Examen du cours de Probabilités

Mardi 16 Janvier 2024 (8h45-11h45)

Polycopié et notes de cours autorisés. Tout objet électronique est interdit.

Barême indicatif. L'ensemble de l'examen sera noté sur un barême entre 25 et 30 points, et les points seront approximativement répartis de la façon suivante : 40% pour le premier exercice et 30% pour les deux autres. Il n'est donc pas nécessaire de tout faire pour avoir 20.

⋆⋆⋆

Exercice 1. On considère une suite $(X_i)_{i\geq 1}$ i.i.d. avec $X_1 \sim \mathcal{U}([0,\theta])$ de paramètre $\theta > 0$ inconnu. Pour $u \in \mathbb{R}^*$, On cherche à approcher $\phi(u) = \mathbb{E}[e^{uX_1}]$ à l'aide des n premières valeurs de la suite. On se propose de comparer les deux approximations suivantes :

$$\phi_n(u) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} e^{uX_i} \text{ et } \widehat{\phi}_n(u) = \frac{e^{u\hat{\theta}_n} - 1}{u\hat{\theta}_n} \text{ avec } \hat{\theta}_n = \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i.$$

1. Calculer $\phi(u)$ explicitement.
2. Donner le comportement asymptotique de $\phi_n(u)$ lorsque $n \to +\infty$.
3. Montrer que $\sqrt{n}(\phi_n(u) - \phi(u))$ converge en loi vers $\mathcal{N}(0, \sigma(u,\theta)^2)$ où $\sigma(u,\theta)^2$ est une fonction à préciser.
4. Construire à l'aide de $\phi_n(u)$ et $\phi_n(2u)$ une suite convergeant presque sûrement vers $\sigma(u,\theta)^2$. Donner un intervalle de confiance asymptotique de niveau 95% pour $\phi(u)$ s'exprimant avec ces deux quantités.
5. Quelle loi suit la variable aléatoire $2X_1$? Donner le comportement asymptotique de $\hat{\theta}_n$, puis celui de $\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta)$ lorsque $n \to +\infty$.
6. Dans cette question, on utilise la factorisation suivante

$$\sqrt{n}(\widehat{\phi}_n(u) - \phi(u)) = \frac{1}{u\theta\hat{\theta}_n} \times \sqrt{n}\left(\theta e^{u\theta}(e^{u(\hat{\theta}_n - \theta)} - 1) + (e^{u\theta} - 1)(\theta - \hat{\theta}_n)\right).$$

   (a) Montrer que $\sqrt{n}[e^{u(\hat{\theta}_n-\theta)} - 1 - u(\hat{\theta}_n - \theta)]$ converge en loi vers 0.

   (b) En déduire que pour $n \to +\infty$, $\sqrt{n}(\widehat{\phi}_n(u) - \phi(u))$ converge en loi vers $\mathcal{N}(0, \hat{\sigma}(u,\theta)^2)$ et expliciter la valeur de $\hat{\sigma}(u,\theta)$.
7. Construire à l'aide de cette convergence un intervalle de confiance asymptotique de niveau 95% centré en $\widehat{\phi}_n(u)$ à l'aide de $\hat{\sigma}(u, \hat{\theta}_n)$
8. On admet que

$$\eta(x) = 3x(e^{2x} - 1) - 6(e^x - 1)^2 - 2(1 + xe^x - e^x)^2$$

   est telle que $\eta(x) > 0$ pour $x < 0$ et $\eta(x) < 0$ pour $x > 0$. Comparer les fonctions $\sigma(u,\theta)^2$ et $\hat{\sigma}(u,\theta)^2$. Dire, selon les valeurs de u, lequel des deux estimateurs est asymptotiquement le plus précis.
9. Dans un problème corrigé du manuel, on montre que $\bar{\theta}_n = \max_{1\leq i\leq n} X_i$ converge presque sûrement vers θ et que $\frac{n}{\theta}(\theta - \bar{\theta}_n)$ converge en loi vers $\mathcal{E}(1)$. On admettra ce résultat.

(a) Montrer que $(n/\bar{\theta}_n) \times (\theta - \bar{\theta}_n)$ converge en loi vers $\mathcal{E}(1)$. Puis construire un intervalle de confiance à 95% pour θ à l'aide de $\bar{\theta}_n$ (On donne $\mathbb{P}(E \leq 3) \approx 0.95$ pour $E \sim \mathcal{E}(1)$).

(b) Vérifier que pour $u > 0$ fixé, $\theta \mapsto \frac{e^{u\theta}-1}{u\theta}$ est croissante sur $\theta > 0$. En déduire un intervalle de confiance asymptotique de niveau 95% pour $\phi(u)$ construit à l'aide de $\bar{\theta}_n$. Cet intervalle est-il plus précis que les autres ?

⋆⋆⋆

Exercice 2. Soient $X_1, X_2, X_3 \sim \mathcal{N}(0,1)$ trois variables aléatoires indépendantes. On définit

$$Z_1 = \frac{X_1}{\sqrt{X_1^2 + X_2^2 + X_3^2}}, Z_2 = \frac{X_1^2 + X_2^2}{X_1^2 + X_2^2 + X_3^2}, \ Z_3 = X_1^2 + X_2^2 + X_3^2.$$

1. Donner sans calcul les lois de X_3^2 et de $X_1^2 + X_2^2$. En déduire la loi du couple (Z_2, Z_3).
2. Montrer que $\varphi(x_1, x_2, x_3) = (\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}}, \frac{x_1^2+x_2^2}{x_1^2+x_2^2+x_3^2}, x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)$ est un C^1-difféomorphisme de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ dans un ensemble à préciser, et calculer φ^{-1}.
3. Calculer la loi de (Z_1, Z_2, Z_3) (remarquer que $\varphi(x_1, \pm x_2, \pm x_3) = \varphi(x_1, x_2, x_3)$ pour utiliser la question précédente). Discuter de l'indépendance des variables aléatoires Z_1, Z_2 et Z_3. Retrouver la loi du couple (Z_2, Z_3).

⋆⋆⋆

Exercice 3. Sur un théorème de Schur

On considère $\Gamma^1, \Gamma^2 \in \mathcal{S}_d^+(\mathbb{R})$ deux matrices symétriques positives. Soient $G_1^1, \dots, G_d^1, G_1^2, \dots, G_d^2 \sim \mathcal{N}(0,1)$ indépendantes.

1. Expliquer comment construire une matrice carrée A^1 telle que $A^1(A^1)^T = \Gamma^1$. (On pourra diagonaliser Γ^1 et prendre A^1 symétrique.)
2. On note G^1 le vecteur aléatoire de dimension d de coordonnées $G_1^1, \dots, G_d^1$. Quelle est la loi du vecteur $X^1 = A^1 G^1$?
3. On construit de la même façon $X^2 = A^2 G^2$, et on définit le vecteur aléatoire Z par $Z_i = X_i^1 X_i^2$. Calculer la matrice de covariance de Z.
4. En déduire que la matrice symétrique $(\Gamma_{i,j}^1 \Gamma_{i,j}^2)_{1 \leq i,j \leq d}$ est positive (théorème de Schur).
5. Montrer que si $(\Gamma_{i,j}^1 \Gamma_{i,j}^2)_{1 \leq i,j \leq d}$ n'est pas définie positive, il existe $\alpha \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$,

$$\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^d \alpha_i X_i^1 X_i^2 = 0 \right) = 1.$$

6. On suppose désormais Γ^1 et Γ^2 définie positive. Dans ce cas A^1 et A^2 sont des matrices inversibles.
   (a) Donner la densité de G^1 puis celle de X^1. (On pourra utiliser le changement de variable $y = A^1 x$.) Vérifier que la densité de (X^1, X^2) est strictement positive sur $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$.
   (b) En déduire que $(\Gamma_{i,j}^1 \Gamma_{i,j}^2)_{1 \leq i,j \leq d}$ est définie positive.

Correction

EXERCICE 1.

1. On a $\phi(u) = \int_0^\theta e^{ux}\frac{1}{\theta}dx = \frac{e^{\theta u}-1}{\theta u}$.
2. Comme e^{uX_1} est intégrable, on peut appliquer la loi forte des grands nombres et obtenir que $\phi_n(u)$ converge p.s. vers $\phi(u)$.
3. On a $\mathbf{Var}(e^{uX_1}) = \mathbb{E}[e^{2uX_1}] - \mathbb{E}[e^{uX_1}]^2 = \phi(2u) - \phi(u)^2$. En utilisant le théorème de la limite centrale ($\mathbb{E}[e^{2uX_1}] < \infty$), il vient que $\sqrt{n}(\phi_n(u) - \phi(u))$ converge en loi vers $\mathcal{N}(0, \phi(2u) - \phi(u)^2)$.
4. En utilisant les deux questions précédentes, $\phi_n(2u) - \phi_n(u)^2$ converge p.s. vers $\mathbf{Var}(e^{uX_1})$. Il s'agit d'une variable aléatoire constante, et en utilisant le théorème de Slutsky, il vient que $\sqrt{\frac{n}{\phi_n(2u)-\phi_n(u)^2}}(\phi_n(u) - \phi(u))$ converge en loi vers $\mathcal{N}(0, 1)$. Il vient que
$$\left[\phi_n(u) - 1,96\sqrt{\frac{\phi_n(2u) - \phi_n(u)^2}{n}}\ ,\ \phi_n(u) + 1,96\sqrt{\frac{\phi_n(2u) - \phi_n(u)^2}{n}}\right]$$
est un intervalle de confiance asymptotique de niveau 95% pour $\phi(u)$.
5. Pour $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bornée mesurable, $\mathbb{E}[f(2X_1)] = \int_0^\theta f(2x)\frac{1}{\theta}dx = \int_0^{2\theta} f(x)\frac{1}{2\theta}dx$. La variable aléatoire $2X_1$ suit donc une loi uniforme $\mathcal{U}(0, 2\theta)$ par le théorème de la fonction muette. Cette loi est intégrable, et par la loi forte des grands nombres, $\hat{\theta}_n$ converge presque sûrement vers $\mathbb{E}[2X_1] = \theta$. La variable aléatoire $2X_1$ est de carré intégrable, et par le théorème de la limite centrale, $\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta)$ converge en loi vers $\mathcal{N}(0, \frac{(2\theta)^2}{12}) = \mathcal{N}(0, \frac{\theta^2}{3})$.
6. (a) On sait que $e^x - 1 - x = x\epsilon(x)$ avec $\epsilon(x) \to_{x\to 0} 0$. Il vient que $\sqrt{n}(e^{u(\hat{\theta}_n-\theta)} - 1 - u(\hat{\theta}_n - \theta)) = \sqrt{n}u(\hat{\theta}_n - \theta)\epsilon(u(\hat{\theta}_n - \theta))$. Nous savons que $\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta)$ converge en loi vers $\mathcal{N}(0, \frac{\theta^2}{3})$ et $u\epsilon(u(\hat{\theta}_n - \theta))$ converge p.s. vers 0. Par le théorème de Slutsky, $\sqrt{n}(e^{u(\hat{\theta}_n-\theta)} - 1 - u(\hat{\theta}_n - \theta))$ converge en loi vers 0.

   (b) On s'intéresse à la convergence de
$$A_n := \frac{1}{u\theta\hat{\theta}_n} \times \sqrt{n}\left(\theta e^{u\theta}u(\hat{\theta}_n - \theta) + (e^{u\theta} - 1)(\theta - \hat{\theta}_n)\right) = \frac{u\theta e^{u\theta} + 1 - e^{u\theta}}{u\theta\hat{\theta}_n} \times \sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta).$$
   Le premier facteur converge p.s. vers $\frac{u\theta e^{u\theta}+1-e^{u\theta}}{u\theta^2}$ tandis que le second converge vers en loi vers $\mathcal{N}(0, \frac{\theta^2}{3})$. On en déduit que A_n converge en loi vers $\mathcal{N}\left(0, \frac{1}{3}\left(\frac{u\theta e^{u\theta}+1-e^{u\theta}}{u\theta}\right)^2\right)$. D'après la question précédente $\sqrt{n}(\widehat{\phi}_n(u) - \phi(u)) - A_n$ converge en loi vers 0, et par le théorème de Slutsky, il vient que $\sqrt{n}(\widehat{\phi}_n(u) - \phi(u))$ converge en loi vers $\mathcal{N}\left(0, \frac{1}{3}\left(\frac{u\theta e^{u\theta}+1-e^{u\theta}}{u\theta}\right)^2\right)$, i.e. $\hat{\sigma}(u, \theta)^2 = \frac{1}{3}\left(\frac{u\theta e^{u\theta}+1-e^{u\theta}}{u\theta}\right)^2$.
7. La fonction $\hat{\sigma}(u, \theta)^2$ est continue en θ, donc $\hat{\sigma}(u, \hat{\theta}_n)^2$ converge p.s. vers $\hat{\sigma}(u, \theta)^2$. Par le théorème de Slutsky, $\sqrt{\frac{n}{\hat{\sigma}(u,\hat{\theta}_n)^2}}(\widehat{\phi}_n(u) - \phi(u))$ converge p.s. vers $\mathcal{N}(0, 1)$. On en déduit que
$$\left[\widehat{\phi}_n(u) - 1,96\sqrt{\frac{\hat{\sigma}(u, \hat{\theta}_n)^2}{n}}\ ,\ \phi_n(u) + 1,96\sqrt{\frac{\hat{\sigma}(u, \hat{\theta}_n)^2}{n}}\right]$$
est un intervalle de confinace asymptotique de niveau 95% pour $\phi(u)$.

8. On a $\sigma(u,\theta)^2 = \phi(2u) - \phi(u)^2 = \frac{\theta u(e^{2\theta u}-1)-2(e^{\theta u}-1)^2}{2\theta^2 u^2}$ et donc

$$\sigma(u,\theta)^2 - \hat{\sigma}(u,\theta)^2 = \frac{\eta(\theta u)}{6\theta^2 u^2}.$$

En utilisant le résultat admis, $\sigma(u,\theta)^2 > \hat{\sigma}(u,\theta)^2$ pour $u < 0$ et $\sigma(u,\theta)^2 < \hat{\sigma}(u,\theta)^2$ pour $u > 0$. Ainsi, l'estimateur $\phi_n(u)$ est plus précis que $\widehat{\phi}_n(u)$ pour $u > 0$ (intervalle de confiance plus étroit) et moins précis pour $u < 0$.

9. (a) On applique à nouveau le théorème de Slustky car $\bar{\theta}_n$ converge p.s. vers θ (variable aléatoire constante). Pour n suffisamment grand, on a $\mathbb{P}(\frac{n}{\bar{\theta}_n}(\theta-\bar{\theta}_n) \leq 3) \approx \frac{95}{100}$ et donc $\theta \in [\bar{\theta}_n, \bar{\theta}_n(1+3/n)]$ avec niveau de confiance 95%.

   (b) En dérivant par rapport à θ, on obtient $\frac{1+u\theta e^{u\theta}-e^{u\theta}}{u\theta^2}$. La fonction $x \mapsto 1 + xe^x - e^x$ a pour dérivée $xe^x > 0$ pour $x > 0$ et vaut 0 en 0 : elle est donc positive. En utilisant la question précédente, il vient que

$$\phi(u) = \frac{e^{u\theta}-1}{u\theta} \in \left[\frac{e^{u\bar{\theta}_n}-1}{u\bar{\theta}_n}, \frac{e^{u\bar{\theta}_n(1+3/n)}-1}{u\bar{\theta}_n(1+3/n)}\right]$$

   avec niveau de confiance 95% lorsque $n \to \infty$. Cet intervalle est à préférer car sa largeur est d'ordre $1/n$ alors que les autres intervalles de confiances ont une largeur d'ordre $1/\sqrt{n}$.

$\star\star\star$

Exercice 2.

1. Comme $X_3 \sim \mathcal{N}(0,1)$, X_3^2 suit la loi du $\chi^2(1) = \Gamma(1/2, 1/2)$, de même que X_1^2 et X_2^2. Par indépendance de X_1 et X_2, et en utilisant un résultat du cours (Proposition 3.4.4), il vient que $X_1^2 + X_2^2 \sim \Gamma(1, 1/2)$. Comme $X_1^2 + X_2^2$ est indépendante de X_3^2, il vient en utilisant ce même résultat que Z_2 est indépendante de Z_3 avec $Z_2 \sim \beta(1, 1/2)$ et $Z_3 \sim \Gamma(3/2, 1/2)$.

2. Soit $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ et $z = \varphi(x)$. Il vient

$$x_1 = z_1\sqrt{z_3},\ x_1^2 + x_2^2 = z_2 z_3,\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = z_3,$$

   puis

$$x_1 = z_1\sqrt{z_3},\ x_2^2 = z_3(z_2 - z_1^2),\ x_3^2 = z_3(1 - z_2).$$

   En particulier, $z_1^2 < z_2 < 1$ et $z_3 > 0$ donc $\varphi(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*) \subset \mathcal{D}$, où $\mathcal{D} = \{(z_1, z_2, z_3) \in]-1, 1[\times \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* : z_1^2 < z_2 < 1\}$. On a $\varphi^{-1}(z_1, z_2, z_3) = (z_1\sqrt{z_3}, \sqrt{z_3(z_2 - z_1^2)}, \sqrt{z_3(1 - z_2)})$ et $\varphi^{-1}(\mathcal{D}) \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ ce qui prouve que φ^{-1} est une bijection de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ dans $\mathcal{D}$. De plus, φ et φ^{-1} sont clairement C^1 sur leurs domaines.

3. Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mesurable bornée. Par indépendance de X_1, X_2 et X_3, il vient :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[f(Z_1, Z_2, Z_3)] &= \int_{\mathbb{R}^3} f(\varphi(x_1, x_2, x_3)) \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} e^{-\frac{x_1^2+x_2^2+x_3^2}{2}} dx_1 dx_2 dx_3 \\ &= 4\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}_+^*} f(\varphi(x_1, x_2, x_3)) \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} e^{-\frac{x_1^2+x_2^2+x_3^2}{2}} dx_1 dx_2 dx_3.\end{aligned}$$

On effectue le changement de variable et calcule

$$\begin{aligned}
Jac(\varphi^{-1})(z_1,z_2,z_3) &= \det \begin{bmatrix} \sqrt{z_3} & 0 & \frac{z_1}{2\sqrt{z_3}} \\ -\frac{z_1 z_3}{\sqrt{z_3(z_2-z_1^2)}} & \frac{z_3}{2\sqrt{z_3(z_2-z_1^2)}} & \frac{z_2-z_1^2}{2\sqrt{z_3(z_2-z_1^2)}} \\ 0 & -\frac{z_3}{2\sqrt{z_3(1-z_2)}} & \frac{1-z_2}{2\sqrt{z_3(1-z_2)}} \end{bmatrix} \\
&= \sqrt{z_3}\frac{z_3(1-z_2)+z_3(z_2-z_1^2)}{4z_3\sqrt{(1-z_2)(z_2-z_1^2)}} + \frac{z_1 z_3}{\sqrt{z_3(z_2-z_1^2)}}\frac{z_1 z_3}{4z_3\sqrt{1-z_2}} \\
&= \frac{\sqrt{z_3}}{4\sqrt{(1-z_2)(z_2-z_1^2)}}(1-z_1^2+z_1^2) = \frac{\sqrt{z_3}}{4\sqrt{(1-z_2)(z_2-z_1^2)}}.
\end{aligned}$$

Il vient

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[f(Z_1,Z_2,Z_3)] &= 4\int_{\mathcal{D}} f(z_1,z_2,z_3)\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}e^{-\frac{z_3}{2}}\frac{\sqrt{z_3}}{4\sqrt{(1-z_2)(z_2-z_1^2)}}dz_1dz_2dz_3 \\
&= \int_{-1}^{1}\int_0^1\int_0^\infty f(z_1,z_2,z_3)\frac{\mathbf{1}_{z_1^2<z_2}}{\sqrt{(1-z_2)(z_2-z_1^2)}}\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}z_3^{1/2}e^{-\frac{z_3}{2}}dz_1dz_2dz_3
\end{aligned}$$

Ainsi (Z_1,Z_2,Z_3) suit la loi de densité $\mathbf{1}_{z_1^2<z_2<1}\mathbf{1}_{z_3>0}\frac{1}{\sqrt{(1-z_2)(z_2-z_1^2)}}\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}z_3^{1/2}e^{-\frac{z_3}{2}}$. On observe que c'est le produit d'une fonction de z_3 et d'une fonction de (z_1,z_2) donc Z_3 est indépendante de (Z_1,Z_2). En revanche, Z_1 et Z_2 ne sont pas indépendantes (l'indicatrice $\mathbf{1}_{z_1^2<z_2<1}$ ne s'écrit pas comme un produit $p_1(z_1)p_2(z_2)$). Par la formule des densités marginales, (Z_2,Z_3) suit la loi de densité

$$\begin{aligned}
&\int_{-1}^{1}\mathbf{1}_{z_1^2<z_2<1}\mathbf{1}_{z_3>0}\frac{1}{\sqrt{(1-z_2)(z_2-z_1^2)}}\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}z_3^{1/2}e^{-\frac{z_3}{2}}dz_1 \\
&= \mathbf{1}_{z_2<1}\mathbf{1}_{z_3>0}\frac{1}{\sqrt{1-z_2}}\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}z_3^{1/2}e^{-\frac{z_3}{2}}
\end{aligned}$$

car $\int_{-z_2}^{z_2}\frac{1}{\sqrt{z_2-z_1^2}}dz_1 = \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(\theta)}}\cos(\theta)d\theta = \pi$ en posant $z_1 = \sqrt{z_2}\sin(\theta)$. On retrouve que Z_2 suit une loi $\beta(1,1/2)$ indépendante de $Z_3 \sim \Gamma(3/2,1/2)$.

⋆⋆⋆

Exercice 3.

1. En diagonalisant, on a $\Gamma^1 = O^1\Delta^1(O^1)^T$, où $\Delta_1 = diag(\delta_1,\ldots,\delta_d)$ est une matrice diagonale et O^1 une matrice orthogonale. En prenant $A^1 = O^1\sqrt{\Delta^1}(O^1)^T$ avec $\sqrt{\Delta_1} = diag(\sqrt{\delta_1},\ldots,\sqrt{\delta_d})$, on obtient le résultat voulu. D'autres choix pour A^1 sont possible, comme avec la décomposition de Cholesky.

2. Par indépendance, G^1 est un vecteur gaussien de loi $\mathcal{N}_d(0,I_d)$. En utilisant le résultat sur la transformation linéaire de vecteurs gaussiens, il vient que $X^1 \sim \mathcal{N}_d(0,A^1I_d(A^1)^T) = \mathcal{N}_d(0,\Gamma^1)$

3. Par indépendance, $\mathbb{E}[Z_i] = \mathbb{E}[X_i^1]\mathbb{E}[X_i^2] = 0$. Il vient $cov(Z_i,Z_j) = \mathbb{E}[Z_iZ_j] = \mathbb{E}[X_i^1X_j^1X_i^2X_j^2] = \mathbb{E}[X_i^1X_j^1]\mathbb{E}[X_i^2X_j^2] = \Gamma^1_{i,j}\Gamma^2_{i,j}$. La matrice de covariance est donc $(\Gamma^1_{i,j}\Gamma^2_{i,j})_{1\le i,j\le d}$.

4. Une matrice de covariance est symétrique positive.

5. Si la matrice n'est pas définie positive, il existe un vecteur α non nul tel que $\sum_{1\leq i,j\leq d}\Gamma^1_{i,j}\Gamma^2_{i,j}\alpha_i\alpha_j = 0$, c'est à dire tel que $\mathbf{Var}\left(\sum_{i=1}^d \alpha_i X_i^1 X_i^2\right) = 0$. Comme $\mathbb{E}[Z_i] = 0$, on a

$$\mathbf{Var}\left(\sum_{i=1}^d \alpha_i X_i^1 X_i^2\right) = \mathbb{E}\left[\left(\sum_{i=1}^d \alpha_i X_i^1 X_i^2\right)^2\right],$$

et donc $\sum_{i=1}^d \alpha_i X_i^1 X_i^2 = 0$ presque sûrement.

6. (a) Par indépendence, G^1 suit la densité

$$p(x) = \prod_{i=1}^d \frac{e^{-\frac{x_i^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}}e^{-\frac{\|x\|_2^2}{2}}.$$

La transformation linéaire $x \mapsto A^1 x$ est bijective sur $\mathbb{R}^d$ de Jacobien $\det(A^1) = \sqrt{\det(\Gamma^1)}$. Il vient pour $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ bornée mesurable

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[f(G^1)] &= \int_{\mathbb{R}^d} f(A^1 x)\frac{1}{(2\pi)^{d/2}}e^{-\frac{\|x\|_2^2}{2}}dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} f(y)\frac{1}{(2\pi)^{d/2}}e^{-\frac{\|(A^1)^{-1}y\|_2^2}{2}}\frac{1}{\sqrt{\det(\Gamma^1)}}dy \quad = \int_{\mathbb{R}^d} f(y)\frac{1}{(2\pi)^{d/2}\sqrt{\det(\Gamma^1)}}e^{-\frac{y\cdot(\Gamma^1)^{-1}y}{2}}dy.\end{aligned}$$

Donc X^1 suit la loi de densité $\mathbb{R}^d \ni y \mapsto \frac{1}{(2\pi)^{d/2}\sqrt{\det(\Gamma^1)}}e^{-\frac{y\cdot(\Gamma^1)^{-1}y}{2}}$ qui est strictement positive.

(b) Les variables aléatoires X^1 et X^2 sont indépendantes et à densité strictement positive sur $\mathbb{R}^d$. Si $\alpha \in \mathbb{R}^d$ est tel que $\sum_{i=1}^d \alpha_i X_i^1 X_i^2 = 0$ p.s., cela est équivalent à avoir $\sum_{i=1}^d \alpha_i x_i^1 x_i^2 = 0$ $dx^1 dx^2$-presque partout, et nécessairement $\alpha = 0$. Cela prouve par contraposée que $(\Gamma^1_{i,j}\Gamma^2_{i,j})_{1\leq i,j\leq d}$ est définie positive.