}$ possède la densité $\frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\sqrt{n\pi} \Gamma(\frac{n}{2})} \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}$ appelée densité de Student de paramètre n . Pour quelles valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$, la variable aléatoire $|T_n|^\alpha$ est-elle intégrable ?
3. Quel est le comportement asymptotique de T_n lorsque $n \rightarrow \infty$?

Exercice 6.

Soient $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires I.I.D. suivant la loi $\mathcal{N}_1(\mu, \sigma^2)$ avec $\mu \in \mathbb{R}$ et $\sigma > 0$. On pose $\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n X_j$ et $S_n = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n (X_j - \bar{X}_n)^2}$.

1. Quelle est la loi de $\bar{X}_n$? Quelle est celle de $Y = t\left(\frac{X_1 - \mu}{\sigma}, \dots, \frac{X_n - \mu}{\sigma}\right)$?
2. Soit $e_1, \dots, e_n$ une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ telle que $e_1 = t\left(\frac{1}{\sqrt{n}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ et $O = t(e_1, \dots, e_n)$. Quelle est la loi de $Z = OY$?

3. Vérifier que $\frac{n-1}{\sigma^2} S_n^2 = \sum_{j=2}^n Z_j^2$. En déduire que cette variable est indépendante de $\bar{X}_n$ et suit la loi du χ^2 à $n-1$ degrés de liberté. Quelle est la loi de $\sqrt{n} \frac{\bar{X}_n - \mu}{S_n}$?

Exercice 7. Soit $(X_j)_{j \geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles I.I.D. et de carré intégrable.

1. Montrer que $\left(\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mathbb{E}(X_1)), \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=n+1}^{2n} (X_j - \mathbb{E}(X_1)) \right)$ converge en loi vers (Y_1, Y_2) avec Y_1 et Y_2 I.I.D. de loi à préciser.
2. En déduire que $\sqrt{2n}(\bar{X}_{2n} - \mathbb{E}(X_1)) - \sqrt{n}(\bar{X}_n - \mathbb{E}(X_1))$ converge en loi vers $\sqrt{2} - \sqrt{2} Y_1$.
3. Montrer que lorsque la suite $(Z_n)_{n \geq 1}$ converge en probabilité vers une limite Z , $Z_{2n} - Z_n$ converge en probabilité vers 0.
4. Conclure que, lorsque $\text{Var}(X_1) > 0$, $\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mathbb{E}(X_1))$ ne converge pas en probabilité.

Exercice 8. Soit $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires réelles I.I.D. et de carré intégrable telles que la moyenne empirique $\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n X_j$ et $S_n^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n (X_j - \bar{X}_n)^2$ sont indépendantes.

1. Vérifier que $S_n^2 = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n X_j^2 - \frac{1}{n(n-1)} \sum_{\substack{j,k=1 \\ k \neq j}}^n X_j X_k$ et en déduire $\mathbb{E}(S_n^2)$.

2. En utilisant l'hypothèse d'indépendance, exprimer $\mathbb{E}(S_n^2 e^{iun\bar{X}_n})$ en fonction de $\text{Var}(X_1)$ et de la fonction caractéristique commune des X_j que l'on notera Φ_X .

3. Montrer par ailleurs que

$$\mathbb{E}(S_n^2 e^{iun\bar{X}_n}) = \mathbb{E}(X_1^2 e^{iuX_1}) \Phi_X(u)^{n-1} - (\mathbb{E}(X_1 e^{iuX_1}))^2 \Phi_X(u)^{n-2}.$$

4. Remarquer que $\mathbb{E}(X_1 e^{iuX_1})$ et $\mathbb{E}(X_1^2 e^{iuX_1})$ s'expriment simplement à l'aide des deux premières dérivées de Φ_X et en déduire une équation différentielle satisfaite par cette fonction.
5. Poser $f(u) = \Phi'_X(u)/\Phi_X(u)$ et calculer $f'(u)$. En déduire Φ_X puis la loi commune des X_j .