Examen du cours MOPSI

06 février 2009, 08h30-12h00.

Corrigé

Problème : Au sujet de l'équation de Poisson.

Partie I : Estimation d'erreur pour une méthode d'éléments finis.

I.1 C'est du cours. En utilisant le Lemme de Lax Milgram et l'inégalité de Poincaré, on sait que le problème variationnel suivant admet une unique solution : trouver $u \in H_0^1(\Omega)$ tel que pour tout $v \in H_0^1(\Omega)$,

$$a(u, v) = l(v).$$

I.2 Soit V_h l'espace d'éléments finis P^k, c'est-à-dire l'espace des fonctions continues, qui sont polynomiales (de degré k) par morceaux sur un maillage du domaine Ω. Le problème discrétisé s'écrit : trouver $u_h \in V_h$ tel que pour tout $v_h \in V_h$,

$$a(u_h, v_h) = l(v_h).$$

Comme $V_h \subset H_0^1(\Omega)$, on a, pour tout $v_h \in V_h$,

$$a(u - u_h, v_h) =, 0$$

et donc

$$a(u - u_h, u - u_h) = a(u - u_h, u - v_h).$$

On en déduit facilement que pour tout $v_h \in V_h$,

$$\int_\Omega |\nabla(u - u_h)|^2 \leq \left(\int_\Omega |\nabla(u - u_h)|^2\right)^{1/2} \left(\int_\Omega |\nabla(u - v_h)|^2\right)^{1/2},$$

et donc, en prenant l'infimum sur les $v_h \in V_h$ et en utilisant le fait que $u \in H^2(\Omega)$,

$$\left(\int_\Omega |\nabla(u - u_h)|^2\right)^{1/2} \leq Ch\|u\|_{H^2(\Omega)}.$$

I.3 L'application $s : H_0^1(\Omega) \mapsto \mathbb{R}$ est bien définie et linéaire. Il suffit donc de montrer sa continuité en 0. Par Cauchy-Schwarz, on a

$$\begin{aligned} |s(u)| &\leq |A|^{1/2} \left(\int_A |u|^2\right)^{1/2} \\ &\leq |A|^{1/2} \|u\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq |A|^{1/2} \|u\|_{H^1(\Omega)}, \end{aligned}$$

où $|A|$ désigne la mesure de Lebesgue de A. On en déduit (par l'inégalité de Poincaré) que

$$\begin{aligned} |s(u) - s(u_h)| &\leq |A|^{1/2} \|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} \\ &\leq C \left(\int_\Omega |\nabla(u - u_h)|^2\right)^{1/2} \\ &\leq Ch\|u\|_{H^2(\Omega)} \end{aligned}$$

en utilisant le résultat de la questions précédente.

I.4 On a, par intégration par parties, en utilisant le fait que $\psi = 0$ sur $\partial\Omega$,

$$\begin{aligned} s(u) - s(u_h) &= \int_A (u - u_h) \\ &= -\int_\Omega \Delta\psi(u - u_h) \\ &= \int_\Omega \nabla\psi \cdot \nabla(u - u_h) \\ &= \int_\Omega \nabla(\psi - \psi_h) \cdot \nabla(u - u_h), \end{aligned}$$

puisque $a(u - u_h, v_h) = 0$ pour tout $v_h \in V_h$.

I.5 La fonction 1_A est une fonction de $L^2(\Omega)$ et donc $\psi \in H^2(\Omega)$. On a donc l'estimée d'erreur (comme dans la question I.2) :

$$\left(\int_\Omega |\nabla(\psi - \psi_h)|^2\right)^{1/2} \leq Ch\|\psi\|_{H^2(\Omega)}.$$

Par Cauchy-Schwarz, on a donc :

$$\begin{aligned} |s(u) - s(u_h)| &= \left|\int_\Omega \nabla(\psi - \psi_h) \cdot \nabla(u - u_h)\right| \\ &\leq \left(\int_\Omega |\nabla(\psi - \psi_h)|^2\right)^{1/2} \left(\int_\Omega |\nabla(u - u_h)|^2\right)^{1/2} \\ &\leq Ch^2\|u\|_{H^2(\Omega)}\|\psi\|_{H^2(\Omega)}. \end{aligned}$$

On obtient donc une convergence en h^2 et non pas en h comme dans I.3. La raison pour laquelle le résultat en I.3 est sous-optimal est que la fonction s est en fait continue de $L^2(\Omega)$ dans $\mathbb{R}$ (et non pas seulement de $H^1(\Omega)$ dans $\mathbb{R}$). Et donc on peut majorer la différence $|s(u) - s(u_h)|$ par l'erreur $\|u - u_h\|_{L^2(\Omega)}$ et non pas l'erreur $\|u - u_h\|_{H_0^1(\Omega)}$. Enfin, il est naturel que l'erreur en norme L^2 soit meilleure que l'erreur en norme H^1. On peut en fait montrer par des techniques similaires à celle utilisée ci-dessus que l'erreur L^2 est bien en $O(h^2)$ (c'est le lemme d'Aubin-Nitsche).

I.6 En dimension 1, le domaine Ω est un intervale (a, b). Il est clair que $\overline{\psi} \in V_h$ puisque la solution de (4) est une fonction continue, et affine sur (a, x^*) et sur (x^*, b). Par conséquent, on a

$$\begin{aligned} u(x^*) - u_h(x^*) &= -\int_\Omega \overline{\psi}''(u - u_h) \\ &= \int_\Omega \overline{\psi}'(u - u_h)' \\ &= a(u - u_h, \overline{\psi}) \\ &= 0, \end{aligned}$$

ce qui termine la preuve.

Partie II : Interprétation probabiliste de l'équation de Poisson.

II.1.a La solution u est affine sur $[-1,1]$ et grâce aux conditions limites, on obtient que $u(x) = f(-1)+(f(1)-f(-1))\frac{x+1}{2}$ pour $x \in [-1,1]$. Ainsi $(u(W_t^x), t \geq 0)$ est un mouvement brownien (non standard) issu de $f(-1) + (f(1) - f(-1))\frac{x+1}{2}$ et de coefficient de volatilité $\frac{|f(1)-f(-1)|}{2}$.

II.1.b On obtient immédiatement que $\tau^x = \min(\tau_1^x, \tau_{-1}^x)$. C'est un temps d'arrêt comme minimum de deux temps d'arrêt. Il est fini p.s. car, d'après le cours, les temps d'atteinte du mouvement brownien sont finis p.s. et les temps τ_1^x et τ_{-1}^x sont ainsi finis p.s.

II.1.c Soit $t \geq 0$ et $x \in [-1,1]$. Le temps $\tau^x \wedge t$ est un temps d'arrêt borné par t, donc par le théorême d'arrêt, on obtient que $\mathbb{E}[u(W^x_{\tau^x \wedge t})] = u(x)$. Puis, en faisant tendre $t \to +\infty$, il vient par le Théorème de convergence dominée ($|u(W^x_{\tau^x \wedge t})| \leq \max_{x\in[-1,1]} |u(x)|$) que $u(x) = \mathbb{E}[f(W^x_{\tau^x})]$.

II.1.d Soit $x \in [-1,1]$. On a $\tau^x = \tau_1^x \mathbf{1}_{\{\tau_1^x \leq \tau_{-1}^x\}} + \tau_{-1}^x \mathbf{1}_{\{\tau_1^x > \tau_{-1}^x\}}$ et donc

$\mathbb{E}[f(W^x_{\tau^x})] = \mathbb{E}[f(W^x_{\tau^x_{-1}})\mathbf{1}_{\{\tau_1^x > \tau_{-1}^x\}} + f(W^x_{\tau^x_1})\mathbf{1}_{\{\tau_1^x \leq \tau_{-1}^x\}}] = f(-1)\mathbb{P}(\tau_1^x > \tau_{-1}^x) + f(1)\mathbb{P}(\tau_1^x \leq \tau_{-1}^x) = f(-1) + (f(1) - f(-1))\mathbb{P}(\tau_1^x \leq \tau_{-1}^x)$.

Par ailleurs, $\mathbb{E}[f(W^x_{\tau^x})] = u(x) = f(-1) + (f(1) - f(-1))\frac{x+1}{2}$. On en déduit en prenant f t.q. $f(1) \neq f(-1)$ que :

$$\mathbb{P}(\tau_1^x \leq \tau_{-1}^x) = \frac{1+x}{2}.$$

II.2.a Clairement, $\max(|x + W_t^1|, |y + W_t^2|) \geq 1 \implies (x + W_t^1)^2 + (y + W_t^2)^2 \geq 1$, donc $\tau^{(x,y)} \leq \tilde{\tau}^{(x,y)}$. Si on note $\tau_a^i = \inf\{t \geq 0, W_t^i = a\}$ pour $i \in \{1,2\}$, on voit que $\tilde{\tau}^{(x,y)} = \min(\tau^1_{1-x}, \tau^1_{-1-x}, \tau^2_{1-y}, \tau^2_{-1-y})$. Et puisque les temps d'atteintes du mouvement brownien unidimensionnel sont fini p.s., il vient que $\tilde{\tau}^{(x,y)} < \infty$ p.s. puis que $\tau^{(x,y)} < \infty$ p.s.

II.2.b Grâce à la continuite p.s. de $W^{(x,y)}$, les égalités suivantes sont vraies (à un ensemble négligeable près) :

$\{\tau^{(x,y)} \leq t\} = \cup_{s\in[0,t]}\{(x + W_s^1)^2 + (y + W_s^2)^2 \geq 1\}$
$= \cap_{n\in\mathbb{N}^*} \cup_{s\in[0,t]} \{(x + W_s^1)^2 + (y + W_s^2)^2 > 1 - 1/n\}$
$= \cap_{n\in\mathbb{N}^*} \cup_{s\in[0,t]\cap\mathbb{Q}} \{(x + W_s^1)^2 + (y + W_s^2)^2 > 1 - 1/n\} \in \mathcal{F}_t$

II.2.c

Comme u résout l'EDP sur $\mathcal{D}$ et que pour $s \leq \tau^{(x,y)}$, $W_s^{(x,y)} \in \mathcal{D}$, on a que

$$\mathbf{1}_{\{s\leq\tau^{(x,y)}\}} \left(\partial^2_{xx} u(W_s^{(x,y)}) + \partial^2_{yy} u(W_s^{(x,y)})\right) = 0,$$

et donc

$$u(W^{(x,y)}_{\tau^{(x,y)}\wedge t}) \quad = \quad u(x,y) + \int_0^t \mathbf{1}_{\{s\le\tau^{(x,y)}\}}\partial_x u(W^{(x,y)}_s)dW^1_s + \int_0^t \mathbf{1}_{\{s\le\tau^{(x,y)}\}}\partial_y u(W^{(x,y)}_s)dW^2_s.$$

Comme $\tau^{(x,y)}$ est un temps d'arrêt, $\{t \le \tau^{(x,y)}\} \in \mathcal{F}_t$, et $\mathbf{1}_{\{t\le\tau^{(x,y)}\}}\partial_x u(W^{(x,y)}_t)$ est une v.a. $\mathcal{F}_t$ mesurable. Donc $(\mathbf{1}_{\{t\le\tau^{(x,y)}\}}\partial_x u(W^{(x,y)}_t), t \ge 0)$ est $(\mathcal{F}_t)$-adaptés. Il en est de même pour $(\mathbf{1}_{\{t\le\tau^{(x,y)}\}}\partial_y u(W^{(x,y)}_t), t \ge 0)$. Comme $\partial_x u(x,y)$ est une fonction continue sur $\bar{\mathcal{D}}$ et que $\bar{\mathcal{D}}$ est compact, elle est bornée et $(\mathbf{1}_{\{t\le\tau^{(x,y)}\}}\partial_x u(W^{(x,y)}_t), t \ge 0)$ est donc borné. L'argument est analogue pour $(\mathbf{1}_{\{t\le\tau^{(x,y)}\}}\partial_y u(W^{(x,y)}_t), t \ge 0)$. Par conséquent, il vient d'après le cours que ces deux processus sont des martingales, et donc on obtient grâce au théorème d'arrêt :

$$\mathbb{E}[u(W^{(x,y)}_{\tau^{(x,y)}\wedge t})] = u(x,y).$$

Comme u est continue sur $\bar{\mathcal{D}}$, elle est bornée et le théorème de convergence dominée assure que $u(x,y) = \mathbb{E}[f(W^{(x,y)}_{\tau^{(x,y)}})]$, en faisant $t \to +\infty$.

II.3 En suivant la méthode donnée dans le cours on peut simuler pour un pas de temps Δt fixé les valeurs de $(W^1_{n\Delta t}, W^2_{n\Delta t}, n \in \mathbb{N})$ et définir l'approximation de $\tau^{(x,y)}$ suivante :

$$\hat{\tau}^{(x,y)}_{\Delta t} = \inf\{n\Delta t, (W^1_{n\Delta t} + x)^2 + (W^2_{n\Delta t} + y)^2 \ge 1\}.$$

Lorsque $\Delta t \to 0$, il s'agit d'une bonne approximation de $\tau^{(x,y)}$, et on peut montrer grâce à la continuité des trajectoires que $\hat{\tau}^{(x,y)}_{\Delta t} \to \hat{\tau}^{(x,y)}$. On approxime alors $u(x,y) \approx \mathbb{E}[f(W^{(x,y)}_{\hat{\tau}^{(x,y)}_{\Delta t}})]$ et calculer cette espérance par méthode de Monte-Carlo.

Exercice 1 : Equations différentielles ordinaires à coefficients périodiques

1. D'après le théorème de Cauchy vu en cours, il existe une unique solution au problème (1) de classe $\mathcal{C}^1$ et définie pour tout temps $t \in \mathbb{R}$. La solution n'est pas nécessairement périodique : il suffit de considérer le cas où $A(t)$ est constant pour s'en convaincre. Dans le cas $d = 1$, on a :

$$x(t) = x_0 \exp\left(\int_{t_0}^t A(s)\,ds\right)$$

où A est ici à valeurs dans $\mathbb{R}$. Noter que quitte à faire un changement de variable $t \mapsto t - t_0$, on peut supposer $t_0 = 0$. La solution $x(t)$ reste bornée pour $t \in \mathbb{R}$ et pour toute condition initiale x_0 si et seulement si $\int_0^t A(s)\,ds$ reste bornée pour $t \in \mathbb{R}$. On vérifie facilement que pour $t \in [nT, (n+1)T)$ (où n est un entier),

$$\int_0^t A(s)\,ds = n\int_0^T A(s)\,ds + \int_{nT}^t A(s)\,ds.$$

On en déduit que $\|x\|_{L^\infty(\mathbb{R})} < \infty$ si et seulement si $\int_0^T A(s)\,ds = 0$. En effet, si $\int_0^T A(s)\,ds > 0$ (resp. si $\int_0^T A(s)\,ds < 0$), $|x(t)|$ tend vers $+\infty$ quand $t \to +\infty$ (resp. quand $t \to -\infty$).

2. Il est clair que l'application qui à x_0 associe $x(t)$ (pour t fixé) est une application linéaire, et on peut donc écrire $x(t) = R(t_0, t)x_0$ où $R(t_0, t)$ est une matrice de $\mathbb{R}^{d\times d}$. En dérivant la relation $x(t) = R(t_0, t)x_0$ par rapport au temps, on obtient l'équation satisfaite par R :

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}R(t_0, t) = A(t)R(t_0, t), \ \forall t \in \mathbb{R}, \\ R(t_0, t_0) = \mathrm{Id}. \end{cases} \tag{1}$$

Tout ceci est dans le cours, Section 2.1.1. La relation de flot (cf. cours Définition 1 p. 12) montre que $R(s, t)R(t_0, s) = R(t_0, t)$. Le flot est une application bijective (car inversible) et donc $\det(R(t_0, t)) \neq 0$. Comme l'application $t \mapsto R(t_0, t)$ est continue et vaut 1 en $t = t_0$, on en déduit qu'elle reste positive pour tout temps.

Enfin, si on pose $S(t_0, t) = R(t_0 + T, t + T)$, on a $S(t_0, t_0) = \mathrm{Id}$ et

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}S(t_0, t) &= \frac{d}{dt}R(t_0 + T, t + T) \\ &= A(t + T)R(t_0 + T, t + T) \\ &= A(t)R(t_0 + T, t + T) \\ &= A(t)S(t_0, t). \end{aligned}$$

Par unicité de la solution à (1), on en déduit que $S(t_0, t) = R(t_0, t)$.

3. On a $M(t_0 + T) = R(t_0 + T, t_0 + 2T) = R(t_0, t_0 + T) = M(t_0)$ en utilisant le dernier résultat de la question précédente. Ensuite, on remarque en utilisant la relation de flot :

$$\begin{aligned} R(t_0, t_0 + nT) &= R(t_0 + (n-1)T, t_0 + nT)R(t_0, t_0 + (n-1)T) \\ &= R(t_0, t_0 + T)R(t_0, t_0 + (n-1)T) \\ &= M(t_0)R(t_0, t_0 + (n-1)T), \end{aligned}$$

et donc, par récurrence, on a bien $R(t_0, t_0 + nT) = M(t_0)^n$.

4. On a

$$\begin{aligned} P(t_0, t + T) &= R(t_0, t + T) \exp(-(t + T - t_0)Q(t_0)) \\ &= R(t_0 + T, t + T)R(t_0, t_0 + T) \exp(-TQ(t_0)) \exp(-(t - t_0)Q(t_0)) \\ &= R(t_0, t)M(t_0)M(t_0)^{-1} \exp(-(t - t_0)Q(t_0)) \\ &= R(t_0, t) \exp(-(t - t_0)Q(t_0)) \\ &= P(t_0, t). \end{aligned}$$

On a alors

$$\begin{aligned} y(t) &= P(t_0, t)^{-1}x(t) \\ &= P(t_0, t)^{-1}R(t_0, t)x_0 \\ &= P(t_0, t)^{-1}P(t_0, t) \exp((t - t_0)Q(t_0))x_0 \\ &= \exp((t - t_0)Q(t_0))x_0. \end{aligned}$$

Autrement dit (cf. cours Section 2.1.2), $y(t)$ est solution de l'équation différentielle ordinaire à coefficients constants :

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt}(t) = Q(t_0)y(t), \ \forall t \in \mathbb{R}, \\ y(t_0) = x_0, \end{cases} \tag{2}$$

Remarquer que puisque $x(t) = P(t_0, t)y(t)$ et $t \mapsto P(t_0, t)$ est périodique, x est borné si et seulement si y est borné. Par ailleurs nous avons vu en cours (Section 3.2) que les solutions de (2) restent bornées pour tout temps $t \in \mathbb{R}$ si et seulement si les parties réelles des valeurs propres de $Q(t_0)$ sont nulles, et la matrice $Q(t_0)$ est diagonalisable (cf. Théorème 5 et Exercice 20). Donc $\|x\|_{L^\infty(\mathbb{R})} < \infty$ si et seulement si les parties réelles des valeurs propres de $Q(t_0)$ sont nulles, et la matrice $Q(t_0)$ est diagonalisable.

5. On sait que la matrice $Q(t_0)$ peut se mettre sous la forme d'une matrice triangulaire supérieure (appelons-là U), avec sur la diagonale les éléments du spectre de $Q(t_0)$, quitte à changer de base : $Q(t_0) = P^{-1}UP$. On a alors $\exp(Q(t_0)) = P^{-1}\exp(U)P$. On vérifie facilement que $\exp(U)$ est une matrice triangulaire supérieure, avec sur la diagonale les exponentielles des éléments diagonaux de U (cf. la preuve du Théorème 5 du cours). Ceci montre que le spectre de $M(t_0)$ est constitué des exponentielles de T fois les éléments du spectre de $Q(t_0)$.

6. Si A est diagonalisable, elle s'écrit $A = P^{-1}DP$ avec D diagonale et P inversible et donc $\exp(A) = \exp(P^{-1}DP) = P^{-1}\exp(D)P$ ce qui montre que $\exp(A)$ est diagonalisable. Réciproquement, si A n'est pas diagonalisable, alors sa décomposition de Jordan contient un bloc de la forme

$$\begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0\dots \\ 0 & \ddots & \ddots \\ 0 & \dots & \lambda \end{bmatrix}$$

et donc $\exp(A)$ contient un bloc (stable) de la forme

$$\exp(\lambda)\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1/2\dots \\ 0 & \ddots & \ddots \\ 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

ce qui implique que $\exp(A)$ n'est pas diagonalisable.

Par conséquent, $Q(t_0)$ diagonalisable est équivalent à $M(t_0) = \exp(TQ(t_0))$ diagonalisable. Et les parties réelles des valeurs propres de $Q(t_0)$ sont nulles si et seulement si le module des valeurs propres de $M(t_0) = \exp(TQ(t_0))$ vaut un puisque pour un nombre complexe z,

$$\mathrm{Re}(z) = 0 \iff |\exp(z)| = 1.$$

Ces deux propriétés ne dépendent que de la matrice $M(t_0)$, et pas du choix de la matrice logarithme $Q(t_0)$.

7. On peut en effet se demander pourquoi ce sont les propriétés de la matrice $M(t_0)$ (ou $Q(t_0)$) qui importent, puisque t_0 est choisi de manière arbitraire. Noter que pour deux

temps t_0 et t_1, on a :

$$\begin{aligned}M(t_1) &= R(t_1, t_1+T)\\ &= R(t_0+T, t_1+T)R(t_0, t_0+T)R(t_1, t_0)\\ &= R(t_0, t_1)M(t_0)R(t_0, t_1)^{-1}.\end{aligned}$$

Ceci implique que $M(t_1)$ est diagonalisable si et seulement si $M(t_0)$ est diagonalisable, et que $\mathrm{Sp}(M(t_0)) = \mathrm{Sp}(M(t_1))$. Donc les propriétés sur $M(t_0)$ (ou $Q(t_0)$) permettant de montrer la stabilité des solutions (*i.e.* $\|x\|_{L^\infty(\mathbb{R})} < \infty$) ne dépendent pas du choix de t_0.

8. Il suffit de prendre $x(t) = \left(z(t), \frac{dz}{dt}(t)\right)$ et $A(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -q(t) & 0 \end{bmatrix}$. Dans ce cas, on a donc $d = 2$.

9. On sait que $\det R(t_0, t) = \exp\left(\int_{t_0}^t \mathrm{tr}(A(s))\, ds\right)$ (c'est la formule de Liouville, cf. Exercice 3 p. 8). Or, ici, $\mathrm{tr}(A(s)) = 0$, donc $\det(R(t_0, t)) = 1$ ce qui implique que $\det(M(t_0)) = 1$. Par conséquent, les valeurs propres de $M(t_0)$ sont solution du polynôme caractéristique :

$$\lambda^2 - 2\delta\lambda + 1 = 0$$

où $\delta = \frac{\mathrm{tr}(M(t_0))}{2}$. On a donc trois cas :
– si $|\delta| > 1$, $M(t_0)$ admet deux valeurs propres réelles $\lambda^\pm = \delta \pm \sqrt{\delta^2 - 1}$.
– si $|\delta| < 1$, $M(t_0)$ admet deux valeurs propres complexes conjuguées $\lambda^\pm = \delta \pm i\sqrt{1 - \delta^2}$.
– si $|\delta| = 1$, $M(t_0)$ admet une seule valeur propre réelle : $\lambda = \delta$.

10. Si $|\delta| \neq 1$, $M(t_0)$ admet deux valeurs propres distinctes et est donc diagonalisable.

Dans le cas $|\delta| > 1$, les valeurs propres de $M(t_0)$ sont réelles. Elles satisfont $\lambda^+\lambda^- = 1$ et $\lambda^+ \neq \lambda^-$. Donc, nécessairement, $|\lambda^+| \neq 1$ et $|\lambda^-| \neq 1$ ce qui implique que $(z(t))_{t\in\mathbb{R}}$ n'est pas borné (d'après la Question 6).

Dans le cas $|\delta| < 1$, les valeurs propres de $M(t_0)$ sont complexes conjuguées, et on vérifie qu'elles sont de module égal à 1. Par conséquent, d'après la Question 6, $\|z\|_{L^\infty(\mathbb{R})} < \infty$.

Dans le cas $|\delta| = 1$, $M(t_0)$ admet une seule valeur propre réelle de module 1. Par conséquent, $\|z\|_{L^\infty(\mathbb{R})} < \infty$ si et seulement si $M(t_0)$ est diagonalisable.

Exercice 2 Etude d'une marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$ non symétrique

1 Soient $n \in \mathbb{N}$, $x_0, \ldots, x_n \in \mathbb{Z}$. On a, en utilisant le fait que les ξ sont i.i.d :

$\mathbb{P}(X_0 = x_0, \ldots, \tilde{X}_n^x = x_n) = \mathbb{P}(x = x_0, \xi_1 = x_1 - x_0, \ldots, \xi_n = x_n - x_{n-1})$
$= \mathbf{1}_{\{x=x_0\}}P(x_0, x_1)\ldots P(x_{n-1}, x_n)$, où $P(x, y) = p\mathbf{1}_{\{y=x+2\}} + (1-p)\mathbf{1}_{\{y=x-3\}}$.

2 Il est clair que $\tilde{X}_n^x$ est intégrable pour tout $n \in \mathbb{N}$. On a $\mathbb{E}[\tilde{X}_{n+1}^x|\tilde{\mathcal{F}}_n] = \tilde{X}_n^x + \mathbb{E}[\xi_{n+1}] = \tilde{X}_n^x + 2p - 3(1-p)$. Par conséquent, $(\tilde{X}_n^x, n \in \mathbb{N})$ est une martingale ssi $p = 3/5$.

3. Soit $n \in \mathbb{N}$, $\{\tilde{\tau}_{\geq a} \leq n\} = \cup_{i=0}^{k}\{\tilde{X}_k^0 \geq a\}$ appartient à $\tilde{\mathcal{F}}_n$ puisque pour $k \leq n$, $\{\tilde{X}_k^0 \geq a\} \in \tilde{\mathcal{F}}_k \subset \tilde{\mathcal{F}}_n$.

Le processus $(\exp[\lambda \tilde{X}_n^0 - n\psi(\lambda)], n \in \mathbb{N})$ est simplement la martingale exponentielle (cf. cours) associée à la maringale $(\lambda \tilde{X}_n^0, n \in \mathbb{N})$. En utilisant le théorème d'arrêt ($\tilde{\tau}_{\geq a} \wedge n$ est un temps d'arrêt borné par n), on obtient

$$\mathbb{E}[\exp[\lambda \tilde{X}^0_{\tilde{\tau}_{\geq a}\wedge n} - (\tilde{\tau}_{\geq a} \wedge n)\psi(\lambda)]] = 1.$$

Ensuite ψ étant une fonction positive, on a la domination suivante $\exp[\lambda \tilde{X}^0_{\tilde{\tau}_{\geq a}\wedge n} - (\tilde{\tau}_{\geq a} \wedge n)\psi(\lambda)] \leq \exp(\lambda(a+1))$ puisque $\lambda \geq 0$ et $\tilde{X}^0_{\tilde{\tau}_{\geq a}\wedge n} \leq a+1$. Par ailleurs, $\exp[\lambda \tilde{X}^0_{\tilde{\tau}_{\geq a}\wedge n} - (\tilde{\tau}_{\geq a} \wedge n)\psi(\lambda)]$ tend p.s. lorsque $n \to +\infty$ vers $\exp[\lambda \tilde{X}^0_{\tilde{\tau}_{\geq a}} - \tilde{\tau}_{\geq a}\psi(\lambda)]\mathbf{1}_{\{\tilde{\tau}_{\geq a} < +\infty\}}$ et on obtient par convergence dominée le résultat annoncé.

Par ailleurs, puisque $\tilde{X}_n^0$ ne croît que en augmentant de deux unités, $\{\tilde{\tau}_{\geq a} = n\} = \cap_{k=0}^{n-2}\{\tilde{X}_k^0 < a\} \cap (\{X_{n-1} = a-2, X_n = a\} \cup \{X_{n-1} = a-1, X_n = a+1\})$. En particulier $\tilde{X}^0_{\tilde{\tau}_{\geq a}}\mathbf{1}_{\{\tilde{\tau}_{\geq a} < +\infty\}} = \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{X}_n^0 \mathbf{1}_{\{\tilde{\tau}_{\geq a} = n\}} \in \{a, a+1\}$. On obtient donc :

$$\exp(\lambda(a+1))\mathbb{E}[\exp[-\tilde{\tau}_{\geq a}\psi(\lambda)]\mathbf{1}_{\{\tilde{\tau}_{\geq a}<+\infty\}}] \geq 1 \geq \exp(\lambda a)\mathbb{E}[\exp[-\tilde{\tau}_{\geq a}\psi(\lambda)]\mathbf{1}_{\{\tilde{\tau}_{\geq a}<+\infty\}}],$$

puis

$$\exp(-\lambda(a+1)) \leq \mathbb{E}[\exp[-\tilde{\tau}_{\geq a}\psi(\lambda)]\mathbf{1}_{\{\tilde{\tau}_{\geq a}<+\infty\}}] \leq \exp(-\lambda a).$$

En faisant tendre $\lambda \to 0$, il vient que $\mathbb{P}(\tilde{\tau}_{\geq a} < +\infty) = 1$ par convergence dominée.

Pour $\lambda > 0, \psi'(\lambda) = \frac{6(e^{2\lambda} - e^{-3\lambda})}{2e^{-3\lambda} + 3e^{2\lambda}} > 0$. Par ailleurs, $\psi'(0) = 0$ et donc $(\psi^{-1})'(y) \underset{y \to 0^+}{\to} +\infty$. On a donc pour $y > 0$, $\mathbb{E}[\exp[\psi^{-1}(y)\tilde{X}^0_{\tilde{\tau}_{\geq a}} - y\tilde{\tau}_{\geq a}]] = 1$.

$\frac{\partial}{\partial y}\exp[\psi^{-1}(y)\tilde{X}^0_{\tilde{\tau}_{\geq a}} - y\tilde{\tau}_{\geq a}] = \left(\psi^{-1}(y)\tilde{X}^0_{\tilde{\tau}_{\geq a}} - \tilde{\tau}_{\geq a}\right)\exp[\psi^{-1}(y)\tilde{X}^0_{\tilde{\tau}_{\geq a}} - y\tilde{\tau}_{\geq a}]$, et puisque ψ^{-1} est croissante, on a pour $z \in [y-\varepsilon, y+\varepsilon] \subset \mathbb{R}_+^*$,

$$|\frac{\partial}{\partial y}\exp[\psi^{-1}(y)\tilde{X}^0_{\tilde{\tau}_{\geq a}} - y\tilde{\tau}_{\geq a}]\Big|_{y=z}| \leq \left[(a+1)\psi^{-1}(y+\varepsilon) + \frac{e^{-1}}{y-\varepsilon}\right]\exp[(a+1)\psi^{-1}(y+\varepsilon)].$$

(On utilise ici que $\max_{x\in\mathbb{R}} xe^{-yx} = e^{-1}/y$). Grâce au théorème de convergence dominée, on peut dériver sous l'espérance et on obtient

$$\mathbb{E}[\tilde{\tau}_{\geq a}\exp[\psi^{-1}(y)\tilde{X}^0_{\tilde{\tau}_{\geq a}} - y\tilde{\tau}_{\geq a}]] = (\psi^{-1})'(y)\mathbb{E}[\tilde{X}^0_{\tilde{\tau}_{\geq a}}\exp[\psi^{-1}(y)\tilde{X}^0_{\tilde{\tau}_{\geq a}} - y\tilde{\tau}_{\geq a}]].$$

Ensuite, en faisant tendre $y \to 0^+$, on obtient immédiatement par convergence dominée que $\mathbb{E}[\tilde{\tau}_{\geq a}] = +\infty$ en utilisant que $\tilde{X}^0_{\tilde{\tau}_{\geq a}} \geq a$.

On ne peut pas montrer en revanche avec la même manière que $\tilde{\tau}_a = \inf\{n \in \mathbb{N}^*, \tilde{X}_n^0 = a\}$ est fini p.s., car on ne peut pas majorer $\tilde{X}^0_{\tilde{\tau}_a}$ et appliquer le théorème de convergence dominée comme pour $\tilde{\tau}_{\geq a}$.

4 La chaîne étant irréductible on sait qu'elle est soit récurrente, soit transiente. Dans le premier cas, par une proposition du cours, on a que $\forall x, y \in \mathbb{Z}, \mathbb{P}_x(N_y = +\infty) = 1$.

Dans le second cas, on sait que pour tout $y \in \mathbb{Z}$, N_y suit une loi géométrique sous $\mathbb{P}_y$, et par conséquent $\mathbb{P}_y(N_y = +\infty) = 0$. En appliquant la propriété de Markov forte, il vient $\mathbb{P}_x(N_y = +\infty) = \mathbb{P}_x(\tau_y < \infty, N_y = +\infty) = \mathbb{P}_x(\tau_y < \infty)\mathbb{P}_y(N_y = +\infty) = 0$ (ici τ_y désigne le premier temps d'atteinte de y).

5 Sous $\mathbb{P}_x$, la loi de $(X_n, n \in \mathbb{N})$ est la même que celle de $(\tilde{X}_n^x, n \in \mathbb{N})$. Par conséquent, pour $x < a$ (resp. $(x > a)$), $\mathbb{P}_x(\tau_{\geq a} < +\infty) = \mathbb{P}(\inf\{n \in \mathbb{N}^*, \tilde{X}_n^x = a\} < +\infty) = \mathbb{P}(\inf\{n \in \mathbb{N}^*, \tilde{X}_n^0 = a - x\} < +\infty) = 1$ d'après la question 3. De même, si $x > a$, $\mathbb{P}_x(\tau_{\leq a} < +\infty) = \mathbb{P}(\tilde{\tau}_{\leq x-a} < +\infty) = 1$.

6 D'après la question précédente, σ^1 est un temps d'arrêt fini p.s. D'après la propriété de Markov forte, $(X_{\sigma^1+n}, n \in \mathbb{N})$ est une chaîne de Markov de loi initiale X_{σ_1} et de matrice de transition P. $\sigma^2 - \sigma^1$ est le premier temps de passage de cette chaîne sous le niveau $-a$. En conditionnant selon les valeurs prises par X_{σ^1}, on obtient que : $\mathbb{P}_0(\inf\{n \in \mathbb{N}, X_{\sigma^1+n} \leq -a < \infty\}) = \mathbb{P}_0(X_{\sigma^1} = a)\mathbb{P}_a(\tau_{\leq -a} < \infty) + \mathbb{P}_0(X_{\sigma^1} = a+1)\mathbb{P}_{a+1}(\tau_{\leq -a} < \infty) = 1$. Par conséquent il vient que $\sigma^2 - \sigma^1$ est fini p.s. et donc $\mathbb{P}_0(\sigma^2 < \infty) = 1$. De la même manière, $(X_{\sigma^2+n}, n \in \mathbb{N})$ est une chaîne de Markov de loi initiale X_{σ_2} et de matrice de transition P, $\sigma^3 - \sigma^2$ est son premier temps de passage au dessus de a, et en conditionnant selon les trois valeurs possibles prises par X_{σ_2}, on obtient que $\mathbb{P}_0(\sigma^3 < \infty) = 1$. Ainsi, par récurrence, on montre que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}_0(\sigma^n < \infty) = 1$. En particulier, comme $N_a + N_{a+1} \geq \sup\{n \in \mathbb{N}, \sigma^{2n} < \infty\}$, il vient que que $\mathbb{P}_0(N_a + N_{a+1} = +\infty) = 1$.

7 D'après la question 4, soit la chaîne est récurrente et on a $\mathbb{P}_0(N_a + N_{a+1} = +\infty) = 1$, soit elle est transiente et on a $\mathbb{P}_0(N_a + N_{a+1} = +\infty) = 0$. On se trouve donc ici dans le premier cas, et donc $\mathbb{P}_0(N_a = +\infty) = 1$. Puisque $\tilde{\tau}_{\geq a} = \min(\tilde{\tau}_a, \tilde{\tau}_{a+1})$, on a que $\mathbb{E}[\tilde{\tau}_a] = +\infty$ et la chaîne est récurrente nulle. On a en particulier $\mathbb{P}(\tilde{\tau}_a < \infty) = 0$.