Exercices sur la convergence de variables aléatoires

Les deux premiers exercices doivent être considérés comme du cours.

Exercice 1. *On considère (X_n) une suite de variable aléatoires à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ et (X'_n) une suite de variable aléatoires à valeurs dans $\mathbb{R}^{d'}$.*

1. *On suppose que $X_n \overset{p.s.}{\to} X$, $X'_n \overset{p.s.}{\to} X'$. Montrer que $(X_n, X'_n) \overset{p.s.}{\to} (X, X')$.*
2. *On suppose que $X_n \overset{L^1}{\to} X$, $X'_n \overset{L^1}{\to} X'$. Montrer que $(X_n, X'_n) \overset{L^1}{\to} (X, X')$.*
3. *On suppose que $X_n \overset{\mathbb{P}}{\to} X$, $X'_n \overset{\mathbb{P}}{\to} X'$. Montrer que $(X_n, X'_n) \overset{\mathbb{P}}{\to} (X, X')$.*
4. *Montrer qu'il n'y a pas de résultat général analogue pour la convergence en loi. (On pourra prendre $G \sim \mathcal{N}(0,1)$, $X_n = G$ et $X'_n = (-1)^n G$). Montrer qu'en revanche, si pour tout n, X_n est indépendant de X'_n, $X_n \overset{\mathcal{L}}{\to} X$ et $X'_n \overset{\mathcal{L}}{\to} X'$, alors $(X_n, X'_n) \overset{\mathcal{L}}{\to} (X, X')$, avec X indépendante de X'.*

Exercice 2. *On considère (X_n) une suite de variable aléatoires à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ et $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^q$.*

1. *On suppose que $X_n \overset{p.s.}{\to} X$ et f continue. Montrer que $f(X_n) \overset{p.s.}{\to} f(X)$.*
2. *On suppose que $X_n \overset{\mathcal{L}}{\to} X$ et f continue. Montrer que $f(X_n) \overset{\mathcal{L}}{\to} f(X)$.*
3. *On suppose que $X_n \overset{L^1}{\to} X$ et f globalement lipschitzienne, i.e. $\exists K > 0, \forall x, y \in \mathbb{R}^d, |f(x) - f(y)| \leq K|x - y|$. Montrer que $f(X_n) \overset{L^1}{\to} f(X)$.*
4. *On suppose que $X_n \overset{\mathbb{P}}{\to} X$ et f globalement lipschitzienne. Montrer que $f(X_n) \overset{\mathbb{P}}{\to} f(X)$.*

Ces deux exercices donnent en particulier :
- si $X_n \overset{p.s.}{\to} X$, $X'_n \overset{p.s.}{\to} X'$ et $f : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{d'} \to \mathbb{R}^q$ est continue, $f(X_n, X'_n) \overset{p.s.}{\to} f(X, X')$,
- si $(X_n, X'_n) \overset{\mathcal{L}}{\to} (X, X')$ et $f : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{d'} \to \mathbb{R}^q$ est continue, $f(X_n, X'_n) \overset{\mathcal{L}}{\to} f(X, X')$.

Cela permet de traiter notamment la somme ou le produit de limites.

Exercice 3. *On considère une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{R}^d$. On suppose qu'il existe une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, une suite ϵ_n décroissant vers 0 et une suite a_n telle que*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(|X_n - X| \geq \epsilon_n) \leq a_n,$$

et $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n < \infty$. En déduire que $X_n \overset{p.s.}{\to} X$.

Exercice 4. *L'objet de cet exercice est de donner un exemple de suite de v.a. qui converge en probabilité mais pas presque sûrement. On se donne une suite $(X_n)_{n\geq 1}$ de v.a. indépendantes telle que $X_n \overset{loi}{=} \mathcal{B}(1/n)$, i.e $\mathbb{P}(X_n = 1) = 1/n = 1 - \mathbb{P}(X_n = 0)$.*

1. *Montrer que X_n converge en probabilité vers 0.*
2. *Soit $(x_n)_{n\geq 1}$ une suite à valeurs dans $\{0, 1\}$. Montrer que $\lim_{n\to+\infty} x_n = 0$ ssi $\exists N \in \mathbb{N}^*, \forall n \geq N, x_n = 0$.*
3. *En déduire que $\{\lim_{n\to+\infty} X_n = 0\} = \cup_{N\in\mathbb{N}^*} \cap_{n\geq N} \{X_n = 0\}$, puis que $\mathbb{P}(\lim_{n\to+\infty} X_n = 0) = \lim_{N\to+\infty} \mathbb{P}(\cap_{n\geq N}\{X_n = 0\})$.*

4. *Montrer que* $\ln(\mathbb{P}(\cap_{N\leq n\leq N+k}\{X_n = 0\})) = \sum_{i=0}^{k} \ln(1-\frac{1}{N+i})$. *En déduire que* $\mathbb{P}(\cap_{n\geq N}\{X_n = 0\}) = 0$ *puis que* X_n *ne converge pas p.s. vers* 0.
5. *En utilisant la même méthode, montrer qu'en revanche la sous-suite* $(X_{n^2})_{n\geq 1}$ *converge p.s. vers* 0, *i.e.* $\mathbb{P}(\lim_{n\to+\infty} X_{n^2} = 0) = 1$.

Exercice 5. *L'objectif de cet exercice est de montrer que si une suite de v.a. converge en probabilité, alors il existe une sous-suite qui converge p.s. On suppose que* X_n *est une suite de v.a. réelles qui converge en probabilité vers* X.

1. *Montrer qu'il existe une sous-suite* $\phi_1(n)$ *telle que* $\mathbb{P}(|X_{\phi_1(n)} - X| \geq 1) \leq 1/n^2$. *En déduire que* $\mathbb{E}[\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbf{1}_{\{|X_{\phi_1(n)}-X|\geq 1\}}] < +\infty$ *puis que, presque sûrement, il existe un entier* N *t.q.* $|X_{\phi_1(n)} - X| < 1$ *pour* $n \geq N$ *(i.e.* $\mathbb{P}(\exists N, \forall n \geq N, |X_{\phi_1(n)} - X| < 1) = 1$*).*
2. *Montrer qu'il existe une sous-suite* $\phi_2(n)$ *telle que* $\mathbb{P}(|X_{\phi_1\circ\phi_2(n)} - X| \geq 1/2) \leq 1/n^2$. *Puis, par récurrence, montrer qu'on peut construire des sous-suites* $\phi_3(n), \ldots$ *telles que pour tout* k, $\mathbb{P}(|X_{\phi_1\circ\cdots\circ\phi_k(n)} - X| \geq 1/k) \leq 1/n^2$. *En déduire que* $\mathbb{P}(\exists N, \forall n \geq N, |X_{\phi_1\circ\cdots\circ\phi_k(n)} - X| < 1/k) = 1$.
3. *On pose* $\varphi(n) = \phi_1 \circ \cdots \circ \phi_n(n)$ *(procédé diagonal). Montrer que* $X_{\varphi(n)}$ *converge presque sûrement vers* X.
4. *On propose une méthode légèrement différente pour obtenir ce résultat. Construire une suite strictement croissante* $\tilde{\varphi}$ *telle que* $\mathbb{P}(|X_{\tilde{\varphi}(n)} - X| > 1/n) \leq 1/n^2$, *et conclure à l'aide de l'Exercice 3 que* $X_{\tilde{\varphi}(n)}$ *converge presque sûrement vers* X.

Donner un exemple de suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *qui converge en loi vers une v.a.* X *mais dont aucune sous-suite ne converge p.s. vers* X.