Examen du cours MOPSI

23 février 2007, 08h30 - 12h00.

Les notes de cours sont autorisées.

L'examen comporte trois parties : une partie probabilité, une partie analyse / calcul scientifique et une partie informatique. Chacune des parties comptera équitablement dans la note finale. Veuillez rédiger les réponses pour chacune des parties sur trois copies séparées.

ANALYSE ET CALCUL SCIENTIFIQUE

Exercice : stabilité pour une équation différentielle ordinaire

On considère l'équation différentielle ordinaire :

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x - 2y^2 \\ xy - y^3 \end{pmatrix}.$$

1) Donner le (ou les) point(s) d'équilibre, ainsi que le système linéarisé autour de ce (ou ces) point(s) d'équilibre. Que pouvez-vous en déduire sur la stabilité de ce (ou ces) point(s) d'équilibre ?

2) Trouver une valeur pour α telle que la fonction $V(x,y) = x^2 + \alpha y^2$ soit une fonction de Lyapunov pour le système au point d'équilibre $(0,0)$. Que pouvez-vous en déduire en terme du temps d'existence de la solution et de la stabilité du point d'équilibre $(0,0)$?

Problème : pénalisation de conditions aux limites

Soit Ω un domaine borné et suffisamment régulier de $\mathbb{R}^2$ et $f \in L^2(\Omega)$. On considère le problème suivant : trouver $u : \Omega \to \mathbb{R}$ tel que

$$\left\{ \begin{array}{rcll} -\Delta u & = & f & \text{dans } \Omega, \\ u & = & 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{array} \right. \tag{1}$$

1) Rappeler quel espace fonctionnel et quel cadre variationnel on peut utiliser pour que ce problème admette une unique solution. Quelle est la régularité de la solution ? En déduire que $\partial_n u = \nabla u \cdot n$ est bien définie comme fonction de $L^2(\partial\Omega)$ (où n désigne la normale sortante sur $\partial\Omega$).

Soit $\varepsilon > 0$. On considère maintenant la formulation variationnelle :

$$\text{trouver } u^\varepsilon \in H^1(\Omega) \text{ tel que } \forall v \in H^1(\Omega),\ \int_\Omega \nabla u^\varepsilon \nabla v + \frac{1}{\varepsilon}\int_{\partial\Omega} u^\varepsilon v = \int_\Omega f v. \tag{2}$$

On note $a^\varepsilon(u,v) = \int_\Omega \nabla u \nabla v + \frac{1}{\varepsilon}\int_{\partial\Omega} uv$ la forme bilinéaire associée à la formulation variationnelle.

2) Montrer que $\|u\|_\varepsilon^2 = \int_\Omega |\nabla u|^2 + \frac{1}{\varepsilon}\int_{\partial\Omega} u^2$ définit une norme équivalente à la norme H^1 sur l'ensemble des fonctions de $H^1(\Omega)$. (*Indication : pour montrer qu'il existe une constante*

C_ε *telle que* $\|u\|^2_{L^2(\Omega)} \leq C_\varepsilon \|u\|^2_\varepsilon$*, on pourra raisonner par l'absurde*). En déduire que le problème (2) est bien posé. A quel problème écrit sous forme forte la formulation variationnelle (2) correspond-elle ?

3) Dans toute la suite, on notera $u \in H^2(\Omega)$ la solution de (1). Montrer que :

$$\forall v \in H^1(\Omega), a^\varepsilon(u, v) = \int_\Omega fv + \int_{\partial\Omega} \partial_n uv.$$

En déduire que

$$\forall v \in H^1(\Omega), a^\varepsilon(u - u^\varepsilon, v) = \int_{\partial\Omega} \partial_n uv.$$

En prenant $v = u - u^\varepsilon$ comme fonction test dans l'équation précédente, montrer que u^ε tend vers u (en norme H^1) quand ε tend vers 0.

On approxime le problème (2) par des éléments finis P^1 :

$$\text{trouver } u_h \in V_h \text{ tel que } \forall v_h \in V_h,\ a^\varepsilon(u_h, v_h) = \int_\Omega f v_h, \tag{3}$$

où V_h désigne l'espace d'éléments finis P^1 sur une suite de triangulations régulières de Ω indexée par h, le diamètre des éléments.

4) Vérifier que, pour toute fonction $v_h \in V_h$

$$a^\varepsilon(u_h - v_h, u_h - v_h) = -\int_{\partial\Omega} \partial_n u(u_h - v_h) + a^\varepsilon(u - v_h, u_h - v_h)$$

et en déduire que

$$\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla(u_h - v_h)|^2 + \frac{1}{4\varepsilon}\int_{\partial\Omega} |u_h - v_h|^2 \leq \varepsilon \int_{\partial\Omega} |\partial_n u|^2 + \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla(u - v_h)|^2 + \frac{1}{2\varepsilon}\int_{\partial\Omega} |u - v_h|^2.$$

En utilisant le fait que,

$$\forall u \in H^2(\Omega), \inf_{v_h \in V_h} \int_{\partial\Omega} |u - v_h|^2 \leq C \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|^2_{H^{1/2}} \leq Ch^3 \|u\|^2_{H^2},$$

en déduire que[1]

$$\|u - u_h\|^2_{H^1(\Omega)} \leq C\|u\|^2_{H^2(\Omega)} \left(\varepsilon + h^2 + \frac{h^3}{\varepsilon}\right).$$

Comment choisir ε en fonction de h pour avoir le meilleur ordre de convergence en h ? Commenter.

5) (Facultatif) Expliquer pourquoi utiliser la forme bilinéaire $\overline{a}^\varepsilon(u, v) = \int_\Omega \nabla u \nabla v + \frac{1}{\varepsilon}\int_{\partial\Omega} uv - \int_{\partial\Omega} \partial_n uv + \int_{\partial\Omega} \partial_n vu$ plutôt que a^ε permet d'obtenir une vitesse de convergence optimale.

[1] C désigne une constante positive indépendante du pas de discrétisation h, qui peut être différente d'une occurence à l'autre.

PROBABILITES

Exercice 1 Soit $G = (G_1, G_2, \ldots, G_d)$ un vecteur de gaussiennes centrées réduites indépendantes.

1. Soit M une matrice $n \times d$, quelle est la loi du vecteur MG ?
2. Soit M_1 une matrice $n_1 \times d$ et M_2 une matrice $n_2 \times d$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur les matrices M_1 et M_2 pour que $M_1 G$ et $M_2 G$ soient des vecteurs indépendants.

Exercice 2 Soit $(W_t, t \geq 0)$ un mouvement brownien.

1. Calculer $\mathbf{E}(W_u W_v)$ et en déduire la valeur de $\mathbf{E}\left(\int_0^s W_u du \int_0^t W_v dv\right)$.
2. Quelle est la loi de $\int_0^s W_u du$ et du couple $(\int_0^s W_u du, \int_0^t W_v dv)$, pour $s \leq t$.
3. Comment peut-on simuler la loi du couple $(\int_0^s W_u du, \int_0^t W_v dv)$ à l'aide de 2 gaussiennes indépendantes ?
4. Plus généralement comment peut-on simuler le vecteur
$$\left(\int_0^{t_1} W_u du, \int_0^{t_2} W_u du, \ldots, \int_0^{t_n} W_u du\right),$$
pour $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \ldots \leq t_n$?

Exercice 3 Soit $(M_n, n \geq 0)$ une martingale par rapport à une filtration $(\mathcal{F}_n, n \geq 0)$ telle que $M_0 = 0$ et qui vérifie que pour tout $n \geq 0$, $\mathbf{E}(M_n^2) < +\infty$.

On définit un processus $< M >_n$ par récurrence en posant $< M >_0 = 0$ et :
$$< M >_n - < M >_{n-1} = \mathbf{E}\left((M_n - M_{n-1})^2 \,|\mathcal{F}_{n-1}\right).$$

1. Montrer que $(< M >_n, n \geq 0)$ est un processus croissant, positif tel que $< M >_n$ est $\mathcal{F}_{n-1}$-mesurable.
2. Montrer que
$$\mathbf{E}\left((M_n - M_{n-1})^2 \,|\mathcal{F}_{n-1}\right) = \mathbf{E}\left((M_n^2 - M_{n-1}^2)\,|\mathcal{F}_{n-1}\right),$$
et en déduire que $(M_n^2 - < M >_n, n \geq 0)$ est une $\mathcal{F}_n$-martingale puis que $\mathbf{E}(M_n^2) = \mathbf{E}(< M >_n)$.
3. On note $< M >_\infty = \lim_{n \to +\infty} < M >_n$. On suppose que $\mathbf{E}(< M >_\infty) < +\infty$. Monter que la suite $(M_n, n \geq 0)$ est une suite de Cauchy dans L^2 et qu'elle converge donc au sens L^2 vers une variable aléatoire M_∞.
4. Soit $(\mathcal{F}_n, n \geq 0)$ une suite croissante de tribus telle que $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$. Soit X une variable aléatoire réelle telle que $\mathbf{E}(X) = 0$ et $\mathbf{E}(X^2) < +\infty$. On pose :
$$M_n = \mathbf{E}\left(X|\mathcal{F}_n\right)$$
5. Montrer que $M_0 = 0$ et que $(M_n, n \geq 0)$ est une martingale.
6. Monter que $\mathbf{E}(< M >_\infty) < +\infty$ et en déduire que M_n converge dans L^2.

   (Optionnel!) Montrer que $M_\infty = X$ si et seulement si X est mesurable par rapport à la tribu $\mathcal{F}_\infty$ engendrée par l'ensemble $\cup_{n \geq 0} \mathcal{F}_n$.

INFORMATIQUE

C++ avancé

1. Décrire succinctement le principe, les avantages et les contraintes de la programmation *template*.
2. Présenter la *STL*. En donner un exemple d'utilisation.
3. Définir l'*héritage*. Inventer un diagramme de classes différent de celui du cours.

Géométrie algorithmique

4. Donner la définition du diagramme de Voronoi et de la triangulation de Delaunay d'un ensemble de points. En donner des exemples d'utilisation pour des recherches géométriques simples.
5. Évoquer au moins un algorithme permettant de calculer la triangulation de Delaunay d'un ensemble de points dans le plan. Mentionner sa complexité.
6. Décrire les ennuis numériques pouvant faire échouer les algorithmes géométriques.
7. Dire quel problème l'algorithme *crust* sert à résoudre.

Équations aux dérivées partielles et traitement d'images

8. Une méthode élémentaire pour débruiter une image $I_0 : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ consiste à calculer une image minimisant la fonctionnelle d'énergie suivante :

   $$E(I) = \int_\Omega (I - I_0)^2 + \lambda \int_\Omega \|\nabla I\|^2 \ .$$

   Expliquer la raison d'être des différents termes de cette fonctionnelle et l'influence du paramètre λ.
9. Trouver l'EDP caractérisant le minimum global de E.
10. Proposer une méthode numérique pour calculer ce minimum et suggérer des librairies informatiques pour implanter cet algorithme.

Optimisation de forme

11. Définir le mouvement par courbure moyenne et le mouvement de "feu de forêt" par un principe variationnel. En donner les propriétés qualitatives pour une courbe dans le plan, puis pour une surface dans l'espace.
12. Décrire brièvement les différentes familles de méthodes numériques pour représenter des interfaces en mouvement, leurs avantages et leurs inconvénients respectifs.
13. Retrouver l'équation principale de la méthode *level set*, i.e. l'EDP vérifiée par une fonction ϕ dont le niveau 0 représente une hypersurface se déplaçant avec un champ de vitesse $\mathbf{v}$.
14. Décrire des techniques algorithmiques et numériques permettant de rendre la méthode *level set* moins coûteuse en temps de calcul et plus précise.