Examen du cours MOPSI

13 février 2014, 08h30-12h00.

Les notes de cours (notes manuscrites et polycopiés) sont autorisées.

Important : L'examen comporte deux parties indépendantes, une "Probabilités", l'autre "Analyse numérique". Nous vous demandons de rédiger les réponses sur deux copies distinctes.

Partie "Probabilités"

Exercice 1.

Soit $N \geq 2$ un entier. On considère une chaîne de Markov $(X_n, n \in \mathbb{N})$ à valeurs dans $\mathcal{E}_N = \{0, \ldots, N\}$ de matrice de transition

$$\forall x \in \mathcal{E}_N,\ P(x, x+1) = P(x, x-1) = \frac{x(N-x)}{N(N-1)},\ P(x,x) = 1 - 2\frac{x(N-x)}{N(N-1)}.$$

On note $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la filtration engendrée par $(X_n, n \in \mathbb{N})$.

Comme dans le cours, nous notons $\mathbb{P}_x$ la loi de probabilité de cette chaîne de Markov lorsque $X_0 = x$, i.e. pour $x_0, \ldots, x_n \in \mathcal{E}_N$,

$$\mathbb{P}_x(X_0 = x_0, \ldots, X_n = x_n) = \mathbf{1}_{x=x_0} P(x_0, x_1) \ldots P(x_{n-1}, x_n).$$

I.1 Vérifier que $\mu_0(x) = \mathbf{1}_{x=0}$ et $\mu_N(x) = \mathbf{1}_{x=N}$ sont deux mesures invariantes.

I.2 On définit $\tau_0 = \inf\{n \in \mathbb{N}, X_n = 0\}$ (convention $\inf \emptyset = +\infty$), $\tau_N = \inf\{n \in \mathbb{N}, X_n = N\}$ et $\tau_{0,N} = \min(\tau_0, \tau_N)$. Vérifier que ce sont des temps d'arrêt par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

I.3 On pose $p(x) = \mathbb{P}_x(\tau_{0,N} = \tau_N)$ pour $x \in \mathcal{E}_N$. Montrer que $p(0) = 0$, $p(N) = 1$, et que

$$0 < x < N, p(x) = P(x, x+1)p(x+1) + P(x, x-1)p(x-1) + P(x,x)p(x).$$

En déduire que pour $0 < x < N$, $p(x) - p(x-1) = p(x+1) - p(x)$, puis donner la valeur de $p(x)$, pour $x \in \mathcal{E}_N$.

I.4 On pose $q(x) = \mathbb{P}_x(\tau_{0,N} = \tau_0)$. Calculer de façon analogue $q(x)$. En observant que $q(x) + p(x) = 1$, montrer que $\mathbb{P}_x(\tau_{0,N} < \infty) = 1$.

I.5 Au cours d'un entretien, un élève de l'école des Ponts s'est vu poser la question suivante. On considère une urne avec 10 boules noires et 20 boules blanches. A chaque étape, on tire successivement deux boules et on change la couleur de la seconde pour qu'elle ait la même couleur que la première, et on remet ensuite les deux boules dans l'urne. Quelle est la probabilité pour qu'à la fin toutes les boules soient noires ?

On se propose de prouver ces mêmes propriétés avec un autre point de vue.

I.6 Montrer que $(X_n, n \in \mathbb{N})$ est une martingale par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Calculer $[X]_n$.

I.7 Montrer que lorsque $X_0 = x$ avec $0 < x < N$, $[X]_{n\wedge\tau_{0,N}} \geq 2\frac{n\wedge\tau_{0,N}}{N}$. En déduire que $\mathbb{E}_x[\tau_{0,N}] < \infty$, puis que $\mathbb{P}_x(\tau_{0,N} < \infty) = 1$.

I.8 Montrer que $\mathbb{E}_x[X_{\tau_{0,N}}] = x$, puis retrouver la valeur de $p(x)$.

Exercice 2 : Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité et $n \in \mathbb{N}^*$. On considère $(X_0, \ldots, X_n)$ un vecteur gaussien centré de matrice de covariance $\Gamma_{i,j} = \mathbb{E}[X_i X_j]$ pour $0 \leq i, j \leq n$. On suppose que $\Gamma_{i,i} > 0$ pour tout $0 \leq i \leq n$, et que $\Gamma_{i,j} = 0$ si $1 \leq i, j \leq n$ et $i \neq j$.

II.1 Vérifier que $X_1, \ldots, X_n$ sont des variables aléatoires indépendantes.

II.2 Trouver $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ tels que $X_0 - \sum_{i=1}^n \alpha_i X_i$ est indépendante du vecteur $(X_1, \ldots, X_n)$. On exprimera les coefficients α_i à l'aide de Γ.

II.3 En déduire la valeur de $\mathbb{E}[X_0 | (X_1, \ldots, X_n)]$, puis donner la loi conditionnelle de X_0 sachant $(X_1, \ldots, X_n)$.

II.4 On considère $(W_t, t \in [0,T])$ un mouvement brownien standard et $h : [0,T] \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $\int_0^T h(s)^2 ds < \infty$. Montrer que

$$X = (\int_0^T h(s) dW_s, W_{T/n}, W_{2T/n} - W_{T/n}, \ldots, W_T - W_{(n-1)T/n})$$

est un vecteur gaussien. Calculer sa matrice de covariance (on pourra observer que $W_{iT/n} - W_{(i-1)T/n} = \int_0^T \mathbf{1}_{(i-1)T/n \leq s \leq iT/n} dW_s$).

II.5 On pose $Z_n = \mathbb{E}[\int_0^T h(s) dW_s | (W_{T/n}, W_{2T/n}, \ldots, W_T)]$. Expliquer pourquoi $Z_n = \mathbb{E}[\int_0^T h(s) dW_s | (W_{T/n}, W_{2T/n} - W_{T/n}, \ldots, W_T - W_{(n-1)T/n})]$, puis calculer Z_n. Montrer ensuite que

$$\mathbb{E}\left[\left(Z_n - \int_0^T h(s) dW_s\right)^2\right] \underset{n\to+\infty}{\to} 0.$$

Interpréter ce résultat.

Partie “Analyse Numérique ”

Problème : méthode *Multiscale finite element* en dimension 1.

On considère le problème suivant sur la fonction $u^\varepsilon : (0,1) \to \mathbb{R}$

$$\begin{cases} -\Big(D^\varepsilon(x)(u^\varepsilon)'(x)\Big)' = f(x), \ x \in (0,1) \\ u^\varepsilon(0) = u^\varepsilon(1) = 0. \end{cases} \tag{15.39}$$

La fonction f est supposée dans $L^2(0,1)$ et ne dépend pas de ε. La fonction D^ε est définie par :

$$D^\varepsilon(x) = D(x/\varepsilon)$$

où D est une fonction régulière non constante, périodique de période 1 et on suppose qu'il existe deux constantes α et β tel que :

$$0 < \alpha \leq D \leq \beta.$$

On introduit un maillage $\{x_0, x_1, \ldots, x_N\}$ de $(0,1)$, avec, pour $i \in \{0, \ldots, N\}$, $x_i = \frac{i}{N}$. On note $H = \frac{1}{N}$.

Première partie : approximation par éléments finis classiques

1 Montrer que le problème (15.39) admet une unique solution $u^\varepsilon \in H_0^1(0,1)$ et que $\|u^\varepsilon\|_{H^1(0,1)}$ est borné indépendamment de ε.

2 Soit $F(x) = \int_0^x f(y)\,dy$. Montrer que pour presque tout $x \in (0,1)$, $-D^\varepsilon(x)(u^\varepsilon)'(x) = F(x) + C^\varepsilon$ avec C^ε tel que

$$\lim_{\varepsilon \to 0} C^\varepsilon = -\int_0^1 F(x)\,dx.$$

Vérifier que

$$(u^\varepsilon)''(x) = -\frac{1}{D^\varepsilon(x)} f(x) + \frac{(D^\varepsilon)'(x)}{(D^\varepsilon)^2(x)}(F(x) + C^\varepsilon).$$

On suppose que f n'est pas la fonction nulle. Comment se comporte $\|(u^\varepsilon)''\|_{L^2(0,1)}$ dans la limite $\varepsilon \to 0$?

3 Soit V_H l'espace des fonctions continues de $[0,1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, nulles au bord, et affines sur chacun des intervalles (x_i, x_{i+1}) $(i = 0, \ldots, N-1)$. L'espace V_H est donc l'espace des éléments finis P1. Soit u_H^ε la solution du problème :

$$\text{Trouver } u_H^\varepsilon \in V_H \text{ tel que } \forall v_H \in V_H,\ a^\varepsilon(u_H^\varepsilon, v_H) = l(v_H) \tag{15.40}$$

avec, pour tout $u, v \in H^1(0,1)$, $a^\varepsilon(u,v) = \int_0^1 D^\varepsilon u'v'$, et pour tout $v \in L^2(0,1)$, $l(v) = \int_0^1 fv$. Montrer que : $\forall v_H \in V_H$,

$$a^\varepsilon(u^\varepsilon - u_H^\varepsilon, v_H) = 0.$$

En déduire que : $\forall v_H \in V_H$,

$$a^\varepsilon(u^\varepsilon - u_H^\varepsilon, u^\varepsilon - u_H^\varepsilon) = a^\varepsilon(u^\varepsilon - u_H^\varepsilon, u^\varepsilon - v_H).$$

En utilisant l'estimée d'interpolation (admise) : pour tout $u \in H^2(0,1) \cap H_0^1(0,1)$,

$$\inf_{v_H \in V_H} \|u - v_H\|_{H^1(0,1)} \leq C_0 H \|u''\|_{L^2(0,1)}$$

en déduire que

$$\|u^\varepsilon - u_H^\varepsilon\|_{H^1} \leq CH \|(u^\varepsilon)''\|_{L^2(0,1)}. \tag{15.41}$$

Comment est-ce que cette borne d'erreur se comporte, à H fixé, quand $\varepsilon \to 0$?

Deuxième partie : approximation par des fonctions tests oscillantes

4 Afin de corriger le mauvais comportement d'une méthode d'éléments finis classique, on propose d'utiliser la base d'approximation

$$V_H^\varepsilon = \Bigg\{ v : [0,1] \to \mathbb{R}, v \text{ continue}, v(0) = v(1) = 0,$$
$$\Big(D^\varepsilon(x) v'(x)\Big)' = 0 \text{ pour } x \in (x_i, x_{i+1}),\ \forall i \in \{0, \ldots, N-1\} \Bigg\}.$$

Montrer que V_H est un espace vectoriel de dimension $N-1$, et proposer une base de V_H^ε. *Indication : on pourra vérifier que les éléments de V_H^ε sont complètement déterminés par leurs valeurs aux noeuds $(x_i)_{1 \leq i \leq N-1}$.*

5 On note

$$W_H = \big\{ v \in H_0^1(0,1),\ v(x_i) = 0, \forall i \in \{1, \ldots, N-1\} \big\}.$$

Montrer que $\forall (u_H, u^0) \in V_H^\varepsilon \times W_H$, $a^\varepsilon(u_H, u^0) = 0$. Montrer que $\forall u \in H_0^1(0,1)$, $\exists! (u_H, u^0) \in V_H^\varepsilon \times W_H$ tel que $u = u_H + u^0$. En résumé, on a donc la relation

$$H_0^1(0,1) = V_H^\varepsilon \oplus^\perp W_H,$$

l'orthogonalité étant pour le produit scalaire défini par a^ε.

6 Vérifier que pour tout H,

$$\forall v \in V_H^0,\ \int_0^1 v^2 \leq H^2 \int_0^1 (v')^2. \tag{15.42}$$

7 On introduit la solution $\tilde{u}_H^\varepsilon$ du problème suivant :

$$\text{Trouver } \tilde{u}_H^\varepsilon \in V_H^\varepsilon \text{ tel que } \forall v_H \in V_H^\varepsilon,\ a^\varepsilon(\tilde{u}_H^\varepsilon, v_H) = l(v_H). \tag{15.43}$$

Pourquoi ce problème admet-il une unique solution ? Montrer que $u^\varepsilon - \tilde{u}^\varepsilon_H \in W_H$. En déduire que
$$\forall i \in \{0,\dots,N\},\ \tilde{u}^\varepsilon_H(x_i) = u^\varepsilon(x_i).$$

8 On note $\eta_H = u^\varepsilon - \tilde{u}^\varepsilon_H$. On rappelle que $\eta_H \in W_H$. Montrer que
$$-\Big(D^\varepsilon(x)(\eta_H)'(x)\Big)' = f(x) \text{ pour } x \in (x_i, x_{i+1}),\ \forall i \in \{0,\dots,N-1\}.$$
En déduire que
$$\int_0^1 D^\varepsilon |(\eta_H)'|^2 \le \|f\|_{L^2(0,1)} \|\eta_H\|_{L^2(0,1)}.$$
En utilisant (15.42), en déduire l'estimée :
$$\|u^\varepsilon - \tilde{u}^\varepsilon_H\|_{H^1} \le \bar{C} H \|f\|_{L^2(0,1)}.$$
Comparer à (15.41) et commenter.

Troisième partie : approximation par la méthode *Multiscale finite element*

9 En pratique, on utilise une approximation de l'espace V^ε_H. On suppose qu'on dispose d'un maillage uniforme de $(0,1)$ de pas $h \ll H$ avec H/h un entier. On introduit une approximation de V^ε_H :
$$V^\varepsilon_{H,h} = \big\{v \in V_h, a^\varepsilon(v,\varphi) = 0,\ \forall \varphi \in V_h \text{ tel que } \varphi(x_i) = 0,\ \forall i \in \{1,\dots,N-1\}\big\}.$$
On rappelle que V_h désigne l'espace d'éléments finis P1 sur un maillage uniforme de pas h avec conditions aux limites de Dirichlet homogènes (cf. question 3). Montrer que $V^\varepsilon_{H,h}$ est un espace vectoriel de dimension $N-1$ et proposer une base de $V^\varepsilon_{H,h}$.

10 On note
$$W_{H,h} = \big\{v \in V_h,\ v(x_i) = 0, \forall i \in \{1,\dots,N-1\}\big\}.$$
En s'inspirant de la question 5, montrer que
$$V_h = V^\varepsilon_{H,h} \oplus^\perp W_{H,h}.$$
Donner les dimensions de chacun de ces espaces.

11 On note u^ε_h la solution du problème (15.40) sur le maillage fin (donc avec $V_H = V_h$) et $u^\varepsilon_{H,h}$ la solution du problème :
$$\text{Trouver } u^\varepsilon_{H,h} \in V^\varepsilon_{H,h} \text{ tel que } \forall v_H \in V^\varepsilon_{H,h},\ a^\varepsilon(u^\varepsilon_{H,h}, v_H) = l(v_H). \tag{15.44}$$
Soit $\eta_{H,h} = u^\varepsilon_h - u^\varepsilon_{H,h}$. Vérifier que $\eta_{H,h} \in W_{H,h} \subset W_h$. Justifier la suite d'égalités :
$$a^\varepsilon(\eta_{H,h}, \eta_{H,h}) = a^\varepsilon(u^\varepsilon_h, \eta_{H,h}) = a^\varepsilon(u^\varepsilon, \eta_{H,h}) = a^\varepsilon(\eta_h, \eta_{H,h})$$

où η_h est défini à la question 8 (prendre $H = h$). En déduire que

$$\|\eta_{H,h}\|_{H^1(0,1)} \leq \tilde{C} H \|f\|_{L^2(0,1)}.$$

12 Montrer finalement que

$$\|u^\varepsilon - u^\varepsilon_{H,h}\|_{H^1(0,1)} \leq \tilde{C} H \|f\|_{L^2(0,1)} + \inf_{v_h \in V_h} \|u^\varepsilon - v_h\|_{H^1(0,1)}.$$

Que peut-on en conclure ? Discuter l'intérêt pratique de cette méthode.