Examen du cours de Probabilités

Mardi 21 Janvier 2025 (8h45-11h45)

Polycopié et notes de cours autorisés. Tout objet électronique est interdit.

Barême indicatif. L'ensemble de l'examen sera noté sur un barême entre 25 et 30 points, et les points seront approximativement répartis de la façon suivante: 40% pour le premier exercice, 20% pour le second et 40% pour le troisième. Il n'est donc pas nécessaire de tout faire pour avoir 20.

⋆⋆⋆

Exercice 1. Soit $\alpha > 0$, $p_\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ définie par $p_\alpha(x) = \frac{1}{2\alpha}\exp(-|x|/\alpha)$ pour $x \in \mathbb{R}$. On note X une variable aléatoire de densité p_α.

1. Vérifier que p_α est une densité de probabilité. Montrer que X^k est intégrable pour $k \in \mathbb{N}^*$.
2. Calculer la densité de la loi de $|X|$, puis celle de X/α.
3. Calculer $\mathbb{E}[X]$, $\mathbb{E}[X^2]$ puis $\mathbf{Var}(X)$. Donner une formule pour $\mathbb{E}[X^k]$ pour $k \in \mathbb{N}^*$.
4. Donner la loi de $\mathbf{1}_{X\geq 0}$, et montrer que $|X|$ est indépendante de $\mathbf{1}_{X\geq 0}$ (Indication: Calculer $\mathbb{E}[g(|X|)h(\mathbf{1}_{X\geq 0})]$ pour $g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bornées mesurables.
5. Soit $U \sim \mathcal{U}([0,1])$. Montrer que $Y = \alpha\left(\mathbf{1}_{U<1/2}\log(2U) - \mathbf{1}_{U>1/2}\log(2U-1)\right)$ suit la loi de densité p_α.
6. On considère une suite $(X_i)_{i\geq 1}$ i.i.d. de loi de densité p_α. Donner le comportement asymptotique de $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$, de $\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^n X_i$, puis celui de $\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^n \begin{pmatrix} X_i \\ X_i^3 \end{pmatrix}$.

On souhaite estimer le paramètre α à l'aide de $X_1, \dots, X_n$. On note, pour $p, n \in \mathbb{N}^*$, $M_n^p = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n |X_k|^p$.

7. Donner le comportement asymptotique de M_n^1 et M_n^2 lorsque $n \to \infty$.
8. Montrer que $\sqrt{n}\frac{M_n^1 - \alpha}{\sqrt{M_n^2 - (M_n^1)^2}}$ converge en loi vers $\mathcal{N}(0,1)$, puis construire un intervalle de confiance asymptotique de niveau 95% pour α.
9. Donner le comportement asymptotique de $\sqrt{n}\frac{M_n^2 - 2\alpha^2}{\sqrt{M_n^4 - (M_n^2)^2}}$ lorsque $n \to \infty$, puis construire un second intervalle de confiance asymptotique de niveau 95% pour α.
10. Comparer les demi-largeurs asymptotiques de ces intervalles et dire lequel des deux est le plus précis.

⋆⋆⋆

Exercice 2. Soient $U, V \sim \mathcal{U}([0,1])$ deux variables aléatoires indépendantes. On définit $(X,Y) = \varphi(U,V)$ où

$$\varphi(u,v) = \left(\frac{u}{u+\sqrt{v}}, u+\sqrt{v}\right),\ u,v>0.$$

1. Calculer $\mathbb{P}(X < 1/2)$.
2. Calculer l'image de l'ensemble $]0,1[\times]0,1[$ par φ, c'est à dire $\mathcal{O}' = \varphi(]0,1[\times]0,1[)$. Montrer que $\mathcal{O}'$ est un sous-ensemble strict de $]0,1[\times]0,2[$, et donner l'application réciproque $\varphi^{-1}(x,y)$ pour $(x,y) \in \mathcal{O}'$.
3. Calculer la loi de (X,Y).

4. Les variables X et Y sont-elles indépendantes? Calculer la loi de X et retrouver la valeur de $\mathbb{P}(X < 1/2)$.

⋆⋆⋆

Exercice 3. L'objectif de cet exercice est de prouver la loi forte des grands nombres en suivant la preuve de Nicolas Curien (2021, preprint arxiv 2109.04315). Il est découpé en trois parties indépendantes qui peuvent être traitées séparément.

Partie 1. Cette partie a pour but de montrer que la loi forte des grands nombres est équivalente au lemme suivant.

Lemme 1. *Soit $(X_i)_{i\geq 1}$ une suite i.i.d. de variables aléatoires réelles intégrables telles que $\mathbb{E}[X_1] > 0$. Alors, $\inf_{n\geq 0}\sum_{k=1}^n X_k$ est fini presque sûrement, c'est à dire $\mathbb{P}\left(\inf_{n\geq 0}\sum_{k=1}^n X_k > -\infty\right) = 1$ (convention $\sum_{k=1}^n X_k = 0$ pour $n = 0$).*

1. On suppose le lemme vrai. On considère $(Y_i)_{i\geq 1}$ une suite i.i.d. de variables aléatoires réelles intégrables.
   (a) Soit $c < \mathbb{E}[Y_1]$. Montrer que $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n Y_k \geq c + \frac{1}{n}\inf_{m\geq 0}\sum_{k=1}^m (Y_k - c)$. En conclure que $\liminf_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n Y_k \geq \mathbb{E}[Y_1]$, presque sûrement.[1]
   (b) En déduire que $\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n Y_k \leq \mathbb{E}[Y_1]$, p.s. puis la loi forte des grands nombres.
2. On suppose la loi forte des grands nombres vraie. On considère $(X_i)_{i\geq 1}$ une suite i.i.d. de variables aléatoires réelles intégrables telles que $\mathbb{E}[X_1] > 0$. Donner le comportement asymptotique de $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n X_k$ lorsque $n\to\infty$. En déduire le comportement asymptotique de $\sum_{k=1}^n X_k$, puis que $\inf_{n\geq 0}\sum_{k=1}^n X_k > -\infty$, p.s.

Partie 2. Cette partie a pour but de montrer qu'il suffit de prouver le Lemme 1 pour des variables majorées par une constante $C > 0$. On considère $(X_i)_{i\geq 1}$ une suite i.i.d. de variables aléatoires réelles intégrables telles que $\mathbb{E}[X_1] > 0$.

3. Montrer que $\lim_{C\to+\infty}\mathbb{E}[X_1\mathbf{1}_{X_1\leq C}] = \mathbb{E}[X_1]$, puis qu'il existe $C > 0$ tel que $\mathbb{E}[X_1\mathbf{1}_{X_1\leq C}] > 0$.
4. Montrer que pour $C > 0$, $\inf_{n\geq 0}\sum_{k=1}^n X_k \geq \inf_{n\geq 0}\sum_{k=1}^n X_k\mathbf{1}_{X_k\leq C}$. Conclure.

Partie 3. Le but de cette partie est de prouver le Lemme 1. On considère $(X_i)_{i\geq 1}$ une suite i.i.d. de variables aléatoires réelles intégrables telles que $\mathbb{E}[X_1] > 0$ et $\mathbb{P}(X_1 \leq C) = 1$ pour un certain $C > 0$. On pose $S_0 = 0$ et $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$ pour $n \geq 1$. On dit que n est un record si $S_n = \min_{0\leq k\leq n} S_k$ et on s'intéresse au nombre de records $N : \Omega \to \mathbb{N}\cup\{\infty\}$ défini par $N = \sum_{n=0}^\infty \mathbf{1}_{\{S_n = \min_{0\leq k\leq n} S_k\}}$.

5. Montrer que $\{N < \infty\} \subset \{\inf_{n\geq 0} S_n > -\infty\}$.

Ainsi, il suffit de prouver $\mathbb{P}(N < \infty) = 1$ pour prouver le Lemme 1. C'est le but des questions suivantes.

6. (a) Montrer que $\mathbb{P}(S_n = \min_{0\leq k\leq n} S_k) = \mathbb{P}(S_n - S_{n-k} \leq 0, 0 \leq k \leq n)$.
   (b) Pour $n \in \mathbb{N}$, montrer que $(S_n - S_{n-k})_{0\leq k\leq n}$ a même loi que $(S_k)_{0\leq k\leq n}$.
   (c) En déduire que $\mathbb{P}(S_n = \min_{0\leq k\leq n} S_k) = \mathbb{P}(T > n)$ où $T = \inf\{k \geq 0 : S_k > 0\}$.
7. Montrer que $\mathbb{E}[T] = \sum_{n=0}^\infty \mathbb{P}(T > n)$ puis que $\mathbb{E}[N] = \mathbb{E}[T]$.
8. Montrer que $S_{\min(T,n+1)} - S_{\min(T,n)} = \mathbf{1}_{T>n}X_{n+1}$, pour $n \geq 0$.
9. Exprimer l'événement $\{T > n\}$ à l'aide de $(X_1, \ldots, X_n)$. En déduire que $\mathbb{E}[S_{\min(T,n+1)}] - \mathbb{E}[S_{\min(T,n)}] = \mathbb{P}(T > n)\mathbb{E}[X_1]$ puis que $\mathbb{E}[S_{\min(T,n)}] = \mathbb{E}[X_1]\sum_{k=0}^{n-1}\mathbb{P}(T > k)$ pour $n \geq 1$.
10. Montrer que $S_{\min(T,n)} \leq C$ preque sûrement, et conclure.

---

[1] On rappelle que pour une suite de réels $(u_n)_{n\geq 1}$, $\liminf_{n\to\infty} = \lim_{n\to\infty}(\inf_{p\geq n} u_p)$ et $\limsup_{n\to\infty} = \lim_{n\to\infty}(\sup_{p\geq n} u_p)$.

Correction

EXERCICE 1.

1. La fonction p_α est positive et par parité $\int_{\mathbb{R}} p(x)dx = 2\int_0^\infty \frac{1}{2\alpha}e^{-x/\alpha}dx = \int_0^\infty e^{-y}dy = 1$. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $x \mapsto |x|^k e^{-|x|/\alpha}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$, donc X^k est bien intégrable.

2. Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mesurable bornée. On a $\mathbb{E}[g(|X|)] = \int_{\mathbb{R}} g(|x|)\frac{1}{2\alpha}e^{-|x|/\alpha}dx = \int_0^\infty \frac{1}{\alpha}g(x)e^{-x/\alpha}dx$ par parité. Donc $|X| \sim \mathcal{E}(1/\alpha)$. On a aussi $\mathbb{E}[g(X/\alpha)] = \int_{\mathbb{R}} g(x/\alpha)\frac{1}{2\alpha}e^{-|x|/\alpha}dx = \int_{\mathbb{R}} g(y)\frac{1}{2}e^{-|y|}dy$, donc X/α suit la loi de densité p_1.

3. On a $\mathbb{E}[X] = \int_{\mathbb{R}} xp(x)dx = 0$, car $x \mapsto xp(x)$ est impaire. On a $\mathbf{Var}(X) = \mathbb{E}[X^2] = \alpha^2\mathbb{E}[(X/\alpha)^2] = \alpha^2\int_0^\infty x^2e^{-|x|}dx = 2\alpha^2$, en utilisant le moment d'ordre 2 de la loi exponentielle. Plus généralement, on a pour $k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{E}[X^{2k+1}] = 0$ et $\mathbb{E}[X^{2k}] = \alpha^{2k}\int_0^\infty x^{2k}e^{-x}dx = \alpha^{2k}\Gamma(2k+1) = \alpha^{2k}(2k)!$.

4. Pour $g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mesurable bornée, on a
$$\begin{aligned}\mathbb{E}[g(|X|)h(\mathbf{1}_{X\geq 0})] &= \int_{-\infty}^0 g(-x)h(0)\frac{e^{x/\alpha}}{2\alpha}dx + \int_0^{+\infty} g(x)h(1)\frac{e^{-x/\alpha}}{2\alpha}dx \\ &= \frac{h(0)+h(1)}{2}\int_0^{+\infty} g(x)\frac{e^{-x/\alpha}}{\alpha}dx = \frac{h(0)+h(1)}{2}\mathbb{E}[g(|X|)].\end{aligned}$$
Cela prouve que $\mathbf{1}_{X\geq 0} \sim \mathcal{B}(1/2)$ et l'indépendance voulue.

5. On utilise le théorème de la fonction muette. Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bornée mesurable. On a
$$\begin{aligned}\mathbb{E}[g(Y)] &= \int_0^{1/2} g(\alpha\log(2u))du + \int_{1/2}^1 g(-\alpha\log(2u-1))du \\ &= \int_{-\infty}^0 g(v)\frac{1}{2\alpha}e^{v/\alpha}dv + \int_{+\infty}^0 g(w)\frac{-1}{2\alpha}e^{-w/\alpha}dw = \int_{-\infty}^\infty g(v)\frac{1}{2\alpha}e^{-|v|/\alpha}dv,\end{aligned}$$
ce qui prouve le résultat.

6. Comme X_1 est centrée et de carré intégrable, la loi forte des grands nombres assure que $\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^n X_i$ converge p.s. vers 0 et le théorème de la limite centrale assure que $\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^n X_i$ converge en loi vers $\mathcal{N}(0, 2\alpha^2)$. De même, le théorème de la limite centrale assure que $\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^n \begin{pmatrix} X_i \\ X_i^3 \end{pmatrix}$ converge en loi vers le vecteur Gaussien centré $\mathcal{N}_2(0,\Gamma)$, où Γ est la matrice de covariance de $\begin{pmatrix} X_1 \\ X_1^3 \end{pmatrix}$. Ainsi, $\Gamma_{11} = 2\alpha^2$, $\Gamma_{22} = \alpha^6 \times 6! = 720\alpha^6$ et $\Gamma_{12} = \mathbb{E}[X_1^4] = \alpha^4 \times 4! = 24\alpha^4$.

7. Par la loi forte des grands nombres, $M_n^1 \to \alpha$ et $M_n^2 \to 2\alpha^2$, presque sûrement.

8. Par le théorème de la limite centrale, $\sqrt{n}\frac{M_n^1-\alpha}{\sqrt{\mathbf{Var}(|X_1|)}} \to_{n\to\infty} \mathcal{N}(0,1)$ en loi. Par la question précédente $\frac{\sqrt{\mathbf{Var}(|X_1|)}}{\sqrt{M_n^2-(M_n^1)^2}} \to_{n\to\infty} 1$, presque sûrement. En utilisant le théorème de Slutsky, il vient que $\left(\sqrt{n}\frac{M_n^1-\alpha}{\sqrt{\mathbf{Var}(|X_1|)}}, \frac{\sqrt{\mathbf{Var}(|X_1|)}}{\sqrt{M_n^2-(M_n^1)^2}}\right)$ converge en loi vers $(\mathcal{N}(0,1), 1)$. Le produit étant une fonction continue, on en déduit que $\sqrt{n}\frac{M_n^1-\alpha}{\sqrt{M_n^2-(M_n^1)^2}}$ converge en loi vers $\mathcal{N}(0,1)$ lorsque $n \to \infty$. On en déduit que
$$\left[M_n^1 - 1,96\sqrt{\frac{M_n^2-(M_n^1)^2}{n}}, M_n^1 + 1,96\sqrt{\frac{M_n^2-(M_n^1)^2}{n}}\right]$$
est un intervalle de confiance asymptotique de niveau 95% pour α.

9. Avec le même raisonnement qu'à la question précédente, on obtient que $\sqrt{n}\frac{M_n^2-2\alpha^2}{\sqrt{\mathbf{Var}((X_1)^2)}}$ puis que $\sqrt{n}\frac{M_n^2-2\alpha^2}{\sqrt{M_n^4-(M_n^2)^2}}$ convergent en loi vers $\mathcal{N}(0,1)$. On en déduit que

$$\left[M_n^2 - 1,96\sqrt{\frac{M_n^4-(M_n^2)^2}{n}}, M_n^2 + 1,96\sqrt{\frac{M_n^4-(M_n^2)^2}{n}}\right]$$

est un intervalle de confiance asymptotique de niveau 95% pour $2\alpha^2$, et donc que

$$\left[\sqrt{\max\left(\frac{M_n^2}{2} - 0,98\sqrt{\frac{M_n^4-(M_n^2)^2}{n}}, 0\right)}, \sqrt{\frac{M_n^2}{2} + 0,98\sqrt{\frac{M_n^4-(M_n^2)^2}{n}}}\right]$$

est un intervalle de confiance asymptotique de niveau 95% pour α.

10. On compare les demi-largeurs asymptotiques: $1,96\sqrt{\frac{M_n^2-(M_n^1)^2}{n}} \sim \frac{1,96}{\sqrt{n}}\alpha$ pour le premier intervalle et $\frac{0,98}{2\sqrt{n}}\frac{\sqrt{24\alpha^4-4\alpha^4}}{\alpha} = \frac{1,96}{\sqrt{n}}\alpha\frac{\sqrt{20}}{4}$ pour le second, en utilisant que $\sqrt{\alpha^2+x} = \alpha + \frac{x}{2\alpha} + o(x)$ lorsque $x \to 0$. Comme $\frac{\sqrt{20}}{4} > 1$, le second intervalle de confiance est moins précis.

⋆⋆⋆

Exercice 2.

1. $\mathbb{P}(X < 1/2) = \mathbb{P}(U < \sqrt{V}) = \mathbb{E}[\mathbf{1}_{U<\sqrt{V}}] = \int_0^1\int_0^1 \mathbf{1}_{u<\sqrt{v}}dudv = \int_0^1 \sqrt{v}dv = 2/3$.

2. Soient $u, v \in]0,1[$. On a $\sqrt{v} \in]0,1[$ et donc $\varphi(u,v) \in]0,1[\times]0,2[$. Soient $x \in]0,1[, y \in]0,2[$ tels qu'il existe $u, v \in]0,1[$ verifiant $(x,y) = \varphi(u,v)$. Il vient $u = xy$ et $\sqrt{v} = y - xy$. Ceci est possible si, et seulement si $xy < 1$ et $y(1-x) < 1$ en quel cas on obtient $(u,v) = \varphi^{-1}(x,y) := (xy, y^2(1-x)^2)$. Ainsi, il vient

$$\mathcal{O}' = \{(x,y) \in]0,1[\times]0,2[: y < \min(1/x, 1/(1-x))\}.$$

3. On commence par calculer le jacobien de φ^{-1}:

$$Jac(\varphi^{-1})(x,y) = \det\begin{bmatrix} y & x \\ -2y^2(1-x) & 2y(1-x)^2\end{bmatrix} = 2y^2(1-x)^2 + 2y^2x(1-x) = 2y^2(1-x).$$

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction bornée mesurable. Par le théorème

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[f(X,Y)] &= \int_0^1\int_0^1 f(\varphi(u,v))dudv \\ &= \int_{\mathcal{O}} f(x,y)2y^2(1-x)dxdy = \int_0^1\int_0^2 f(x,y)2y^2(1-x)\mathbf{1}_{y<\min(1/x,1/(1-x))}dxdy\end{aligned}$$

Ainsi, (X,Y) suis la loi de densité $\mathbf{1}_{0<x<1}\mathbf{1}_{0<y<2}2y^2(1-x)\mathbf{1}_{y<\min(1/x,1/(1-x))}$ par le théorème de la fonction muette.

4. La fonction indicatrice $\mathbf{1}_{y<\min(1/x,1/(1-x))}$ ne peut s'écrire sous la forme d'un produit $\psi_1(x)\psi_2(y)$ et donc X et Y ne sont pas indépendantes. En utilisant la formule des densités marginales,

$$\mathbf{1}_{0<x<1}\int_0^2 2y^2(1-x)\mathbf{1}_{y<\min(1/x,1/(1-x))}dy = \mathbf{1}_{0<x<1}(1-x)\frac{2}{3}\min(1/x,1/(1-x))^3$$

est la densité de X puisque $\min(1/x, 1/(1-x)) \leq 2$ pour $x \in]0,1[$. On retrouve bien $\mathbb{P}(X < 1/2) = \frac{2}{3}\int_0^{1/2}\frac{1}{(1-x)^2}dx = \frac{2}{3}$.

⋆⋆⋆

EXERCICE 3.

1. (a) La première inégalité découle de $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n Y_k = c+\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n (Y_k-c)$ et $\sum_{k=1}^n (Y_k-c) \geq \inf_{m\geq 0}\sum_{k=1}^m (Y_k-c)$. D'après le Lemme 1, $\inf_{m\geq 0}\sum_{k=1}^m (Y_k-c) > -\infty$ p.s. donc $\frac{1}{n}\inf_{m\geq 0}\sum_{k=1}^m (Y_k-c) \to 0$ p.s. lorsque $n\to\infty$. Il vient que $\liminf \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n Y_k \geq c$ p.s. Comme $c < \mathbb{E}[Y_1]$ est arbitraire, on en déduit que $\liminf_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n Y_k \geq \mathbb{E}[Y_1]$ p.s.

   (b) On applique la question précédente à $-Y_k$: $\liminf_{n\to+\infty} -\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n Y_k \geq \mathbb{E}[-Y_1]$ p.s. et donc $\limsup_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n Y_k \leq \mathbb{E}[Y_1]$ p.s. On en déduit que $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n Y_k = \mathbb{E}[Y_1]$ p.s.

2. La loi forte des grands nombres assure que $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n X_k \to_{n\to\infty} \mathbb{E}[X_1]$ p.s. et donc que $\sum_{k=1}^n X_k \to_{n\to\infty} +\infty$ p.s., puisque $\mathbb{E}[X_1]>0$. Or, toute suite de réels s_n telle que $s_n \to_{n\to\infty} +\infty$ satisfait $\inf_{n\geq 0} s_n > -\infty$, ce qui prouve que $\inf_{n\geq 0}\sum_{k=1}^n X_k > -\infty$ p.s.

3. On a $|X_1\mathbf{1}_{X_1\leq C}| \leq |X_1|$ et $X_1\mathbf{1}_{X_1\leq C} \to_{C\to+\infty} X_1$ p.s. Par convergence dominée, il vient $\mathbb{E}[X_1\mathbf{1}_{X_1\leq C}] \to_{C\to+\infty} \mathbb{E}[X_1]$. Comme $\mathbb{E}[X_1]>0$, il existe $C>0$ tel que $\mathbb{E}[X_1\mathbf{1}_{X_1\leq C}]>0$.

4. Comme $C>0$, on a $X_k \geq X_k\mathbf{1}_{X_k\leq C}$ puis $\sum_{k=1}^n X_k \geq \sum_{k=1}^n X_k\mathbf{1}_{X_k\leq C}$. On obtient le résultat en prenant l'infimum sur n. Si le Lemme 1 est vrai pour des v.a. majorées par $C>0$ alors il est aussi vrai sans l'hypothèse de majoration puisque $\inf_{n\geq 0}\sum_{k=1}^n X_k \geq \inf_{n\geq 0}\sum_{k=1}^n X_k\mathbf{1}_{X_k\leq C} > -\infty$ p.s.

5. Lorsque $N<\infty$, il existe $n'\in\mathbb{N}^*$ tel que $S_n > \min_{0\leq k\leq n} S_k$ pour tout $n\geq n'$. Ainsi, on a $S_n > \min_{0\leq k\leq n'} S_k$ et donc $\min_{0\leq k\leq n} S_k = \min_{0\leq k\leq n'} S_k$ pour $n\geq n'$. On en déduit que $\inf_{k\geq 0} S_k = \min_{0\leq k\leq n'} S_k > -\infty$ p.s.

6. (a) On a $S_n = \min_{0\leq k\leq n} S_k \iff 0 = \min_{0\leq k\leq n}(S_k - S_n) \iff 0 = \max_{0\leq k\leq n}(S_n - S_k) \iff 0 = \max_{0\leq k\leq n}(S_n - S_{n-k})$. Donc $\mathbb{P}(S_n = \min_{0\leq k\leq n} S_k) = \mathbb{P}(S_n - S_{n-k} \leq 0, 0\leq k\leq n)$.

   (b) On a $S_n - S_{n-k} = \sum_{j=n-k+1}^n X_j = \sum_{i=1}^k X_{n+1-i}$. Ainsi, $(S_k)_{0\leq k\leq n} = \psi_n((X_k)_{1\leq k\leq n})$ et $(S_n - S_{n-k})_{0\leq k\leq n} = \psi_n((X_{n+1-k})_{0\leq k\leq n})$ avec $\psi_n : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ t.q. $\psi_n(x_1,\ldots,x_n) = (0, x_0, x_0 + x_1, \ldots, \sum_{k=1}^n x_k)$. Comme les (X_k) sont i.i.d., $(X_{n+1-k})_{1\leq k\leq n}$ a même loi que $(X_k)_{1\leq k\leq n}$, ce qui donne l'égalité en loi voulue.

   (c) Grâce aux deux questions précédentes, $\mathbb{P}(S_n = \min_{0\leq k\leq n} S_k) = \mathbb{P}(S_k \leq 0, 0\leq k\leq n)$. Or, $\{T>n\} = \{S_k\leq 0, 0\leq k\leq n\}$, ce qui donne le résultat.

7. T est à valeurs dans $\mathbb{N}\cup\{\infty\}$, donc $T = \sum_{n=0}^\infty \mathbf{1}_{T>n}$. En utilisant le théorème de Fubini (cas positif), il vient $\mathbb{E}[T] = \sum_{n=0}^\infty \mathbb{P}(T>n)$. Toujours grâce au théorème de Fubini et en utilisant ensuite la question précédente, on obtient

$$\mathbb{E}[N] = \sum_{n=0}^\infty \mathbb{P}(S_n = \min_{0\leq k\leq n} S_k) = \sum_{n=0}^\infty \mathbb{P}(T>n) = \mathbb{E}[T].$$

8. On distingue les cas: si $T\leq n$, $S_{\min(T,n+1)} - S_{\min(T,n)} = S_n - S_n = 0$; si $T>n$, $S_{\min(T,n+1)} - S_{\min(T,n)} = S_{n+1} - S_n = X_{n+1}$.

9. On a $\{T>n\} = \{S_k\leq 0, 0\leq k\leq n\} = \{\sum_{j=1}^k X_j \leq 0, 0\leq k\leq n\}$. Cet événement est donc indépendant de X_{n+1}, et donc $\mathbb{E}[S_{\min(T,n+1)}] - \mathbb{E}[S_{\min(T,n)}] = \mathbb{P}(T>n)\mathbb{E}[X_1]$. On a $\mathbb{E}[S_0]=0$ et donc, pour $n\geq 1$, $\mathbb{E}[S_{\min(T,n)}] = \sum_{k=0}^{n-1}\mathbb{E}[S_{\min(T,k+1)}] - \mathbb{E}[S_{\min(T,k)}] = \mathbb{E}[X_1]\sum_{k=0}^{n-1}\mathbb{P}(T>k)$.

10. Par définition de T, on a $S_{\min(T,n)} = S_n \leq 0$ si $n<T$. Si $n\geq T$, on a $S_{\min(T,n)} = S_T = X_T + S_{T-1}$, avec $S_{T-1}\leq 0$ et $X_T\leq C$, donc $S_T\leq C$. A l'aide de la question précédente, on obtient $\mathbb{E}[X_1]\sum_{k=0}^{n-1}\mathbb{P}(T>k)\leq C$ et donc $\mathbb{E}[T]\leq C/\mathbb{E}[X_1]<\infty$. Cela prouve que $\mathbb{E}[N]<\infty$ par la question 7 et donc que $\mathbb{P}(N<\infty)=1$. On conclut la preuve du Lemme 1 grâce à la question 5.