Copule et dépendance entre variables aléatoires

On appelle *copule* (de dimension 2) toute fonction $C : [0,1]^2 \to [0,1]$ telle qu'il existe des variables aléatoires U_1, U_2 uniformes sur $[0,1]$ avec lesquelles

$$\forall u_1, u_2 \in [0,1], C(u_1,u_2) = \mathbb{P}(U_1 \le u_1, U_2 \le u_2).$$

Ainsi, une copule est la fonction de répartition d'un vecteur aléatoire dont les marginales suivent la loi uniforme sur $[0,1]$.

Premières propriétés, bornes de Fréchet-Hoeffding.

1. Soit C une copule. Calculer $C(u_1,1)$, $C(1,u_2)$, $C(u_1,0)$ et $C(0,u_2)$ pour $u_1,u_2 \in [0,1]$. Montrer que pour $u_1,u_2,u_1' \in [0,1]$, $|C(u_1,u_2) - C(u_1',u_2)| \le |u_1 - u_1'|$, et en déduire que C est continue.
2. Soient U_1 et U_2 deux variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur $[0,1]$. Calculer respectivement $C^\perp$, C^+, et C^-, les fonctions de répartition de (U_1,U_2), (U_1,U_1) et $(U_1, 1-U_1)$.
3. Montrer que pour toute copule C, on a

$$\forall u_1,u_2 \in [0,1], C^-(u) \le C(u) \le C^+(u).$$

Le théorème de Sklar

On considère 2 variables aléatoires réelles X_1, X_2. Pour $i \in \{1,2\}$, on note $F_i(x) = \mathbb{P}(X_i \le x)$ la fonction de répartition de X_i, que l'on suppose continue et strictement croissante.

L'objectif de cette partie est de montrer qu'il existe une unique copule $C_X : [0,1]^2 \to [0,1]$ telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}^2,\ \mathbb{P}(X_1 \le x_1, X_2 \le x_2) = C_X(F_1(x_1), F_2(x_2)). \tag{1}$$

La fonction C_X est appelée la copule du vecteur $X = (X_1, X_2)$.

4. On pose $U_i = F_i(X_i)$ pour $i \in \{1,2\}$. Montrer que U_1 et U_2 suivent la loi uniforme sur $[0,1]$. Montrer que la fonction de répartition de (U_1,U_2) est l'unique fonction continue $C_X : [0,1]^2 \to [0,1]$ satisfaisant (1).
5. En déduire que si $Y = (Y_1,Y_2)$ est un vecteur aléatoire, Y a même loi que X si, et seulement si

$$\forall u \in [0,1]^2, C_Y(u) = C_X(u) \text{ et } \forall i \in \{1,2\}, Y_i \text{ a même loi que } X_i.$$

6. On considère f_1, f_2 deux fonctions réelles continues strictement croissantes. Montrer que les vecteurs $(f_1(X_1), f_2(X_2))$ et (X_1,X_2) ont la même copule.
7. Soient $X_1, G_2 \sim \mathcal{N}(0,1)$ indépendantes et $\rho \in [-1,1]$. Vérifier que $X_2 = \rho X_1 + \sqrt{1-\rho^2} G_2 \sim \mathcal{N}(0,1)$. On appelle copule gaussienne de paramètre ρ la copule C_X. Que vaut C_X pour $\rho = 0$, $\rho = 1$, $\rho = -1$? Sous Python, tracer 1000 réalisations indépendantes de $(U_1,U_2) = (\Phi(X_1), \Phi(X_2))$ où $\Phi(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-u^2/2} du$ pour $\rho = -0.9, 0, 0.9$. Tracer 1000 réalisations indépendantes de (Y_1,Y_2) avec $Y_1, Y_2 \sim \mathcal{E}(1)$ et $C_Y = C_X$, pour les mêmes valeurs de ρ.