Examen du cours de Probabilités

Mardi 24 Janvier 2017 (8h30-11h30)

Polycopié et notes de cours autorisés. Téléphones, calculatrices et ordinateurs interdits.

Exercice 1. Soit X une variable aléatoire positive à densité $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $U \sim \mathcal{U}([0,1])$ une variable aléatoire uniforme sur $[0,1]$, indépendante de X. On pose $Y = UX$ et $Z = (1-U)X$.

1. Montrer sans calcul que Y et Z ont même loi.
2. Calculer la loi de Y (montrer qu'il s'agit d'une loi à densité, et exprimer la densité de Y en fonction de p).
3. Calculer la loi de (Y, Z), puis retrouver la loi obtenue à la question précédente.
4. On suppose désormais p continûment dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{E}[1/X] < \infty$. Montrer alors que Y est indépendante de Z si, et seulement si $\exists \theta > 0, X \sim \Gamma(2, \theta)$. [Indication : on s'intéressera à la fonction $q(x) = p(x)/x$ définie pour $x > 0$.]

⋆⋆⋆

Exercice 2. (Processus de naissance)

On considère une population avec $k \in \mathbb{N}^*$ individus, et on suppose que chaque individu donne naissance à un nouvel individu au bout d'un temps distribué selon la loi exponentielle. On note $E_1, \ldots, E_k \sim \mathcal{E}(1)$ ces temps exponentiels que l'on suppose indépendants. Ainsi, la prochaine naissance a lieu au bout du temps $\min_{1 \le \ell \le k} E_\ell$.

1. Montrer que $\min_{1 \le \ell \le k} E_\ell$ suit une loi exponentielle de paramètre k.
2. En déduire que $\min_{1 \le \ell \le k} E_\ell$ et E_1/k ont même loi.

Soit $(\xi_k)_{k \ge 1}$ une suite i.i.d. de variables aléatoires exponentielles de paramètre 1. On s'intéresse désormais aux instants de naissance d'une population qui part (à $t = 0$) d'un individu. La première naissance a lieu après un temps ξ_1, la seconde après un temps $\xi_2/2$, etc., si bien que la n-ème naissance a lieu à l'instant

$$T_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \xi_k.$$

On pose $T_\infty = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \xi_k$. On veut savoir si la population peut exploser en temps fini, c'est à dire savoir si $P(T_\infty \le t)$ est strictement positif pour un certain $t > 0$.

3. Montrer que T_n converge presque sûrement vers T_∞.
4. Montrer que $\mathbb{E}[T_\infty] = +\infty$. Montrer également que pour $a > 0$, $\mathbb{E}[e^{-aT_n}] \underset{n \to +\infty}{\to} \mathbb{E}[e^{-aT_\infty}]$.
5. Pour $a > 0$, calculer $\mathbb{E}[e^{-a\xi_1}]$, puis en déduire la valeur de $\mathbb{E}[e^{-aT_n}]$.
6. A l'aide des deux questions précédentes, donner la valeur de $\mathbb{E}[e^{-T_\infty}]$, et conclure sur la possibilité d'avoir une explosion de la population en temps fini.
7. Calculer $\mathbf{Var}(T_n)$. Vérifier que $\mathbf{Var}(T_n) = \mathbb{E}[(T_n - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k})^2]$, puis montrer que $\frac{T_n}{\ln(n)}$ converge dans L^2 vers 1, c'est à dire que $\mathbb{E}[(T_n/\ln(n) - 1)^2] \underset{n \to +\infty}{\to} 0$.

⋆⋆⋆

Exercice 3. On considère (G_1, G_2, G_3) un vecteur gaussien centré de matrice de covariance $\Gamma = \begin{bmatrix} 1 & \rho_{12} & \rho_{13} \\ \rho_{12} & 1 & \rho_{23} \\ \rho_{13} & \rho_{23} & 1 \end{bmatrix}$. Montrer que $\rho_{12}, \rho_{13}, \rho_{23} \in [-1, 1]$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur ρ_{12}, ρ_{13} et ρ_{23} pour que $G_1 + G_2$, $G_1 + G_3$ et $G_2 + G_3$ soient indépendantes.

$\star\star\star$

Exercice 4. (Formule de Stirling)

1. On considère une suite de variables aléatoires réelles $(Y_n)_{n\geq 1}$ qui converge en loi vers Y telle que $\mathbb{P}(Y=0)=0$. Montrer que $\mathbb{P}(Y_n \leq 0) \underset{n\to+\infty}{\to} \mathbb{P}(Y \leq 0)$. [Indication : on pourra utiliser l'encadrement $g_M(x) \leq \mathbf{1}_{x\leq 0} \leq h_M(x)$ pour $M \in \mathbb{N}^*$, avec $g_M(x) = \mathbf{1}_{x\leq -1/M} - Mx\mathbf{1}_{-1/M<x\leq 0}$ et $h_M(x) = \mathbf{1}_{x\leq 0} + M(1/M - x)\mathbf{1}_{0<x\leq 1/M}$.]

On suppose que $(X_k)_{k\geq 1}$ est une suite i.i.d. de variables aléatoires de Poisson de paramètre 1, Z une variable aléatoire de Poisson de paramètre $\lambda > 0$ et $G \sim \mathcal{N}(0,1)$ une variable aléatoire gaussienne centrée réduite. Pour $x \in \mathbb{R}$, on utilise les notations $x^+ = \max(x,0)$, $x^- = \max(-x,0)$ et on rappelle que l'on a $x = x^+ - x^-$.

2. Calculer la fonction caractéristique de Z, puis celle de $X_1 + \cdots + X_n$. En déduire la loi de $X_1 + \cdots + X_n$.
3. On pose $\bar{X}_n = \frac{X_1+\cdots+X_n}{n}$. Calculer explicitement $\mathbb{P}(\bar{X}_n - 1 \leq 0)$. Donner le comportement asymptotique de $\sqrt{n}(\bar{X}_n - 1)$. En utilisant la question 1, obtenir la limite de $u_n = e^{-n}\sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!}$ lorsque $n \to +\infty$.
4. Calculer $\mathbb{E}[(\bar{X}_n - 1)^-]$ et $\mathbb{E}[G^-]$.
5. Pour $\alpha > 0$, montrer que $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}[\min(\sqrt{n}(\bar{X}_n - 1)^-, \alpha)] = \mathbb{E}[\min(G^-, \alpha)]$.
6. Montrer que
$$0 \leq \mathbb{E}[\sqrt{n}(\bar{X}_n - 1)^-] - \mathbb{E}[\min(\sqrt{n}(\bar{X}_n - 1)^-, \alpha)] \leq n\frac{\mathbb{E}[(\bar{X}_n - 1)^2]}{\alpha}.$$
7. Calculer $\mathbf{Var}(\bar{X}_n)$. En déduire que $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}[\sqrt{n}(\bar{X}_n - 1)^-] = \mathbb{E}[G^-]$, et donner un équivalent de $n!$.

Corrigé

Exercice 1.

1. La variable aléatoire $1-U$ est uniformément distribuée sur $[0,1]$ et est indépendante de X. Ainsi, $(1-U,X)$ a même loi que (U,X) et donc $(1-U)X$ suit la même loi que UX.
2. Par indépendance, le vecteur aléatoire (U,X) a pour densité $\mathbf{1}_{[0,1]}(u)p(x)$. Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction bornée mesurable. On a, grâce au théorème de Fubini,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[f(UX)] &= \int_0^\infty \left(\int_0^1 f(ux)du\right)p(x)dx = \int_0^\infty \int_0^x f(y)\frac{1}{x}dyp(x)dx \\ &= \int_0^\infty \int_0^\infty \mathbf{1}_{y<x} f(y)\frac{p(x)}{x}dxdy = \int_0^\infty f(y)\left(\int_y^\infty \frac{p(x)}{x}dx\right)dy.\end{aligned}$$

   Donc Y suit la loi de densité $\mathbf{1}_{y>0}\int_y^\infty \frac{p(x)}{x}dx$.
3. On pose $\phi(u,x)=(ux,(1-u)x)$. C'est un C^1-difféomorphisme de $]0,1[\times\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}_+^*$, de réciproque $\phi^{-1}(y,z)=(\frac{y}{y+z},y+z)$. On vérifie en effet facilement que $\phi(]0,1[\times\mathbb{R}_+^*)\subset\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}_+^*$ et $\phi^{-1}(\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}_+^*)\subset]0,1[\times\mathbb{R}_+^*$. On a

$$\mathrm{Jac}\phi^{-1}(y,z)=\det\begin{pmatrix}\frac{z}{(y+z)^2} & -\frac{y}{(y+z)^2}\\ 1 & 1\end{pmatrix}=\frac{1}{y+z}.$$

   Soit $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ bornée mesurable. Grâce au théorème de changement de variable, on obtient

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[f(Y,Z)] &= \int_0^\infty\int_0^1 f(\phi(u,x))p(x)dudx \\ &= \int_0^\infty\int_0^\infty f(y,z)p(y+z)\frac{1}{y+z}dydz.\end{aligned}$$

   Ainsi, (Y,Z) suit la loi de densité $\frac{p(y+z)}{y+z}\mathbf{1}_{y>0}\mathbf{1}_{z>0}$. En appliquant la formule des densités marginales, on retrouve que Y suit la loi de densité $\mathbf{1}_{y>0}\int_0^\infty\frac{p(y+z)}{y+z}dz=\mathbf{1}_{y>0}\int_y^\infty\frac{p(x)}{x}dx$.
4. On pose $q(x)=p(x)/x$ lorsque $x>0$. On remarque que $\theta=\mathbb{E}[1/X]=\int_0^\infty q(x)dx<\infty$. Grâce aux deux questions précédentes, Y et Z sont indépendantes si, et seulement si

$$\forall y,z>0, q(y+z)=\int_y^\infty q(x)dx\int_z^\infty q(x)dx. \qquad (1)$$

   En dérivant par rapport à y, il vient $q'(y+z)=-q(y)\int_z^\infty q(x)dx$. Puis, en faisant tendre z vers 0, il vient $q'(y)=-\theta q(y)$ pour tout $y>0$. Ainsi, on obtient $q(y)=Ce^{-\theta y}$ pour une constante $C>0$, et en injectant dans (1), on obtient que $C=\theta^2$ et donc $p(x)=\mathbf{1}_{x>0}\theta^2xe^{-\theta x}$, ce qui prouve que $X\sim\Gamma(2,\theta)$.
   Réciproquement, si $X\sim\Gamma(2,\theta)$, $1/X$ est bien intégrable car $\mathbb{E}[1/X]=\int_0^\infty\theta^2e^{-\theta x}dx=\theta$, et la relation (1) est bien satisfaite.

⋆⋆⋆

Exercice 2.

1. Pour $x > 0$, on a $\mathbb{P}(\min_{1\leq \ell\leq k} E_\ell \geq x) = \mathbb{P}(E_1 \geq x, \ldots, E_k \geq x) = \mathbb{P}(E_1 \geq x)^k = e^{-kx}$, car les v.a. sont indépendantes et distribuées selon la loi exponentielle de paramètre 1.
2. Pour $x > 0$, on a $\mathbb{P}(E_1/k \geq x) = \mathbb{P}(E_1 \geq kx) = e^{-kx}$, et donc $\min_{1\leq \ell\leq k} E_\ell$ suit la même loi que E_1/k.
3. Par construction, T_n est une suite croissante p.s., elle admet donc une limite $T_\infty : \Omega \to [0, +\infty]$.
4. D'après le théorème de Fubini, $\mathbb{E}[T_\infty] = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}\mathbb{E}[\xi_k] = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = +\infty$. Comme $a > 0$, $0 \leq e^{-aT_n} \leq 1$ ce qui donne la condition de domination. D'autre part, $x \mapsto e^{-ax}$ étant continue, e^{-aT_n} converge p.s vers e^{-aT_∞}. Le théorème de convergence dominée assure alors que $\mathbb{E}[e^{-aT_n}]$ converge vers $\mathbb{E}[e^{-aT_\infty}]$.
5. On a $\mathbb{E}[e^{-a\xi_1}] = \int_0^\infty e^{-ax}e^{-x}dx = \frac{1}{1+a}$. En utilisant l'indépendance de $\xi_1, \ldots, \xi_n$, on en déduit
$$\mathbb{E}[e^{-aT_n}] = \prod_{k=1}^{n} \mathbb{E}[e^{-\frac{a}{k}\xi_k}] = \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{1 + a/k}.$$
6. On a $\mathbb{E}[e^{-T_n}] = \prod_{k=1}^{n} \frac{k}{k+1} = \frac{1}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\to} 0$. Cela donne $\mathbb{E}[e^{-T_\infty}] = 0$, ce qui assure que $\mathbb{P}(T_\infty = \infty) = 1$. En particulier, pour tout $t > 0$, $\mathbb{P}(T_\infty \leq t) = 0$ et p.s. il n'y a pas d'explosion de la population en temps fini.
7. Par indépendance des variables aléatoires, on a $\mathbf{Var}(T_n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}\mathbf{Var}(\xi_k) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$. Comme $\mathbb{E}[T_n] = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$, on a $\mathbf{Var}(T_n) = \mathbb{E}[(T_n - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k})^2]$. On a $\frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{x}dx = \ln(k+1) - \ln(k) \leq \frac{1}{k}$, et donc $\ln(n+1) \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leq \ln(n+1) + 1$. Il vient que $\frac{1}{\ln(n)} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ tend vers 1 lorsque $n \to +\infty$. Comme la série $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ est convergente, on en déduit
$$\frac{1}{\ln(n)^2}\mathbf{Var}(T_n) = \mathbb{E}\left[\left(\frac{T_n}{\ln(n)} - \frac{1}{\ln(n)}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right)^2\right] \underset{n\to+\infty}{\to} 0.$$
Maintenant, on observe que $\mathbb{E}[(\frac{T_n}{\ln(n)} - 1)^2] = \frac{1}{\ln(n)^2}\mathbf{Var}(T_n) + (1 - \frac{\mathbb{E}[T_n]}{\ln(n)})^2$, ce qui prouve la convergence voulue.

⋆ ⋆ ⋆

Exercice 3.

Une matrice de covariance est symétrique positive : en calculant les mineurs principaux d'ordre 2, il vient que $1 - \rho_{ij}^2 \geq 0$ pour $i \neq j$. Le vecteur $(G_1 + G_2, G_1 + G_3, G_2 + G_3)$ est un vecteur gaussien car toute combinaison linéaire de ses coordonnées est une combinaison linéaire des coordonnées du vecteur G. Par conséquent, une condition nécessaire est suffisante pour que $G_1 + G_2$, $G_1 + G_3$, $G_2 + G_3$ est que la matrice de covariance de ce vecteur soit diagonale. On calcule $\mathbb{E}[(G_1 + G_2)(G_1 + G_3)] = \mathbb{E}[G_1^2] + \mathbb{E}[G_1G_3] + \mathbb{E}[G_2G_1] + \mathbb{E}[G_2G_3] = 1 + \rho_{13} + \rho_{12} + \rho_{23}$. De même, $\mathbb{E}[(G_1 + G_2)(G_2 + G_3)] = 1 + \rho_{12} + \rho_{13} + \rho_{23} = \mathbb{E}[(G_1 + G_3)(G_2 + G_3)]$. Par conséquent, une condition nécessaire et suffisante pour avoir l'indépendance est que
$$\rho_{12} + \rho_{13} + \rho_{23} = -1.$$
Cette condition est satisfaite par exemple si $\rho_{12} = \rho_{13} = \rho_{23} = -1/3$.

⋆ ⋆ ⋆

Exercice 4.

1. On utilise l'indication : les fonctions g_M et h_M sont continues et bornées, on a donc $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}[g_M(Y_n)] = \mathbb{E}[g_M(Y)]$ et $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}[h_M(Y_n)] = \mathbb{E}[h_M(Y)]$. De plus, pour tout n,
$$\mathbb{E}[g_M(Y_n)] \leq \mathbb{P}(Y_n \leq 0) = \mathbb{E}[\mathbf{1}_{Y_n\leq 0}] \leq \mathbb{E}[h_M(Y_n)].$$
Cela implique que $\mathbb{E}[g_M(Y)] \leq \liminf_{n\to+\infty} \mathbb{P}(Y_n \leq 0) \leq \limsup_{n\to+\infty} \mathbb{P}(Y_n \leq 0) \leq \mathbb{E}[h_M(Y)]$. Dit autrement, toute valeur d'adhérence v de la suite $(\mathbb{P}(Y_n \leq 0))_n$ satisfait $\mathbb{E}[g_M(Y)] \leq v \leq \mathbb{E}[h_M(Y)]$. Comme $\mathbb{P}(Y \leq -1/M) \leq \mathbb{E}[g_M(Y)]$ et $\mathbb{E}[h_M(Y)] \leq \mathbb{P}(Y \leq 1/M)$, il vient en passant à la limite $M \to +\infty$ (σ-additivité) que $\mathbb{P}(Y < 0) \leq v \leq \mathbb{P}(Y \leq 0)$. Comme $\mathbb{P}(Y = 0) = 0$, on a $\mathbb{P}(Y < 0) = \mathbb{P}(Y \leq 0)$. Ainsi, $\mathbb{P}(Y \leq 0)$ est la seule valeur d'adhérence possible et est la limite de la suite $(\mathbb{P}(Y_n \leq 0))_n$.
2. On a $\Phi_Z(u) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} e^{iuk} = e^{\lambda(e^{iu}-1)}$. En utilisant l'indépendance des X_i, on obtient
$$\Phi_{X_1+\cdots+X_n}(u) = \mathbb{E}[e^{iu(X_1+\cdots+X_n)}] = \left(e^{(e^{iu}-1)}\right)^n = e^{n(e^{iu}-1)}.$$
Ainsi, $X_1 + \cdots + X_n$ suit une loi de Poisson de paramètre n.
3. On a $\mathbb{P}(\bar{X}_n - 1 \leq 0) = \mathbb{P}(X_1 + \cdots + X_n \leq n) = u_n$, puisque $X_1 + \cdots + X_n$ suit une loi de Poisson de paramètre n. De plus $\mathbb{P}(\bar{X}_n - 1 \leq 0) = \mathbb{P}(\sqrt{n}(\bar{X}_n - 1) \leq 0)$. D'après le théorème de la limite centrale, $\sqrt{n}(\bar{X}_n - 1)$ converge en loi vers G. Grâce à la question 1, comme $\mathbb{P}(G = 0) = 0$, $u_n = \mathbb{P}(\sqrt{n}(\bar{X}_n - 1) \leq 0)$ converge vers $\mathbb{P}(G \leq 0) = 1/2$.
4. D'une part, comme $X_1 + \cdots + X_n$ suit une loi de Poisson de paramètre n, $\mathbb{E}[(\bar{X}_n - 1)^-] = \sum_{k=0}^{n} e^{-n} \frac{n^k}{k!}(1 - \frac{k}{n}) = \sum_{k=0}^{n} e^{-n} \frac{n^k}{k!} - \sum_{k=0}^{n-1} e^{-n} \frac{n^k}{k!} = e^{-n} \frac{n^n}{n!}$. D'autre part, par symétrie, $\mathbb{E}[G^-] = \mathbb{E}[G^+] = \int_0^\infty x \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}[-e^{-x^2/2}]_0^\infty = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$.
5. Le théorème de la limite centrale assure que $\sqrt{n}(\bar{X}_n - 1)$ converge en loi vers G. Comme la fonction $x \mapsto \min(x^-, \alpha)$ est continue bornée, cela donne la convergence voulue.
6. On a
$$0 \leq \sqrt{n}(\bar{X}_n - 1)^- - \min(\sqrt{n}(\bar{X}_n - 1)^-, \alpha) \leq \mathbf{1}_{\sqrt{n}(\bar{X}_n-1)^-\geq\alpha} \sqrt{n}(\bar{X}_n - 1)^- \leq n\frac{((\bar{X}_n - 1)^-)^2}{\alpha}.$$
En prenant l'espérance et en observant que $((\bar{X}_n - 1)^-)^2 \leq (\bar{X}_n - 1)^2$, on obtient le résultat voulu.
7. $\mathbb{E}[(\bar{X}_n - 1)^2] = \mathbf{Var}(\bar{X}_n) = \frac{1}{n^2}\mathbf{Var}(X_1 + \cdots + X_n) = \frac{1}{n}$ Soit $\varepsilon > 0$. En prenant $\alpha > 3/\varepsilon$ tel que $\mathbb{E}[G^-] - \mathbb{E}[\max(G^-, \alpha)] \leq \varepsilon/3$ et N tel que pour $n \geq N$, $|\mathbb{E}[\max(\sqrt{n}(\bar{X}_n - 1)^-, \alpha)] - \mathbb{E}[\max(G^-, \alpha)]| \leq \varepsilon/3$. Alors, on a pour $n \geq N$
$$|\mathbb{E}[\sqrt{n}(\bar{X}_n - 1)^-] - \mathbb{E}[G^-]| \leq \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon.$$
A l'aide de la question 4, on obtient $n! \sim \sqrt{2\pi n}(n/e)^n$ lorsque $n \to +\infty$.