Examen du cours MOPSI

Quelques éléments de réponses pour la partie analyse et calcul scientifique

Exercice

1) Le seul point d'équilibre est $(0,0)$. Le système linéarisé autour de ce point d'équilibre est

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

La linéarisation ne permet pas de conclure sur la stabilité de $(0,0)$.

2) Pour $\alpha = 2$, on vérifie que V est une fonction de Lyapunov. On particulier, les solutions sont définies pour tout temps $t \geq 0$, et $(0,0)$ est un point asymptotiquement stable.

Problème

1) C'est le problème de Dirichlet homogène classique, pour lequel on peut construire une solution par la formulation variationnelle : trouver $u \in \mathbb{H}_0^1(\Omega)$ tel que $\forall v \in \mathbb{H}_0^1(\Omega)$, $\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v = \int_\Omega fv$. Comme f est dans $L^2(\Omega)$ et que Ω est régulier, un résultat de régularité elliptique montre que $u \in H^2(\Omega)$. On peut donc donner un sens à $\partial_n u$ sur $\partial\Omega$, comme fonction de $L^2(\partial\Omega)$.

2) Le seul point est de montrer que la norme $\|\cdot\|_\varepsilon$ contrôle la norme L^2 : $\exists C_\varepsilon > 0$, $\forall u \in \mathbb{H}^1(\Omega)$, $\|u\|_{L^2}^2 \leq C_\varepsilon \|u\|_\varepsilon^2$. Supposons que cette propriété ne soit pas vérifiée. Alors on peut construire une suite de fonctions $u_n \in H^1(\Omega)$ telle que $\|u_n\|_{L^2} = 1$ et $\|u_n\|_\varepsilon \leq \frac{1}{n}$. La suite u_n est bornée dans H^1 (et Ω est un domaine borné) donc on peut supposer (quitte à extraire une sous-suite) que u_n converge faiblement dans H^1 et fortement dans L^2 vers une fonction $u \in H^1(\Omega)$. Le fait que $\|u_n\|_\varepsilon \leq \frac{1}{n}$ montre que la suite u_n est en fait de Cauchy dans H^1, donc u_n converge fortement vers u dans H^1. Or l'application trace est continue donc $u_n|_{\partial\Omega}$ converge fortement vers $u|_{\partial\Omega}$ dans $L^2(\partial\Omega)$. Comme $\|u_n\|_\varepsilon \leq \frac{1}{n}$, on en déduit que $u \in H_0^1(\Omega)$ et que $\nabla u = 0$, donc que $u = 0$, ce qui est contradictoire avec le fait que par ailleurs, $\|u\|_{L^2} = 1$.

Le problème (2) est donc bien posé en utilisant le Lemme de Lax-Milgram. En intégrant par parties, on vérifie que (2) correspond à la formulation variationnelle du problème :

$$\begin{cases} -\Delta u^\varepsilon &= f \quad \text{dans } \Omega, \\ \partial_n u^\varepsilon &= -u/\varepsilon \quad \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

3) Par intégrations par partie, on vérifie que

$$\forall v \in H^1(\Omega), a^\varepsilon(u,v) = \int_\Omega fv + \int_{\partial\Omega} \partial_n uv.$$

Comme $a^\varepsilon(u^\varepsilon, v) = \int_\Omega fv$, on obtient donc

$$\forall v \in H^1(\Omega), a^\varepsilon(u - u^\varepsilon, v) = \int_{\partial\Omega} \partial_n uv.$$

En prenant $v = u - u^\varepsilon$ comme fonction test dans l'équation précédente, on a donc

$$\begin{aligned}\int_\Omega |\nabla(u-u^\varepsilon)|^2 + \frac{1}{\varepsilon}\int_{\partial\Omega} |u-u^\varepsilon|^2 &= \int_{\partial\Omega} \partial_n u(u-u^\varepsilon), \\ &\leq \varepsilon \int_{\partial\Omega} |\partial_n u|^2 + \frac{1}{4\varepsilon}\int_{\partial\Omega} |u-u^\varepsilon|^2,\end{aligned}$$

soit (en utilisant l'équivalence des normes H^1 et $\|\cdot\|_1$, et pour $\varepsilon < 3/4$)

$$\begin{aligned}\|u-u^\varepsilon\|_{H^1}^2 &\leq C\left(\int_\Omega |\nabla(u-u^\varepsilon)|^2 + \int_{\partial\Omega} |u-u^\varepsilon|^2\right), \\ &\leq C\left(\int_\Omega |\nabla(u-u^\varepsilon)|^2 + \frac{3}{4\varepsilon}\int_{\partial\Omega} |u-u^\varepsilon|^2\right), \\ &\leq C\varepsilon \int_{\partial\Omega} |\partial_n u|^2,\end{aligned}$$

et donc u^ε tend vers u (en norme H^1) quand ε tend vers 0.

4) Pour toute fonction $v_h \in V_h$, on a

$$\begin{aligned}a^\varepsilon(u_h - v_h, u_h - v_h) &= a^\varepsilon(u_h - u, u_h - v_h) + a^\varepsilon(u - v_h, u_h - v_h) \\ &= -\int_{\partial\Omega} \partial_n u(u_h - v_h) + a^\varepsilon(u - v_h, u_h - v_h) \\ &\leq \varepsilon \int_{\partial\Omega} |\partial_n u|^2 + \frac{1}{4\varepsilon}\int_{\partial\Omega} |u_h - v_h|^2 \\ &\quad + \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla(u - v_h)|^2 + \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla(u_h - v_h)|^2 \\ &\quad + \frac{1}{2\varepsilon}\int_{\partial\Omega} |u - v_h|^2 + \frac{1}{2\varepsilon}\int_{\partial\Omega} |u_h - v_h|^2\end{aligned}$$

et donc

$$\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla(u_h-v_h)|^2 + \frac{1}{4\varepsilon}\int_{\partial\Omega} |u_h-v_h|^2 \leq \varepsilon\int_{\partial\Omega} |\partial_n u|^2 + \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla(u-v_h)|^2 + \frac{1}{2\varepsilon}\int_{\partial\Omega} |u-v_h|^2.$$

En utilisant le fait que, puisque $u \in H^2(\Omega)$, $\inf_{v_h\in V_h} \int_{\partial\Omega} |u-v_h| \leq C \inf_{v_h\in V_h} \|u-v_h\|_{H^{1/2}} \leq Ch^{3/2}\|u\|_{H^2}$, on en déduit que (pour $\varepsilon < 1/4$)

$$\|u-u_h\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq C\|u\|_{H^2}^2 \left(\varepsilon + h^2 + h^3/\varepsilon\right).$$

En prenant $\varepsilon = h^{3/2}$, on a donc une convergence en norme H^1 en $h^{3/4}$. On voit que l'ordre de convergence n'est pas optimal.

5) On vérifie que cette nouvelle forme bilinéaire est continue, et ne pose plus de problème de consistance : $\overline{a}^\varepsilon(u - u^\varepsilon, v) = 0$. En reprenant les calculs précédants, l'erreur est donc en

$C(u)(h^2 + h^3/\varepsilon)$, et est donc optimale en prenant ε proportionnel à h. Pour la coercivité au niveau discret, on écrit : pour $\alpha > 0$,

$$\begin{aligned}
\overline{a}^\varepsilon(u_h, u_h) &= \|\nabla u_h\|_{L^2}^2 + \frac{1}{\varepsilon}\|u_h\|_{L^2(\partial\Omega)}^2 - 2\int_{\partial\Omega} \partial_n u_h u_h \\
&\geq \|\nabla u_h\|_{L^2}^2 + \frac{1}{\varepsilon}\|u_h\|_{L^2(\partial\Omega)}^2 - \alpha h\|\partial_n u_h\|_{L^2(\partial\Omega)}^2 - \frac{1}{\alpha h}\|u_h\|_{L^2(\partial\Omega)}^2 \\
&\geq (1 - C\alpha)\|\nabla u_h\|_{L^2}^2 + \left(\frac{1}{\varepsilon} - \frac{1}{\alpha h}\right)\|u_h\|_{L^2(\partial\Omega)}^2,
\end{aligned}$$

où C est la constante de continuité pour l'application trace au niveau discret (appliqué à $v_h = \partial_n u_h$) : $\forall v_h \in V_h$,

$$\|v_h\|_{L^2(\partial\Omega)} \leq C^{1/2} h^{-1/2}\|v_h\|_{L^2(\Omega)}.$$

En effet, en utilisant la continuité de l'application trace (continue) et une inégalité inverse, on a : $\forall v_h \in V_h$,

$$\|v_h\|_{L^2(\partial\Omega)} \leq c_0\|v_h\|_{H^{1/2}(\Omega)} \leq C h^{-1/2}\|v_h\|_{L^2(\Omega)}.$$

En prenant $\alpha = 1/(2C)$ et ε qui est proportionnel à h et qui vérifie $\varepsilon < h/(2C)$ (par exemple $\varepsilon = h/(4C)$), on a coercivité et convergence optimale.