Examen du cours MOPSI

22 février 2008, 08h30-12h00.
Corrigé partiel

Les passages en italique sont des compléments à la correction.

Exercice 1

1 On peut chercher une solution au problème (1) sous la forme : trouver $u^\varepsilon \in H_0^1((0,1))$ tel que, pour toute fonction $v \in H_0^1((0,1))$

$$\int_0^1 a\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \frac{du^\varepsilon}{dx}\frac{dv}{dx} = \int_0^1 fv.$$

On vérifie en utilisant les arguments habituels que le problème est bien posé (cf. cours).

2 Le problème discret s'écrit : trouver $u_h^\varepsilon \in V_h$ tel que, pour toute fonction $v \in V_h$

$$\int_0^1 a\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \frac{du_h^\varepsilon}{dx}\frac{dv}{dx} = \int_0^1 fv,$$

où $V_h = \mathrm{Vect}(\phi_1, \dots, \phi_{I-1})$ est l'espace d'éléments finis. En utilisant le fait que $u_h^\varepsilon(x) = \sum_{i=1}^{I-1} U_i^\varepsilon \phi_i(x)$ et qu'il suffit de tester contre les fonctions $v = \phi_j$ pour $j = 1, \dots, I-1$, on obtient le problème discret : trouver $U^\varepsilon = (U_1^\varepsilon, \dots, U_{I-1}^\varepsilon)$ tel que $A^\varepsilon U^\varepsilon = F$, avec pour $i, j = 1, \dots, I-1$

$$A_{i,j}^\varepsilon = \int_0^1 a\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \frac{d\phi_i}{dx}\frac{d\phi_j}{dx}$$

et

$$F_i = \int_0^1 f\phi_i.$$

3 En utilisant le cours, on sait que, quand ε tend vers 0, $a(\cdot/\varepsilon)$ converge faiblement (dans L^2) vers la moyenne de a : $\langle a\rangle = \int_0^1 a$. Par conséquent, on obtient immédiatement que A^ε converge vers A^0 avec pour $i, j = 1, \dots, I-1$

$$A_{i,j}^0 = \langle a\rangle \int_0^1 \frac{d\phi_i}{dx}\frac{d\phi_j}{dx}.$$

4 Le problème discret $A^0 U^0 = F$ correspond à la discrétisation par élémnents finis du problème continu

$$\begin{cases} -\langle a\rangle \frac{d^2}{dx^2} u^0 = f, \\ u^0(0) = u^0(1) = 0. \end{cases}$$

5 On a vu en cours que le u^ε (la solution du problème continu (1)) converge, quand ε tend vers 0, vers u^* solution du problème homogénéisé

$$\begin{cases} -\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{1}{\langle \frac{1}{a}\rangle}\dfrac{d}{dx}u^*\right) = f \text{ sur } (0,1), \\ u^*(0) = u^*(1) = 0. \end{cases}$$

En général (si a n'est pas une constante) $\frac{1}{\langle \frac{1}{a} \rangle} \neq \langle a \rangle$ et, par conséquent, $u^0 \neq u^*$. Ceci illustre le fait que si on n'utilise pas un maillage assez fin pour correctement discrétiser les oscillations de $a(\cdot/\varepsilon)$, le résultat donné par la méthode des éléments finis est mauvaise. Une autre manière d'interpréter ces résultats est de dire que les limites $h \to 0$ et $\varepsilon \to 0$ ne commutent pas.

Exercice 2

1 A l'aide du théorème 6.2.4 du Polycopié, puisque $\mathbb{E}[\int_0^t s^2 ds] = t^3/3 < \infty$, l'intégrale stochastique $X_t = \int_0^t s dW_s$ est bien définie et il s'agit d'une $(\mathcal{F}_t)$-martingale continue. On a $E[X_t^2] = t^3/3$ et $X_t = \int_0^t s dW_s = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=0}^{2^n-1} \frac{it}{2^n}(W_{\frac{(i+1)t}{2^n}} - W_{\frac{it}{2^n}})$ dans L^2.

2 On sait qu'une variable aléatoire qui est la limite en loi d'une suite de v.a. gaussiennes est une gaussienne. Puisque le mouvement brownien est un processus gaussien, il apparaît que X_t (resp. Y_t) est la limite en loi des suites de gaussiennes $\sum_{i=0}^{2^n-1} \frac{it}{2^n}(W_{\frac{(i+1)t}{2^n}} - W_{\frac{it}{2^n}})$ (resp. $t2^{-n}\sum_{i=0}^{2^n-1} W_{\frac{it}{2^n}}$). La v.a X_t est ainsi une v.a gaussienne centrée ($E(X_t) = 0$ car $(X_t, t \geq 0)$ martingale) et de variance $E[X_t^2] = t^3/3$. Par le théorème de Fubini, $E(Y_t) = \int_0^t \mathbb{E}(W_s)ds = 0$ et $E(Y_t^2) = \int_0^t \int_0^t E(W_s W_u) ds du = \int_0^t \int_0^t s \wedge u ds du = \int_0^t (u^2/2 + u(t-u)) du = t^3/2 - t^3/6 = t^3/3$. Ainsi, X_t et Y_t suivent toutes deux la loi $\mathcal{N}(0, t^3/3)$.

3 Soient $0 \leq t_1 < \cdots < t_k$ et $\lambda_1, \ldots \lambda_k \in \mathbb{R}$. On écrit comme à la question précédente $\sum_{i=1}^k \lambda_i X_{t_i}$ et $\sum_{i=1}^k \lambda_i Y_{t_i}$ comme la limite de sommes discrètes. En utilisant une fois encore que le mouvement brownien étant un processus gaussien, il vient par passage à la limite que $\sum_{i=1}^k \lambda_i X_{t_i}$ et $\sum_{i=1}^k \lambda_i Y_{t_i}$ sont des v.a gaussiennes.

4 Pour $t' > t$, on a $X_{t'} - X_t = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=0}^{2^n-1} \frac{i(t'-t)}{2^n}(W_{\frac{(i+1)(t'-t)}{2^n}+t} - W_{\frac{i(t'-t)}{2^n}+t})$ dans L^2. Chaque accroissement $W_{\frac{(i+1)(t'-t)}{2^n}+t} - W_{\frac{i(t'-t)}{2^n}+t}$ étant indépendant de $\mathcal{F}_t$, il vient que la somme est également indépendante de $\mathcal{F}_t$, et en passant à la limite que $X_{t'} - X_t$ est indépendant de $\mathcal{F}_t$. En particulier, $X_{t'} - X_t$ est indépendant de X_t et donc $\mathbb{E}[(X_{t'} - X_t)X_t] = \mathbb{E}[X_{t'} - X_t]\mathbb{E}[X_t] = 0$. Par conséquent, $\mathbb{E}[X_{t'} X_t] = E[X_t^2] = t^3/3$. Le processus $(X_t, t \geq 0)$ est donc un processus gaussien centré (i.e. $\forall t \geq 0, \mathbb{E}(X_t) = 0$) et de covariance $\mathbb{E}[X_{t'} X_t] = (t \wedge t')^3/3$. Le processus $(W_{t^3/3}, t \geq 0)$ est également un processus gaussien centré de covariance $\mathbb{E}[W_{(t')^3/3} W_{t^3/3}] = (t \wedge t')^3/3$: les processus $(X_t, t \geq 0)$ et $(W_{t^3/3}, t \geq 0)$ ont donc même loi. Pour $t' > t$, on a par le théorème de Fubini $\mathbb{E}[Y_{t'} Y_t] = \int_0^t \int_0^{t'} s \wedge u ds du = \int_0^t (u^2/2 + (t'-u)u) du = \frac{t^2}{2}(t' - t/3)$: $(Y_t, t \geq 0)$ est un processus gaussien centré de covariance $\frac{\min(t,t')^2}{2}(\max(t, t') - \min(t, t')/3)$ et n'a pas la même loi que le processus $(X_t, t \geq 0)$. Ceci n'est pas contradictoire avec la question 2 : en effet si deux processus ont la même loi, leurs lois marginales sont identiques mais la réciproque et fausse. Deux processus peuvent avoir les mêmes lois marginales et présenter des structures de dépendance intertemporelle très différentes (cf. Exercice 5.3.5 pour un autre exemple).

5 En appliquant la formule d'Itô à $f(t, W_t)$ où $f(t, x) = tx$, on obtient immédiatement l'égalité demandée. Il n'y a pas de contradiction : si X_t a même loi que Y_t, X_t n'est pas pour autant p.s. égal à Y_t et $X_t - Y_t = tW_t \neq 0$.

6 En suivant l'exemple du polycopié, on écrit en utilisant que les trajectoires de $(X_t, t \geq 0)$ sont p.s. continues :

$$\{\tau_1 \leq t\} = \cap_{n\in\mathbb{N}^*} \cup_{s\in[0,t]\cap\mathbb{Q}} \{X_s > 1 - 1/n\},$$

ce qui donne $\{\tau_1 \leq t\} \in \mathcal{F}_t$. On obtient ainsi que τ_1 est un $\mathcal{F}_t$-temps d'arrêt et toujours en utilisant la continuité des trajectoires, on a p.s., $\tau_1 = \inf\{t \geq 0, X_t = 1\}$. Supposons qu'il existe $T > 0$ tel que $\mathbb{P}(\tau_1 \leq T) = 1$. Par le théorème d'arrêt appliqué à la martingale $(X_t, t \geq 0)$, on aurait $\mathbb{E}[X_{\tau_1}] = \mathbb{E}[X_0] = 0$, mais par ailleurs, $X_{\tau_1} = 1$ presque sûrement ce qui est contradictoire.

7 Puisque $(X_t, t \geq 0)$ et $(W_{t^3/3}, t \geq 0)$ ont même loi,

$$\tau_1 = \inf\{t \geq 0, X_t \geq 1\} \overset{loi}{=} \inf\{t \geq 0, W_{t^3/3} \geq 1\} = (3\inf\{t \geq 0, W_t \geq 1\})^{1/3}.$$

La densité de $\tilde{\tau}_1$ est donnée dans le polycopié formule (5.7). Pour f bornée mesurable, on a donc : $\mathbb{E}[f(\tau)] = \int_0^\infty f((3t)^{1/3})\frac{1}{\sqrt{2\pi t^3}}\exp(-\frac{1}{2t})dt = \int_0^\infty f(u)\frac{3\sqrt{3}\exp(-3/(2u^3))}{\sqrt{2\pi u^5}}du$ en posant $u = (3t)^{1/3}$ ce qui donne la densité de τ et $\mathbb{E}[\tau] < \infty$.

Problème

Partie I

On a clairement $\frac{d}{dt}\left(\exp\left(\int_0^t A(s)\,ds\right)f(t)\right) \leq \exp\left(\int_0^t A(s)\,ds\right)B(t)$ (calcul du même type que pour le Lemme de Gronwall) et donc, pour $0 \leq t_0 \leq t$,

$$\begin{aligned}
f(t) &\leq \exp\left(-\int_0^t A(s)\,ds\right)\int_0^t \exp\left(\int_0^s A(r)\,dr\right)B(s)\,ds,\\
&\leq \exp\left(-\int_0^t A(s)\,ds\right)\left(\int_0^{t_0} \exp\left(\int_0^s A(r)\,dr\right)B(s)\,ds + \int_{t_0}^t \exp\left(\int_0^s A(r)\,dr\right)B(s)\,ds\right),\\
&\leq \exp\left(-\int_0^t A(s)\,ds\right)\int_0^{t_0} \exp\left(\int_0^s A(r)\,dr\right)B(s)\,ds + \int_{t_0}^t \exp\left(-\int_s^t A(r)\,dr\right)\frac{B(s)}{A(s)}A(s)\,ds.
\end{aligned}$$

Pour t_0 assez grand, $A(t)$ est positif pour tout $t \geq t_0$ et on peut donc majorer le dernier terme de la façon suivante :

$$\begin{aligned}
\int_{t_0}^t \exp\left(-\int_s^t A(r)\,dr\right)\frac{B(s)}{A(s)}A(s)\,ds &\leq \sup\left(\frac{B(t)}{A(t)},\, t \geq t_0\right)\int_{t_0}^t \exp\left(-\int_s^t A(r)\,dr\right)A(s)\,ds,\\
&\leq \sup\left(\frac{B(t)}{A(t)},\, t \geq t_0\right)\exp\left(-\int_{t_0}^t A(r)\,dr\right).
\end{aligned}$$

On obtient donc

$$f(t) \leq \exp\left(-\int_0^t A(s)\,ds\right)\int_0^{t_0} \exp\left(\int_0^s A(r)\,dr\right)B(s)\,ds + \sup\left(\frac{B(t)}{A(t)},\, t \geq t_0\right),$$

puisque $\exp\left(-\int_{t_0}^t A(r)\,dr\right) \leq 1$. Pour t_0 assez grand, le second terme est aussi petit que l'on veut, et on fait tendre ensuite le premier terme vers 0 quand $t \to \infty$. Ceci montre que $\lim_{t\to\infty} f(t) = 0$.

On donne un preuve du résultat analogue discret. On suppose dans un premier temps que pour tout n, $A_n \in]0,1]$. On pose $f'_n = f_n - B_n/A_n$. On a $f'_{n+1} \leq (1-A_n)f'_n + B'_n$ où $B'_n = B_n/A_n - B_{n+1}/A_{n+1}$. Par récurrence, il est alors facile de voir que pour $n, p \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$f'_{n+p} \leq f'_n \prod_{i=n}^{n+p-1} (1-A_i) + \max_{1\leq l\leq k\leq p} \left| \sum_{i=n+l-1}^{n+k-1} B'_i \right|.$$

Soit $\varepsilon > 0$. Puisque $\sum_{i=1}^n B'_i = B_1/A_1 - B_{n+1}/A_{n+1}$ a une limite quand $n \to +\infty$, en utilisant le critère de Cauchy, il existe $n > 0$ tel que $\forall p \in \mathbb{N}^*, \max_{1\leq l\leq k\leq p} |\sum_{i=n+l-1}^{n+k-1} B'_i| \leq \varepsilon$. En passant au logarithme, on montre aisément grâce aux hypothèses sur (A_n) que le produit tend vers 0 lorsque $p \to +\infty$ et ainsi $\limsup_n f'_n \leq \varepsilon$ et ce quelque soit ε. Par conséquent $\limsup_n f_n = \limsup_n f'_n \leq 0$, et puisque $f_n \geq 0$, il vient que $\lim_n f_n = 0$.

On suppose désormais seulement que (A_n) est une suite bornée. Dans ce cas B_n tend vers 0, et on a $f_{n+1} \leq B_n$ lorsque $A_n > 1$. Si $\exists N, \forall n \geq N, A_n \in]0,1]$ on est dans le cas précédent et sinon il existe une injection croissante $i : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que $\{n, A_n > 1\} = \{i(n), n \in \mathbb{N}\}$. On a $f_{i(n)+1} \to 0$, et en utilisant une majoration similaire à la précédente entre les indices $i(n)+1$ et $i(n+1)$, on obtient que $\lim_n f_n = 0$.

En revanche, le résultat devient faux si (A_n) n'est plus supposée bornée. On prend par exemple $B_n = 1/(n+1)$, $A_n = 1$ et $f_n = 1/4$ si n est impair et $B_n = 1$, $A_n = n/2$ et $f_n = 1/n$ si n est pair.

Partie II

II.1 Par le théorème de Cauchy-Lipschitz, la solution est bien définie pour tout temps, puisque $X(t)$ vit dans le compact $\mathbb{T}$. Intuitivement, on voit que $X(t)$ "descend le gradient de H" et va donc converger vers un minimum local de H (sauf si $X(0)$ est un point réalisant un maximum local de H auquel cas $X(t)$ est constant).

Prouvons-le. Plus précisément, montrons que si H possède un nombre fini de points critiques, alors $X(t)$ converge vers un point critique de H.

On vérifie facilement que $\frac{d}{dt}(H(X(t)) = -\frac{1}{2}\left(\frac{dH}{dx}\right)^2(X(t)) \leq 0$. Autrement dit, le long d'une trajectoire, $H(X(t))$ décroît. Comme cette fonction est minorée, elle admet une limite : $\lim_{t\to\infty} H(X(t)) = H_*$. Le fait que $H(X(t))$ décroît montre par ailleurs que $H_* = \inf_{t\geq 0} H(X(t))$.

Comme $X(t)$ est une fonction à valeurs dans le compact $\mathbb{T}$, il existe une suite de temps (t_n) tel que $X(t_n)$ admette une limite X_*, et par continuité de la fonction H, on a $H(X_*) = H_*$. Nécessairement, X_* est un point critique de H. Raisonnons par l'absurde et supposons que $\frac{dH}{dx}(X_*) \neq 0$. On introduit alors $\phi(x,t)$ le flot associé à l'EDO (2), c'est-à-dire que $t \mapsto \phi(x,t)$ est solution de (2), avec comme condition initiale x. Ainsi, $X(t) = \phi(X(0),t)$. Comme $\frac{dH}{dx}(X_*) \neq 0$, on a nécessairement $H(\phi(X_*,1)) < H(X_*)$. Or, par la relation de flot, on a $\phi(X(t_n),1) = X_{1+t_n}$, et cette suite converge vers $\phi(X_*,1)$. Ceci montre que pour n assez grand, $H(X_{1+t_n}) < H(X_*)$ ce qui est impossible.

On a donc montré à ce stade que toute suite convergente $X(t_n)$ converge nécessairement *vers un point critique de H. Ceci montre que nécessairement $X(t)$ converge vers un point critique. En effet, considérons X_* la limite obtenue pour une suite $X(t_n)$, et supposons que, pour une autre suite, $X(t'_n)$ converge vers $X'_* \neq X_*$. On sait que $\frac{dH}{dX}(X_*) = \frac{dH}{dX}(X'_*) = 0$. Soit $\varepsilon > 0$ la plus petite distance entre deux points critiques de H. Comme $X'_* \neq X_*$, la fonction $X(t)$ visite une infinité de fois le bord de la boule centrée en X_* et de rayon $\varepsilon/2$: cela permet de construire une suite de temps t''_n tels que $\|X_{t''_n} - X_*\| = \varepsilon/2$. Quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer que $(X_{t''_n})$ est convergente, et donc nécessairement vers un point critique de H, d'où une contradiction avec la définition de ε.*

II.2 C'est immédiat en remarquant que

$$
\begin{aligned}
q_{\beta(t)}(x)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{p(t,x)}{q_{\beta(t)}(x)}\right) &= \frac{\partial p}{\partial x}(t,x) - \frac{\partial q_{\beta(t)}}{\partial x}(x)\frac{p(t,x)}{q_{\beta(t)}(x)},\\
&= \frac{\partial p}{\partial x}(t,x) - \frac{dq_{\beta(t)}}{dx}(x)\frac{p(t,x)}{q_{\beta(t)}(x)},\\
&= \frac{\partial p}{\partial x}(t,x) + \beta\frac{dH}{dx}(x)p(t,x).
\end{aligned}
$$

II.3.a On commence par considérer des fonctions ϕ régulières. Le fait que $\int_{\mathbb{T}} \phi\, q_\beta = 0$ montre que $\exists x_0$, $\phi(x_0) = 0$. On pose $\psi(x) = \phi(x_0 + x)$. Par Cauchy-Schwarz, on a $\psi(x)^2 = \left(\int_0^x \psi'(y)\,dy\right)^2 \leq x\int_0^x \psi'(y)^2\,dy$. Par conséquent,

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{T}} \psi^2 &= \int_0^1 \psi^2(x)\,dx\\
&\leq \int_0^1 x \int_0^x \psi'(y)^2\,dy\,dx,\\
&\leq \int_0^1 x \int_0^1 \psi'(y)^2\,dy\,dx,\\
&= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{T}} \psi'^2.
\end{aligned}
$$

On en déduit que $\int_{\mathbb{T}} \phi^2 = \int_{\mathbb{T}} \psi^2 \leq \frac{1}{2}\int_{\mathbb{T}} \psi'^2 = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{T}} \phi'^2$. Le résultat est en fait valable pour toute fonction ϕ telle que $\int_{\mathbb{T}}(\phi^2 + \phi'^2) < \infty$ et $\int_{\mathbb{T}} \phi\, q_\beta = 0$ par densité. Une inégalité de ce type est appelée inégalité de Poincaré.

II.3.b Pour toute fonction ϕ régulière et telle que $\int_{\mathbb{T}} \phi\, q_\beta = 0$, on a :

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{T}} \phi'^2 q_\beta &\geq Z_\beta^{-1}\exp(-\beta\max H)\int_{\mathbb{T}} \phi'^2,\\
&\geq 2Z_\beta^{-1}\exp(-\beta\max H)\int_{\mathbb{T}} \phi^2,\\
&\geq 2Z_\beta^{-1}\exp(-\beta\max H)Z_\beta\exp(\beta\min H)\int_{\mathbb{T}} \phi^2 q_\beta,\\
&\geq 2\exp(-\beta\,\mathrm{osc}(H))\int_{\mathbb{T}} \phi^2 q_\beta.
\end{aligned}
$$

Cette inégalité est en fait valable pour toute fonction ϕ telle que $\int_{\mathbb{T}}(\phi^2 + \phi'^2)\, q_\beta < \infty$ et $\int_{\mathbb{T}} \phi\, q_\beta = 0$ par densité. On en déduit que $\lambda_1(\beta) \geq \beta^{-1}\exp(-\beta\,\mathrm{osc}(H))$.

II.4 On a

$$\begin{aligned}
\frac{df}{dt} &= \int_{\mathbb{T}} \partial_t p \left(p/q_{\beta_0} - 1\right), \\
&= \int_{\mathbb{T}} (\beta_0^{-1}/2)\partial_x(q_{\beta_0}\partial_x(p/q_{\beta_0}))\left(p/q_{\beta_0} - 1\right), \\
&= -(\beta_0^{-1}/2)\int_{\mathbb{T}} (\partial_x(p/q_{\beta_0}))^2 q_{\beta_0}.
\end{aligned}$$

Or, par définition du trou spectral, puisque $\int \left(p/q_{\beta_0} - 1\right) q_{\beta_0} = 0$, on a

$$(\beta_0^{-1}/2)\int_{\mathbb{T}} (\partial_x(p/q_{\beta_0}))^2 q_{\beta_0} \geq \lambda_1(\beta_0)\int_{\mathbb{T}} \left(p/q_{\beta_0} - 1\right)^2 q_{\beta_0}.$$

On en déduit que

$$\frac{df}{dt} \leq -2\lambda_1(\beta_0) f$$

et donc $f(t) \leq f(0)\exp(-2\lambda_1(\beta_0)t)$. On remarque que par Cauchy-Schwarz

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{T}} |p - q_{\beta_0}| &= \int_{\mathbb{T}} |p/q_{\beta_0} - 1| q_{\beta_0}, \\
&\leq \left(\int_{\mathbb{T}} |p/q_{\beta_0} - 1|^2 q_{\beta_0}\right)^{1/2}, \\
&\leq (2f(t))^{1/2}, \\
&\leq (2f(0))^{1/2}\exp(-\lambda_1(\beta_0)t).
\end{aligned}$$

II.5 En développant le carré, on a

$$\begin{aligned}
e(t) &= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{T}} \left(\left(\frac{p(t,\cdot)}{q_{\beta(t)}}\right)^2 - 2\frac{p(t,\cdot)}{q_{\beta(t)}} + 1\right) q_{\beta(t)}, \\
&= \frac{1}{2}\left(\int_{\mathbb{T}} \frac{p(t,\cdot)^2}{q_{\beta(t)}} - 2\int_{\mathbb{T}} p(t,\cdot) + \int_{\mathbb{T}} q_{\beta(t)}\right), \\
&= \frac{1}{2}\left(\int_{\mathbb{T}} \frac{p(t,\cdot)^2}{q_{\beta(t)}} - 1\right).
\end{aligned}$$

On a donc

$$\frac{de}{dt} = \int_{\mathbb{T}} \partial_t p \frac{p}{q_\beta} - \frac{1}{2}\int_{\mathbb{T}} \partial_t q_\beta \left(\frac{p}{q_\beta}\right)^2.$$

Pour le premier terme, on a

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{T}} \partial_t p \frac{p}{q_\beta} &= \int_{\mathbb{T}} (\beta^{-1}/2)\partial_x(q_\beta\partial_x(p/q_\beta))\frac{p}{q_\beta}, \\
&= -(\beta^{-1}/2)\int_{\mathbb{T}} (\partial_x(p/q_\beta))^2 q_\beta, \\
&\leq -\lambda_1(\beta)\int_{\mathbb{T}} (p/q_\beta - 1)^2 q_\beta, \\
&\leq -2\lambda_1(\beta) e(t).
\end{aligned}$$

Pour le second terme, on a

$$
\begin{aligned}
\partial_t q_\beta &= \partial_t (Z_\beta^{-1} \exp(-\beta H), \\
&= -\partial_t (Z_\beta) Z_\beta^{-2} \exp(-\beta H) - Z_\beta^{-1} H \partial_t \beta \exp(-\beta H), \\
&= \left(\int_{\mathbb{T}} H \partial_t \beta \exp(-\beta H) \right) Z_\beta^{-1} q_\beta - H \partial_t \beta q_\beta, \\
&= \partial_t \beta q_\beta \left(\int_{\mathbb{T}} H q_\beta - H \right).
\end{aligned}
$$

On en déduit que

$$
\begin{aligned}
-\frac{1}{2} \int_{\mathbb{T}} \partial_t q_\beta \left(\frac{p}{q_\beta} \right)^2 &= -\frac{1}{2} \int_{\mathbb{T}} \partial_t \beta \left(\int_{\mathbb{T}} H q_\beta - H \right) \left(\frac{p^2}{q_\beta} \right), \\
&= -\frac{1}{2a(t+2)} \int_{\mathbb{T}} \left(\int_{\mathbb{T}} H q_\beta - H \right) \left(\frac{p^2}{q_\beta} \right), \\
&\leq -\frac{1}{2a(t+2)} \int_{\mathbb{T}} (\min H - \max H) \left(\frac{p^2}{q_\beta} \right), \\
&\leq \frac{\mathrm{osc} H}{2a(t+2)} (2e(t) + 1).
\end{aligned}
$$

On obtient ensuite facilement le résultat annoncé.

II.6 En utilisant la question II.3.b, on a

$$
\begin{aligned}
A(t) &\geq 2\beta^{-1} \exp(-\beta \mathrm{osc} H) - \frac{\mathrm{osc}(H)}{a(t+2)} \\
&\geq \frac{2a}{\ln(t+2)} (t+2)^{-\mathrm{osc}(H)/a} - \frac{\mathrm{osc}(H)}{a(t+2)}.
\end{aligned}
$$

On voit donc que dans la limite $t \to \infty$, $A(t) \geq \frac{C}{t^{\mathrm{oscH}/a} \ln t}$, pour une constante $C > 0$. On en déduit que $\int_0^\infty A(t)\, dt = \infty$, et que $\lim_{t\to\infty} \frac{B(t)}{A(t)} = 0$.

II.7 Par Cauchy-Schwarz, on obtient facilement

$$
\begin{aligned}
e(t) &\geq \frac{1}{2} \int_{\mathcal{M}^\delta} \left(\frac{p(t,\cdot)}{q_{\beta(t)}} - 1 \right)^2 q_{\beta(t)}, \\
&\geq \frac{1}{2} \left(\int_{\mathcal{M}^\delta} |p(t,\cdot) - q_{\beta(t)}| \right)^2, \\
&\geq \frac{1}{2} \left| \mathbb{P}(X_t \in \mathcal{M}^\delta) - \int_{\mathcal{M}^\delta} q_{\beta(t)} \right|^2.
\end{aligned}
$$

Comme $\beta(t)$ tend vers ∞ quand $t \to \infty$, on a clairement $\lim_{t\to\infty} \int_{\mathcal{M}^\delta} q_{\beta(t)} = 1$. Par conséquent, $\lim_{t\to\infty} \mathbb{P}(X_t \in \mathcal{M}^\delta) = 1$. Autrement dit, $\lim_{t\to\infty} \mathbb{P}(\mathrm{dist}(X_t, \mathcal{M}) \geq \delta) = 0$, ce qui termine la preuve.

Partie III

1 D'après le théorème de Heine, H est uniformément continue sur $[0,1]$ et pour $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que $|x-y| \leq \eta \implies |H(x)-H(y)| \leq \varepsilon$. Par conséquent pour $N > 1/\eta$, $0 \leq \min_{x \in E_N} H(x) - \min_{x \in [0,1]} H(x) \leq \varepsilon$.

2.a. Puisque π est une probabilité, $\exists y \in E_N, \pi(y) > 0$ et alors $\forall x \in E_N, P^l(x,y) > 0$. Si P est périodique de période $d > 1$, on considère $C_1, \ldots, C_d$ une partition associée. Quitte à renuméroter la partition, on peut supposer que $y \in C_1$. Alors on voit facilement que $P^l(x,y) > 0$ ssi $x \in C_k$, où k est l'unique entier de $\{1, \ldots, d\}$ tel que $k + l \equiv 1 \ (mod\ d)$. Par conséquent $C_k = E_N$ ce qui est contradictoire.

2.b D'après la premère partie du problème résolu 4.6.4, la matrice de transition $Q_\beta(x,y)$ définie pour $y \neq x$ par $Q_\beta(x,y) = P(x,y)e^{-\beta(H(y)-H(x))^+} = \min(1, \frac{\mu_\beta(y)}{\mu_\beta(x)})P(x,y)$ est irréductible apériodique. Elle admet μ_β pour mesure invariante et est donc récurrente positive. Par le Théorème 4.6.4, (X_n) converge donc en loi vers une v.a. de loi μ_β. D'après la dernière partie du problème résolu 4.6.4, $\mu_\beta(x) \underset{\beta \to +\infty}{\to} 0$ si $x \notin \mathcal{M}^N$, et $\mu_\beta(x) \underset{\beta \to +\infty}{\to} 1/\#\mathcal{M}^N$ si $x \in \mathcal{M}^N$.

2.c On se donne une famille de v.a. $(Y_{n,x}, n \in \mathbb{N}, x \in E)$ à valeurs dans E_N, indépendantes et de loi $\mathbb{P}(Y_{n,x} = y) = P(x,y)$, et une suite de v.a. indépendantes $(U_n, n \in \mathbb{N})$ de loi uniforme sur $[0,1]$. D'après la deuxième partie du problème résolu 4.6.4, $X_{n+1} = Y_{n,X_n}\mathbf{1}_{\{U_n \leq e^{-\beta(H(Y_{n,X_n})-H(X_n))^+}\}} + X_n \mathbf{1}_{\{U_n > e^{-\beta(H(Y_{n,X_n})-H(X_n))^+}\}}$ suit bien une chaîne de Markov de loi Q_β. Lorsque β est grand et que l'on se situe sur un minimum local, le taux de transition vers des états d'énergie H supérieure est effectivement faible, mais en revanche, la probabilité de rester sur ce même état est élevée, et la chaîne peut rester longtemps sur des états qui sont proches de l'optimum mais qui ne réalisent pas le minimum de H.

2.d La chaine définie par $P(x,y) = 1/(N+1)$ pour $x, y \in E_N$ satisfait clairement les conditions requises.

3.a On a $\nu_{n+1}(y) = \mathbb{P}(X_{n+1} = y) = \sum_{x \in E_N} \mathbb{P}(X_{n+1} = y | X_n = x)\mathbb{P}(X_n = x) = \sum_{x \in E_N} \nu_n(x) Q_n(x,y)$ et, par construction, μ_{β_n} est la mesure invariante de Q_n.

3.b Pour $x, y \in E_N$, $(H(y) - H(x))^+ \leq \mathrm{osc}_N(H)$ et donc $Q_n(x,y) \geq ce^{-\beta_n \mathrm{osc}_N(H)}\pi(y)$. $\nu_{n+1}(y) - \mu_{\beta_n}(y) = \sum_{x \in E_N}(\nu_n(x) - \mu_{\beta_n}(x))Q_n(x,y) = \sum_{x \in E_N}(\nu_n(x) - \mu_{\beta_n}(x))(Q_n(x,y) - ce^{-\beta_n \mathrm{osc}_N(H)}\pi(y))$ et donc

$$|\nu_{n+1}(y) - \mu_{\beta_n}(y)| \leq \sum_{x \in E_N} |\nu_n(x) - \mu_{\beta_n}(x)|(Q_n(x,y) - ce^{-\beta_n \mathrm{osc}_N(H)}\pi(y)).$$

En sommant cette inégalité sur y et en intervertissant les sommes, on obtient $\mathbf{V}(\nu_{n+1} - \mu_{\beta_n}) \leq (1 - ce^{-\beta_n \mathrm{osc}_N(H)})\mathbf{V}(\nu_n - \mu_{\beta_n})$.

3.c La première égalité est immédiate, et pour $\beta' > \beta > 0$, on a en utilisant que $\tilde{H} \geq 0$ et $1 - e^x$ est 1-lipschitzien sur $\mathbb{R}_-$: $0 \leq e^{-\beta\tilde{H}(x)} - e^{-\beta'\tilde{H}(x)} = e^{-\beta\tilde{H}(x)}(1 - e^{(\beta-\beta')\tilde{H}(x)}) \leq e^{-\beta\tilde{H}(x)}(\beta' - \beta)\tilde{H}(x) \leq e^{-\beta\tilde{H}(x)}(\beta' - \beta)\mathrm{osc}_N(H)$. On écrit $\frac{e^{-\beta\tilde{H}(x)}}{\sum_{y \in E_N} e^{-\beta\tilde{H}(y)}} - \frac{e^{-\beta'\tilde{H}(x)}}{\sum_{y \in E_N} e^{-\beta'\tilde{H}(y)}} = \frac{e^{-\beta\tilde{H}(x)} - e^{-\beta'\tilde{H}(x)}}{\sum_{y \in E_N} e^{-\beta\tilde{H}(y)}} + e^{-\beta'\tilde{H}(x)} \frac{\sum_{y \in E_N} e^{-\beta'\tilde{H}(y)} - \sum_{y \in E_N} e^{-\beta\tilde{H}(y)}}{\sum_{y \in E_N} e^{-\beta\tilde{H}(y)} \sum_{y \in E_N} e^{-\beta'\tilde{H}(y)}}$, et l'inégalité précédente nous donne $\sum_{y\in E_N} e^{-\beta\tilde{H}(y)}(\beta-\beta')\mathrm{osc}_N(H) \le \sum_{y\in E_N} e^{-\beta'\tilde{H}(y)} - \sum_{y\in E_N} e^{-\beta\tilde{H}(y)} \le 0$ et ainsi, on obtient :

$$\left|\frac{e^{-\beta\tilde{H}(x)}}{\sum_{y\in E_N} e^{-\beta\tilde{H}(y)}} - \frac{e^{-\beta'\tilde{H}(x)}}{\sum_{y\in E_N} e^{-\beta'\tilde{H}(y)}}\right| \le |\beta'-\beta| \left(\frac{e^{-\beta\tilde{H}(x)}}{\sum_{y\in E_N} e^{-\beta\tilde{H}(y)}} + \frac{e^{-\beta'\tilde{H}(x)}}{\sum_{y\in E_N} e^{-\beta'\tilde{H}(y)}}\right),$$

ce qui donne $\mathbf{V}(\mu_\beta - \mu_{\beta'}) \le 2\mathrm{osc}_N(H)|\beta-\beta'|$ en sommant sur x. Cette inégalité vaut aussi pour $\beta' \le \beta$ puisque $\mathbf{V}(\mu_\beta - \mu_{\beta'}) = \mathbf{V}(\mu_{\beta'} - \mu_\beta)$.

3.d On a $\mathbf{V}(\nu_{n+1} - \mu_{\beta_{n+1}}) \le \mathbf{V}(\nu_{n+1} - \mu_{\beta_n}) + \mathbf{V}(\mu_{\beta_n} - \mu_{\beta_{n+1}})$, et en utilisant les deux questions précédentes, on obtient immédiatement le résultat souhaité. On utilise le lemme de la partie I avec les suites $A_n = c(n+1)^{-\frac{\mathrm{osc}_N(H)}{a}}$ et $B_n = 2\frac{\mathrm{osc}_N(H)}{a}\log\left(1+\frac{1}{n+1}\right)$ qui satisfont les propriétés requises dès que $a > \mathrm{osc}_N(H)$ (la série $\sum_n A_n$ est alors divergente), et on en déduit que $\mathbf{V}(\nu_n - \mu_{\beta_n}) \underset{n\to+\infty}{\to} 0$.

3.e On a pour $y \in E_N$, $|\mathbb{P}(X_n = y) - \mu_{\beta_n}(y)| \le \mathbf{V}(\nu_n - \mu_{\beta_n}) \underset{n\to+\infty}{\to} 0$. Or, comme $\beta_n \underset{n\to+\infty}{\to} +\infty$, $\mu_{\beta_n}(y) \underset{n\to+\infty}{\to} \mathbf{1}_{\{y\in\mathcal{M}^N\}}/(\#\mathcal{M}^N)$ et donc $\mathbb{P}(X_n = y) \underset{n\to+\infty}{\to} \mathbf{1}_{\{y\in\mathcal{M}^N\}}/(\#\mathcal{M}^N)$. En particulier $\mathbb{P}(X_n \in \mathcal{M}^N) \underset{n\to+\infty}{\to} 1$. Les résultats obtenus dans le cas discret sont de même nature que dans le cas continu. La croissance en fonction du temps de β qui permet d'avoir convergence en loi vers une loi chargeant les minima de H est dans les deux cas logarithmique.