Examen du cours MOPSI

13 février 2014, 08h30-12h00.

Les notes de cours (notes manuscrites et polycopiés) sont autorisées.

Partie "Probabilités"

Exercice 1.

I.1 On a $\mu_0 P(x) = \sum_{z\in\mathcal{E}_N} \mu_0(z)P(z,x) = P(0,x) = \mathbf{1}_{x=0}$ et de même $\mu_N P(x) = P(N,x) = \mathbf{1}_{x=N}$.

I.2 En écrivant que $\{\tau_0 \leq n\} = \cup_{i=1}^n \{X_i = 0\}$ et $\{\tau_N \leq n\} = \cup_{i=1}^n \{X_i = N\}$, on voit que ce sont des événements $\mathcal{F}_n$-mesurables, et τ_0 et τ_N sont donc deux temps d'arrêt. Ensuite, $\tau_{0,N}$ est un temps d'arrêt comme minimum de deux temps d'arrêt.

I.3 Si $x = 0$, on a $X_0 = 0$ et donc $X_n = 0$ pour tout $n \geq 0$. On a donc $\tau_0 = \tau_{0,N} = 0$ et $\tau_N = +\infty$, et donc $p(0) = 0$. De même Si $x = N$, on a $X_n = N$ pour tout $n \geq 0$. On en déduit que $\tau_N = \tau_{0,N} = 0$ et $p(N) = 1$.

On applique la propriété de Markov : lorsque $X_0 = x$, $(X_{n+1}, n \in \mathbb{N})$ est une chaîne de Markov de matrice de transition P et de loi initiale $\mu(y) = P(x,y)$. Soit $0 < x < N$. On pose $\tilde{\tau}_0 = \inf\{n \in \mathbb{N}, X_{n+1} = 0\}$, $\tilde{\tau}_N = \inf\{n \in \mathbb{N}, X_{n+1} = N\}$ et $\tilde{\tau}_{0,N} = \min(\tilde{\tau}_0, \tilde{\tau}_N)$. Comme $0 < x < N$, on a $\tau_N = \tilde{\tau}_N + 1$ et $\tilde{\tau}_{0,N} = \tau_{0,N} + 1$, ce qui donne

$$p(x) = \mathbb{P}_x(\tilde{\tau}_N = \tilde{\tau}_{0,N}) = P(x,x+1)p(x+1) + P(x,x-1)p(x-1) + P(x,x)p(x).$$

Comme $P(x,x) = 1 - P(x,x+1) - P(x,x-1)$ et $P(x,x+1) = P(x,x-1)$, on obtient que $p(x) - p(x-1) = p(x+1) - p(x)$. Cela donne avec les conditions limites $p(0) = 0$ et $p(N) = 1$ que

$$\forall x \in \mathcal{E}_N,\ p(x) = x/N.$$

I.4 Avec le même raisonnement, on obtient que $q(0) = 1$, $q(N) = 0$, et pour $0 < x < N$, $q(x) = P(x,x+1)q(x+1) + q(x,x-1)p(x-1) + P(x,x)q(x)$ ce qui donne à nouveau $q(x) - q(x-1) = q(x+1) - q(x)$ puis $q(x) = 1 - x/N$. On a bien $p(x) + q(x) = 1$. Comme on a $p(x) = \mathbb{P}_x(\tau_{0,N} = \tau_N < \infty) + \mathbb{P}_x(\tau_0 = \tau_N = \infty)$ et $q(x) = \mathbb{P}_x(\tau_{0,N} = \tau_0 < \infty) + \mathbb{P}_x(\tau_0 = \tau_N = \infty)$, on en déduit

$$1 = \mathbb{P}_x(\tau_{0,N} = \tau_N < \infty) + 2\mathbb{P}_x(\tau_0 = \tau_N = \infty) + \mathbb{P}_x(\tau_{0,N} = \tau_0 < \infty).$$

Par ailleurs, Ω est l'union disjointe des trois événements suivants $\{\tau_{0,N} = \tau_N < \infty\}$, $\{\tau_0 = \tau_N = \infty\}$ et $\{\tau_{0,N} = \tau_0 < \infty\}$, ce qui donne

$$1 = \mathbb{P}_x(\tau_{0,N} = \tau_N < \infty) + \mathbb{P}_x(\tau_0 = \tau_N = \infty) + \mathbb{P}_x(\tau_{0,N} = \tau_0 < \infty),$$

et donc $\mathbb{P}_x(\tau_0 = \tau_N = \infty) = 0$.

I.5 Soit X_n le nombre de boules noires après n étapes et $N = 30$ le nombre total de boules. On observe que X est une chaîne de Markov de matrice de transition P, et que la probabilité demandée est $p(10) = 1/3$.

I.6 Par la propriété de Markov, on a $\mathbb{E}[X_{n+1}|\mathcal{F}_n] = \mathbb{E}[X_{n+1}|X_n] = P(X_n, X_n+1)(X_n+1)+P(X_n, X_n)X_n+P(X_n, X_n-1)(X_n-1) = X_n$. Ainsi X est une martingale bornée (à valeurs dans $\mathcal{E}_N$) et donc de carré intégrable. Son crochet est défini par $[X]_n = \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{E}[(X_{k+1}-X_k)^2|\mathcal{F}_k]$. On a

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[(X_{n+1}-X_n)^2|\mathcal{F}_n] &= \mathbb{E}[X_{n+1}^2|\mathcal{F}_n] - 2X_n\mathbb{E}[X_{n+1}|\mathcal{F}_n] + X_n^2 \\ &= \mathbb{E}[X_{n+1}^2|\mathcal{F}_n] - X_n^2.\end{aligned}$$

Par la propriété de Markov, $\mathbb{E}[X_{n+1}^2|\mathcal{F}_n] = \mathbb{E}[X_{n+1}^2|X_n] = P(X_n, X_n+1)(X_n+1)^2 + P(X_n, X_n)X_n^2 + P(X_n, X_n-1)(X_n-1)^2 = X_n^2 + 2P(X_n, X_n+1)$, et donc

$$[X]_n = 2\sum_{k=0}^{n-1} P(X_k, X_k+1).$$

I.7 Soit $0 < x < N$. On a $[X]_{n\wedge\tau_{0,N}} = 2\sum_{k=0}^{n\wedge\tau_{0,N}-1} P(X_k, X_k+1)$. Pour $k \leq n\wedge\tau_{0,N}-1$, on a $1 \leq X_k \leq N-1$. La fonction $x \in [1, N-1] \mapsto \frac{x(N-x)}{N(N-1)}$ est une parabole qui atteint son maximum en $x = N/2$ et son minimum en $x \in \{1, N-1\}$. On a donc $P(X_k, X_k+1) \geq \frac{1}{N}$ lorsque $k \leq n\wedge\tau_{0,N}-1$, et donc $[X]_{n\wedge\tau_{0,N}} \geq \frac{2}{N} n\wedge\tau_{0,N}$. Par le théorème d'arrêt, on a

$$\mathbb{E}_x[X_{n\wedge\tau_{0,N}}^2] = \mathbb{E}_x[[X]_{n\wedge\tau_{0,N}}] \geq \frac{2}{N}\mathbb{E}_x[n\wedge\tau_{0,N}].$$

Comme $X_{n\wedge\tau_{0,N}}^2 \leq N^2$, il vient $\mathbb{E}_x[n\wedge\tau_{0,N}] \leq \frac{N^3}{2}$. Le théorème de convergence monotone donne alors $\mathbb{E}_x[\tau_{0,N}] \leq \frac{N^3}{2}$, ce qui assure en particulier que $\mathbb{P}(\tau_{0,N} = +\infty) = 0$.

I.8 Par le théorème d'arrêt, on a $\mathbb{E}_x[X_{n\wedge\tau_{0,N}}] = x$. On a $|X_{n\wedge\tau_{0,N}}| \leq N$ et, puisque $\mathbb{P}(\tau_{0,N} = +\infty) = 0$, $X_{n\wedge\tau_{0,N}} \underset{n\to+\infty}{\to} N\mathbf{1}_{\tau_{0,N}=\tau_N}$ presque sûrement. Par le théorème de convergence monotone, on en déduit que

$$\mathbb{E}_x[X_{n\wedge\tau_{0,N}}] \underset{n\to+\infty}{\to} N\mathbb{P}_x(\tau_{0,N} = \tau_N).$$

Cela donne à nouveau $p(x) = \mathbb{P}_x(\tau_{0,N} = \tau_N) = x/N$.

Exercice 2 :

II.1 $(X_1, \ldots, X_n)$ est un vecteur gaussien de matrice de covariance diagonale, ce qui donne l'indépendance de $X_1, \ldots, X_n$.

II.2 Si $X_0 - \sum_{i=1}^n \alpha_i X_i$ est indépendante du vecteur $(X_1, \ldots, X_n)$, on a nécessairement pour tout $1 \leq j \leq n$,

$$0 = \mathbb{E}\left[\left(X_0 - \sum_{i=1}^n \alpha_i X_i\right) X_j\right] = \Gamma_{0,j} - \sum_{i=1}^n \alpha_i \Gamma_{i,j} = \Gamma_{0,j} - \alpha_j \Gamma_{j,j}.$$

Cela donne $\alpha_j = \frac{\Gamma_{0,j}}{\Gamma_{j,j}}$. Avec ce choix, on observe alors que $(X_0 - \sum_{i=1}^n \alpha_i X_i, X_1, \ldots, X_n)$ est un vecteur gaussien de matrice de covariance diagonale, ce qui donne l'indépendance voulue.

II.3 Soit $X_0' = X_0 - \sum_{i=1}^n \alpha_i X_i$. On a par indépendance de X_0' avec $(X_1, \ldots, X_n)$,

$$\mathbb{E}[X_0|(X_1,\ldots,X_n)] = \mathbb{E}[X_0'|(X_1,\ldots,X_n)] + \sum_{i=1}^n \alpha_i X_i = \mathbb{E}[X_0'] + \sum_{i=1}^n \alpha_i X_i = \sum_{i=1}^n \alpha_i X_i.$$

Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction test mesurable bornée. Toujours en utilisant l'indépendance de X_0' avec $(X_1, \ldots, X_n)$,

$$\mathbb{E}[\varphi(X_0)|(X_1,\ldots,X_n)] = \mathbb{E}[\varphi(X_0' + \sum_{i=1}^n \alpha_i X_i)|(X_1,\ldots,X_n)] = \psi(\sum_{i=1}^n \alpha_i X_i),$$

avec $\psi(x) = \mathbb{E}[\varphi(X_0' + x)]$. La variable aléatoire X_0' est une gaussienne centrée de variance

$$V = \mathbb{E}[(X_0 - \sum_{i=1}^n \alpha_i X_i)^2] = \Gamma_{0,0} - 2\sum_{i=1}^n \alpha_i \Gamma_{0,i} + \sum_{i=1}^n \alpha_i^2 \Gamma_{i,i} = \Gamma_{0,0} - \sum_{i=1}^n \frac{\Gamma_{0,i}^2}{\Gamma_{i,i}}.$$

La loi conditionnelle de X_0 sachant $(X_1, \ldots, X_n)$ est donc une gaussienne de moyenne $\sum_{i=1}^n \frac{\Gamma_{0,i}}{\Gamma_{i,i}} X_i$ et de variance V.

II.4 Par le cours, on sait que $\int_0^T h(s)dW_s$ est la limite dans L^2 des sommes

$$S_k = \sum_{i=0}^{2^k-1} h(\frac{iT}{2^k})(W_{\frac{(i+1)T}{2^k}} - W_{\frac{iT}{2^k}})$$

lorsque $k \to +\infty$. Par conséquent, le vecteur $X = (\int_0^T h(s)dW_s, W_{T/n}, W_{2T/n} - W_{T/n}, \ldots, W_T - W_{(n-1)T/n})$ est la limite dans L^2 (et donc en loi) des vecteurs $X_k = (S_k, W_{T/n}, W_{2T/n} - W_{T/n}, \ldots, W_T - W_{(n-1)T/n})$. Comme les vecteurs X_k sont gaussiens, il en est de même pour X.

Calculons sa matrice de covariance. Lorsque $1 \leq i, j \leq n$, on a clairement $\Gamma_{i,i} = \frac{T}{N}$ et $\Gamma_{i,j} = 0$ par indépendance des accroissements. En utilisant la propriété d'isométrie, on a $\Gamma_{0,0} = \int_0^T h(s)^2 ds$ et

$$\begin{aligned}\Gamma_{0,i} &= \mathbb{E}\left[\int_0^T h(s)dW_s \int_0^T \mathbf{1}_{(i-1)T/n \leq s \leq iT/n} dW_s\right] \\ &= \int_0^T h(s)\mathbf{1}_{(i-1)T/n \leq s \leq iT/n} ds = \int_{(i-1)T/n}^{iT/n} h(s)ds.\end{aligned}$$

II.5 L'application $(x_1, \ldots, x_n) \mapsto (x_1, x_1 + x_2, \ldots, \sum_{i=1}^n x_i)$ étant bijective, la tribu engendrée par $(W_{T/n}, W_{2T/n}, \ldots, W_T)$ est la même que celle engendrée par $(W_{T/n}, (W_{2T/n} -$

$W_{T/n}), \ldots, W_T - W_{(n-1)T/n})$. A l'aide de la question II.3, on obtient

$$Z_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{n}{T} \left(\int_{(i-1)T/n}^{iT/n} h(s)ds \right) (W_{iT/n} - W_{(i-1)T/n}).$$

On peut réécrire $Z_n = \int_0^T g_n(s)dW_s$, avec $g_n(s) = \frac{n}{T}\int_{(i-1)T/n}^{iT/n} h(u)du$ lorsque $(i-1)T/n < s \leq iT/n$. On a, par isométrie,

$$\mathbb{E}\left[\left(Z_n - \int_0^T h(s)dW_s \right)^2 \right] = \int_0^T (g_n(s) - h(s))^2 ds.$$

Comme h est supposée continue, elle est uniformément continue sur $[0,T]$ par le théorème de Heine. Ainsi pour $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour $s, t \in [0,T]$ avec $|t-s| \leq \delta$, on a $|h(s) - h(t)| \leq \varepsilon$. Pour $n > T/\delta$, on a

$$|g_n(s) - h(s)| \leq \frac{n}{T} \int_{(i-1)T/n}^{iT/n} |h(u) - h(s)|du \leq \varepsilon,$$

et donc $\int_0^T (g_n(s) - h(s))^2 ds \leq T\varepsilon^2$ ce qui prouve la convergence souhaitée. Ce résultat est intuitif : plus on a de connaissance sur la trajectoire brownienne, mieux on connaît l'intégrale stochastique $\int_0^T h(s)dW_s$.

Problème : méthode *Multiscale finite element* en dimension 1.

1 Le problème admet une unique solution dans $H_0^1(0,1)$ par application du Lemme de Lax-Milgram. Par ailleurs, on a, par Poincaré,

$$\int_0^1 D^\varepsilon |(u^\varepsilon)'|^2 = \int_0^1 f u^\varepsilon \leq C\|f\|_{L^2(0,1)} \|(u^\varepsilon)'\|_{L^2(0,1)}$$

et comme D^ε est minoré par $\alpha > 0$, on en déduit

$$\|(u^\varepsilon)'\|_{L^2(0,1)} \leq \frac{C}{\alpha} \|f\|_{L^2(0,1)}.$$

Ceci implique (à nouveau par Poincaré) que

$$\|u^\varepsilon\|_{H^1(0,1)} \leq \frac{C'}{\alpha} \|f\|_{L^2(0,1)}.$$

2 Il suffit d'intégrer l'EDP pour vérifier que $-D^\varepsilon(x)(u^\varepsilon)'(x) = F(x) + C^\varepsilon$ puis que (puisque $u^\varepsilon(0) = 0$)

$$u^\varepsilon(x) = -\int_0^x \frac{F}{D^\varepsilon}(y)\, dy - C^\varepsilon \int_0^x \frac{1}{D^\varepsilon}(y)\, dy.$$

La constante C^ε est déterminée par le fait que $u^\varepsilon(1) = 0$ ce qui donne :

$$C^\varepsilon = -\frac{\int_0^1 \frac{F}{D^\varepsilon}(y)\,dy}{\int_0^1 \frac{1}{D^\varepsilon}(y)\,dy}.$$

On a vu dans le cours que $(1/D^\varepsilon) = (1/D)(x/\varepsilon)$ converge faiblement dans $L^2(0,1)$ vers $\int_0^1(1/D)$. On en déduit que C^ε converge vers $-\frac{\left(\int_0^1 F\right)\left(\int_0^1 (1/D)\right)}{\int_0^1 (1/D)} = -\int_0^1 F$.

On vérifie facilement que

$$\begin{aligned}(u^\varepsilon)''(x) &= -\frac{1}{D^\varepsilon(x)} f(x) + \frac{(D^\varepsilon)'(x)}{(D^\varepsilon)^2(x)}(F(x) + C^\varepsilon)\\ &= -\frac{1}{D}(x\varepsilon) f(x) + \frac{1}{\varepsilon}\frac{D'}{D^2}(x/\varepsilon)(F(x) + C^\varepsilon)\end{aligned}$$

en écrivant que $(D^\varepsilon(u^\varepsilon)')' = (D^\varepsilon)'(u^\varepsilon)' + D^\varepsilon(u^\varepsilon)''$ et en manipulant l'expression obtenue.

On observe que , dans la limite $\varepsilon \to 0$ (en utilisant à nouveau la convergence faible dans L^2 des fonctions du type $g(\cdot/\varepsilon)$ quand $\varepsilon \to 0$, et g périodique) :

$$\left\|\frac{1}{D}(x/\varepsilon) f(x)\right\|_{L^2}^2 \longrightarrow \int_0^1 \frac{1}{D^2}\,dx \int_0^1 f^2(x)\,dx$$

$$\left\|\frac{D'}{D^2}(x/\varepsilon)(F(x) + C^\varepsilon)\right\|_{L^2}^2 \longrightarrow \int_0^1 \left(\frac{D'}{D^2}\right)^2 \int_0^1 \left(F(x) - \int_0^1 F\right)^2.$$

Puisque $f \neq 0$ et D est non constant, on en déduit qu'il existe $c > 0$ et $\varepsilon_0 > 0$, $\forall \varepsilon < \varepsilon_0$,

$$\left\|\frac{D'}{D^2}(x/\varepsilon)(F(x) + C^\varepsilon)\right\|_{L^2}^2 \geq c.$$

Par conséquent, il existe $c > 0$ et $\varepsilon_0 > 0$, $\forall \varepsilon < \varepsilon_0$,

$$\|(u^\varepsilon)''\|_{L^2(0,1)} \geq c/\varepsilon.$$

3 On a, pour tout $v_H \in V_H$ (puisque $V_H \subset H_0^1(0,1)$), $a^\varepsilon(u^\varepsilon, v_H) = l(v_H)$ et $a^\varepsilon(u_H^\varepsilon, v_H) = l(v_H)$. On en déduit que pour tout $v_H \in V_H$, $a^\varepsilon(u^\varepsilon - u_H^\varepsilon, v_H) = 0$ et donc

$$a^\varepsilon(u^\varepsilon - u_H^\varepsilon, u^\varepsilon - u_H^\varepsilon) = a^\varepsilon(u^\varepsilon - u_H^\varepsilon, u^\varepsilon - v_H).$$

En utilisant la coercivité de a^ε et Cauchy Schwarz, on a donc pour tout $v_H \in V_H$,

$$\|u^\varepsilon - u_H^\varepsilon\|_{H^1} \leq C\|u^\varepsilon - v_H\|_{L^2}$$

et en minisant le membre de droite sur $v_H \in V_H$, on obtient

$$\|u^\varepsilon - u_H^\varepsilon\|_{H^1} \leq CH\|(u^\varepsilon)''\|_{L^2(0,1)}.$$

On a vu précédemment que la norme L^2 de $(u^\varepsilon)''$ tend vers l'infini quand $\varepsilon \to 0$, et donc c'est aussi vrai pour le second membre de cette estimée.

On s'attend à de mauvais résultats dans la limite $\varepsilon \to 0$, à H fixé. Cela semble naturel : il faudrait raffiner le maillage quand ε diminue, de manière à discrétiser correctement les oscillations de D^ε.

4 Il est évident que V_H^ε est un espace vectoriel. De plus, si on considère une fonction $v \in V_H^\varepsilon$, tel que $v(x_i) = \alpha_i$ pour $i \in \{1, \dots, N-1\}$, il est clair que la fonction v est complètement déterminée car pour tout $x \in (x_i, x_{i+1})$ elle satisfait le problème de Dirichlet :

$$\begin{cases} -\Big(D^\varepsilon(x) v'(x)\Big)' = 0, \ x \in (x_i, x_{i+1}) \\ v(x_i) = \alpha_i \text{ et } v(x_{i+1}) = \alpha_{i+1}, \end{cases}$$

qui admet une unique solution. En particulier, on a

$$V_H^\varepsilon = \mathrm{Vect}(v_i, 1 \leq i \leq N-1) \text{ où } v_i \in V_H^\varepsilon \text{ et } v_i(x_j) = \delta_{i,j}.$$

Les fonctions v_i sont les équivalents des fonctions “chapeaux” pour les éléments finis P1.

5 Soit $(u_H, u^0) \in V_H^\varepsilon \times W_H$. On a

$$\begin{aligned} a^\varepsilon(u_H, u^0) &= \int_0^1 D^\varepsilon (u_H)'(u^0)' \\ &= \sum_{i=0}^{N-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} D^\varepsilon (u_H)'(u^0)' \\ &= -\sum_{i=0}^{N-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} (D^\varepsilon (u_H)')' u^0 \\ &= 0. \end{aligned}$$

On a utilisé le fait que $u^0(x_i) = 0$ et $(D^\varepsilon(u_H)')' = 0$ sur (x_i, x_{i+1}).

Pour $u \in H_0^1(0,1)$, on note $u_H \in V_H^\varepsilon$ la fonction tel que

$$u_H(x_i) = u(x_i).$$

Noter que les valeurs de u aux points x_i sont bien définis car $u \in H_0^1(0,1) \subset \mathcal{C}(0,1)$. Par construction $u^0 := u - u_H$ est dans W_H. On a donc bien $u = u_H + u^0$ avec $(u_H, u^0) \in V_H^\varepsilon \times V^0$.

La décomposition est unique car si $u_H + u^0 = 0$ avec $(u_H, u^0) \in V_H^\varepsilon \times W_H$, on a $0 = a^\varepsilon(u_H + u^0, u^0) = a^\varepsilon(u^0, u^0)$ et donc, par coercivité de a^ε, $u^0 = 0$, ce qui implique aussi $u_H = 0$.

6 Soit $v \in W_H$. On a

$$\int_0^1 v^2 = \sum_{i=0}^{N-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} v^2.$$

Par ailleurs, pour $i \in \{0, \ldots, N-1\}$, puisque $v(x_i) = 0$,

$$\begin{aligned}\int_{x_i}^{x_{i+1}} v^2(x)\,dx &= \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left(\int_{x_i}^{x} v'(y)\,dy\right)^2 dx \\ &\leq \int_{x_i}^{x_{i+1}} (x - x_i) \int_{x_i}^{x} (v')^2(y)\,dy\,dx \\ &\leq \int_{x_i}^{x_{i+1}} (x - x_i) \int_{x_i}^{x_{i+1}} (v')^2(y)\,dy\,dx \\ &\leq (H^2/2) \int_{x_i}^{x_{i+1}} (v')^2(y)\,dy.\end{aligned}$$

On en déduit

$$\begin{aligned}\int_0^1 v^2 &\leq \sum_{i=0}^{N-1} (H^2/2) \int_{x_i}^{x_{i+1}} (v')^2(y)\,dy \\ &= (H^2/2) \int_0^1 (v')^2 \leq H^2 \int_0^1 (v')^2.\end{aligned}$$

7 Ce problème admet une unique solution car c'est un problème linéaire en dimension finie, associée à une matrice carrée injective (par la coercivité de a^ε).

On a pour tout $v_H \in V_H^\varepsilon$ (puisque $V_H^\varepsilon \subset H_0^1(0,1)$), $a^\varepsilon(u^\varepsilon, v_H) = l(v_H)$ et $a^\varepsilon(\tilde{u}_H^\varepsilon, v_H) = l(v_H)$. On en déduit que pour tout $v_H \in V_H^\varepsilon$, $a^\varepsilon(u^\varepsilon - \tilde{u}_H^\varepsilon, v_H) = 0$. Donc $u^\varepsilon - \tilde{u}_H^\varepsilon$ appartient à l'espace orthogonal (pour le produit scalaire défini par a^ε) à V_H^ε, qui est W_H par la question 5.

Par définition de W_H, on en déduit que $\forall i \in \{0, \ldots, N\}$, $\tilde{u}_H^\epsilon(x_i) = u^\varepsilon(x_i)$.

8 On a, dans $\mathcal{D}'(x_i, x_{i+1})$,

$$\begin{aligned}-\Big(D^\varepsilon(x)(\eta_H)'(x)\Big)' &= -\Big(D^\varepsilon(x)(u^\epsilon)'(x)\Big)' + \Big(D^\varepsilon(x)(\tilde{u}_H^\varepsilon)'(x)\Big)' \\ &= f\end{aligned}$$

puisque $\tilde{u}_H^\varepsilon \in V_H^\varepsilon$. Cette relation est en fait vérifiée pour presque tout $x \in (x_i, x_{i+1})$ puisque $f \in L^2(0,1)$.

On a donc, par intégration par parties, en utilisant le fait que $\eta_H(x_i) = 0$ pour tout

$i \in \{0, \dots, N\}$,

$$\begin{aligned} \int_0^1 D^\varepsilon |(\eta_H)'|^2 &= \sum_{i=0}^{N-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} D^\varepsilon |(\eta_H)'|^2 \\ &= -\sum_{i=0}^{N-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} (D^\varepsilon (\eta_H)')' \eta_H \\ &= \sum_{i=0}^{N-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f \eta_H \\ &= \int_0^1 f \eta_H \\ &\leq \|f\|_{L^2(0,1)} \|\eta_H\|_{L^2(0,1)} \end{aligned}$$

En utilisant (4) et la borne inférieure sur D^ε, on en déduit

$$\alpha \int_0^1 |(\eta_H)'|^2 \leq H \|f\|_{L^2(0,1)} \|(\eta_H)'\|_{L^2(0,1)}$$

et donc

$$\|(\eta_H)'\|_{L^2(0,1)} \leq \frac{H}{\alpha} \|f\|_{L^2(0,1)}.$$

Cette borne est nettement meilleurs que (3) car elle est indépendante de ε.

9 Il est évident que $V_{H,h}^\varepsilon$ est un espace vectoriel. De plus, si on considère une fonction $v \in V_{H,h}^\varepsilon$, tel que $v(x_i) = \alpha_i$ pour $i \in \{1, \dots, N-1\}$, il est clair que la fonction v est complètement déterminée car le problème suivant posé sur (x_i, x_{i+1}) :

$$\begin{cases} \displaystyle\int_{x_i}^{x_{i+1}} D^\varepsilon v' \varphi' = 0, \, \forall \varphi \in V_h \\ v(x_i) = \alpha_i \text{ et } v(x_{i+1}) = \alpha_{i+1}, \end{cases}$$

admet une unique solution : c'est un problème de Laplace standard avec conditions aux limites de Dirichlet non-homogènes. En particulier, on a

$$V_{H,h}^\varepsilon = \mathrm{Vect}(v_i, 1 \leq i \leq N-1) \text{ où } v_i \in V_{H,h}^\varepsilon \text{ et } v_i(x_j) = \delta_{i,j}.$$

Les fonctions v_i sont les équivalents des fonctions “chapeaux” pour les éléments finis P1.

10 Soit $(u_H, u^0) \in V_{H,h}^\varepsilon \times W_{H,h}$. On a $a^\varepsilon(u_H, u^0) = 0$ par définition de l'espace $V_{H,h}^\varepsilon$.

Pour $u \in V_h$, on note $u_H \in V_{H,h}^\varepsilon$ la fonction qui est tel que

$$u(x_i) = u_H(x_i).$$

Par construction $u^0 := u - u_H$ est dans W_H. On a donc bien $u = u_H + u^0$ avec $(u_H, u^0) \in V_H^\varepsilon \times V^0$.

La décomposition est unique car si $u_H + u^0 = 0$ avec $(u_H, u^0) \in V^\varepsilon_{H,h} \times W_{H,h}$, on a $0 = a^\varepsilon(u_H + u^0, u^0) = a^\varepsilon(u^0, u^0)$ et donc, par coercivité de a^ε, $u^0 = 0$, ce qui implique aussi $u_H = 0$.

L'espace V_h est de dimension $(1/h)-1$. L'espace $V^\varepsilon_{H,h}$ est de dimension $N-1 = (1/H)-1$. On en déduit que l'espace $W_{H,h}$ est de dimension $(1/h) - (1/H)$.

11 La fonction $\eta_{H,h} = u^\epsilon_h - u^\varepsilon_{H,h}$ est bien dans V_h, et de plus, elle vérifie : $\forall v_H \in V^\varepsilon_{H,h}$,

$$\begin{aligned} a^\varepsilon(\eta_{H,h}, v_H) &= a^\varepsilon(u^\epsilon_h - u^\varepsilon_{H,h}, v_H) \\ &= a^\varepsilon(u^\epsilon_h, v_H) - a^\varepsilon(u^\varepsilon_{H,h}, v_H) \\ &= l(v_H) - l(v_H) \\ &= 0. \end{aligned}$$

La fonction $\eta_{H,h}$ est donc dans l'espace orthogonal (pour le produit scalaire défini par a^ε) à $V^\varepsilon_{H,h}$, qui est $W_{H,h}$ par la question 10.

De plus, on a clairement $W_{H,h} \subset W_H$.

Ensuite, on a :

$$\begin{aligned} a^\varepsilon(\eta_{H,h}, \eta_{H,h}) &= a^\varepsilon(u^\varepsilon_h - u^\varepsilon_{H,h}, \eta_{H,h}) \\ &= a^\varepsilon(u^\varepsilon_h, \eta_{H,h}) \end{aligned}$$

car $a^\varepsilon(u^\varepsilon_{H,h}, \eta_{H,h}) = 0$ puisque $\eta_{H,h} \in W_{H,h}$ et $u^\varepsilon_{H,h} \in V^\varepsilon_{H,h}$. Puis, comme $\eta_{H,h} \in V_h \subset H^1_0(0,1)$,

$$\begin{aligned} a^\varepsilon(u^\varepsilon_h, \eta_{H,h}) &= l(\eta_{H,h}) \\ &= a^\varepsilon(u^\varepsilon, \eta_{H,h}). \end{aligned}$$

Finalement, en utilisant les notations des questions 7 et 8,

$$\begin{aligned} a^\varepsilon(u^\varepsilon, \eta_{H,h}) &= a^\varepsilon(\tilde{u}^\varepsilon_H + \eta_H, \eta_{H,h}) \\ &= a^\varepsilon(\eta_H, \eta_{H,h}) \end{aligned}$$

car $a^\varepsilon(\tilde{u}^\varepsilon_H, \eta_{H,h}) = 0$ puique $\eta_{H,h} \in W_H$ et $\tilde{u}^\varepsilon_H \in V^\varepsilon_H$.

On a donc

$$a^\varepsilon(\eta_{H,h}, \eta_{H,h}) = a^\varepsilon(\eta_H, \eta_{H,h}).$$

En utilisant les bornes sur D^ε, on a donc :

$$\alpha \|(\eta_{H,h})'\|^2_{L^2} \leq \beta \|(\eta_H)'\|_{L^2} \|(\eta_{H,h})'\|_{L^2}$$

d'où, par la question 8,

$$\|\eta_{H,h}\|_{H^1} \leq CH\|f\|_{L^2}.$$

12 Par inégalité triangulaire, on a

$$\begin{aligned}\|u^\varepsilon - u^\varepsilon_{H,h}\|_{H^1(0,1)} &\leq \|u^\varepsilon - u^\varepsilon_h\|_{H^1(0,1)} + \|u^\varepsilon_h - u^\varepsilon_{H,h}\|_{H^1(0,1)} \\ &\leq C \inf_{v_h \in V_h} \|u^\varepsilon - v_h\|_{H^1(0,1)} + CH\|f\|_{L^2(0,1)},\end{aligned}$$

l'inégalité $\|u^\varepsilon - u^\varepsilon_h\|_{H^1(0,1)} \leq C \inf_{v_h \in V_h} \|u^\varepsilon - v_h\|_{H^1}$ étant une conséquence des calculs de la question 3, sur le maillage fin.

On obtient donc finalement, avec l'inégalité d'interpolation donnée dans la question 3, et la borne obtenue à la question 2 sur $\|(u^\varepsilon)''\|_{L^2(0,1)}$

$$\begin{aligned}\|u^\varepsilon - u^\varepsilon_{H,h}\|_{H^1(0,1)} &\leq C_0 h \|(u^\varepsilon)''\|_{L^2(0,1)} + CH\|f\|_{L^2} \\ &\leq C_0 \frac{h}{\varepsilon} + CH\|f\|_{L^2}.\end{aligned}$$

Par conséquent, la méthode est précise si $h \ll \varepsilon$. Une fois les fonctions de base de $W_{H,h}$ calculées, on peut ainsi obtenir des résultats précis pour de nombreux seconds membres f en résolvant des problèmes de taille N^2 où $N = 1/H$ (et non pas de taille $1/h^2$, ce qui serait la taille du problème en appliquant une méthode d'éléments finis standards sur le maillage fin).