



Modélisation en risque de crédit. Calibration et discrétisation de modèles financiers.

Aurélien Alfonsi

<http://cermics.enpc.fr/~alfonsi>

27 Juin 2006



Plan de l'exposé

- 1 Risque de crédit
 - Présentation du marché
 - Le modèle SSRD
 - Modélisation sur panier et copules
- 2 Discrétisation du processus CIR
 - Position du problème
 - Vitesse de convergence
 - Conclusion
- 3 Dualité Call-Put pour les options américaines perpétuelles
 - Introduction
 - Cadre et notations
 - Résultat de dualité



- 1 Risque de crédit
 - Présentation du marché
 - Le modèle SSRD
 - Modélisation sur panier et copules
- 2 Discrétisation du processus CIR
 - Position du problème
 - Vitesse de convergence
 - Conclusion
- 3 Dualité Call-Put pour les options américaines perpétuelles
 - Introduction
 - Cadre et notations
 - Résultat de dualité



Objectifs du marché

- Permettre aux entreprises/banques de se couvrir face au risque de défaut d'une entité particulière.
- Se protéger également en cas de plusieurs faillites simultanées.
- Marché en pleine expansion dont le besoin s'est fait nettement ressentir après les faillites retentissantes d'ENRON et de l'état d'Argentine.



Evolution du volume des dérivés de crédit (La Tribune 13/10/03)





Produit sur un sous-jacent : les CDS (Credit Default Swap)

- Supposons qu'une entreprise "A" ait souscrit à une obligation émise par une société ou un état "C".
- Si "C" pendant le contrat de l'obligation fait faillite à un instant τ , il ne pourra verser les intérêts après τ , et surtout ne reversera qu'une fraction $1 - Z$ de la somme prêtée.
- Pour ne pas prendre ce risque, "A" signe un contrat avec une société "B" (généralement une banque) qui s'engage à lui verser, en cas de défaut, la fraction Z manquante à l'instant de défaut τ . En échange, "A" paye à "B" régulièrement (par unité de temps de couverture) la somme R_f aux échéances $\mathcal{T} = \{T_1, \dots, T_n\}$ fixées à l'avance, tant que le défaut n'a pas eu lieu.
- Cotation : R_f tel que le contrat soit équitable pour "A" et "B".

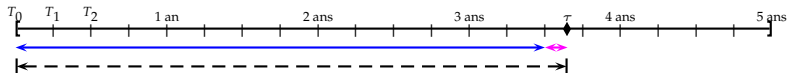


Ecriture mathématique du payoff des CDS

- On pose $T_0 = 0$ et note $\beta(t)$ l'indice tel que $t \in [T_{\beta(t)-1}, T_{\beta(t)})$.
- $\alpha_i = T_i - T_{i-1}$: temps écoulé entre deux échéances.
- $D(t, T)$ désigne le coefficient d'actualisation entre t et T .

Avec ces notations, le payoff du CDS s'écrit à l'instant 0 :

$$\underbrace{\sum_{i=1}^n D(0, T_i) \alpha_i R_f \mathbf{1}_{\{\tau > T_i\}} + D(0, \tau) (\tau - T_{\beta(\tau)-1}) R_f \mathbf{1}_{\{\tau < T_n\}}}_{\text{jambe de paiement}} - \underbrace{\mathbf{1}_{\{\tau < T\}} D(0, \tau) Z}_{\text{jambe de défaut}}$$





Produit sur plusieurs sous-jacents : les CDO (Collateralized Debt Obligations)

Supposons qu'une entreprise "A" ait un portefeuille composé d'actifs relatifs à des entités "C₁", ..., "C_m" qui subit une perte L_j en cas de défaut de "C_j".

- Perte à l'instant t : $L(t) = \sum_{j=1}^m L_j \mathbf{1}_{\tau_j \leq t}$.
- Perte maximale : $L_{\max} = \sum_{j=1}^m L_j$.
- CDO de tranche $[a\%, b\%]$: paiements réguliers à "B" contre un remboursement intégral de la perte comprise entre $\frac{aL_{\max}}{100}$ et $\frac{bL_{\max}}{100}$ lorsqu'elle survient.

Découpage en tranches *vs.* découpage par noms \implies sensibilité des prix au risque de contagion (dépendance entre défauts).



Modélisation de l'instant de défaut τ

Modèles structurels : ils cherchent à expliquer l'instant de défaut d'une entreprise à partir d'autres variables économiques (valeur de l'action, dette de l'entreprise, bilan...)

Modèles à intensité de défaut : le défaut est expliqué par un processus exogène $(\lambda_t, t \geq 0)$ qui décrit la probabilité instantanée de faire défaut

$$\mathbb{P}(\tau \in (t, t + dt) | \mathcal{G}_t) = \mathbf{1}_{\tau > t} \lambda_t dt.$$

$(\mathcal{G}_t, t \geq 0)$: filtration représentant toute l'information connue à l'instant t .



Le modèle SSRD I

Soient $(W_t, t \geq 0)$ et $(Z_t, t \geq 0)$ deux mouvements browniens corrélés
 $d\langle W, Z \rangle_t = \rho dt$.

On suppose que l'intensité de défaut est donnée par

$$\begin{cases} \lambda_t = y_t^\beta + \psi(t), & t \geq 0, \\ dy_t^\beta = \kappa(\mu - y_t^\beta)dt + \nu\sqrt{y_t^\beta}dZ_t, \end{cases}$$

où $\psi(t)$ est une fonction déterministe positive et $\beta = (\kappa, \mu, \nu, y_0^\beta)$ tel que $y_0^\beta > 0$ (et $4\kappa\mu > \nu^2$).

On pose $\Lambda(t) = \int_0^t \lambda_s ds$. On modélise l'instant de défaut comme

$$\boxed{\tau = \Lambda^{-1}(\xi)} \quad \text{où } \xi \sim \exp(1).$$



Le modèle SSRD II

On modélise de la même manière le taux d'intérêt court (CIR++, Brigo & Mercurio) :

$$\begin{cases} r_t = \varphi(t) + x_t^\alpha \\ dx_t^\alpha = k(\theta - x_t^\alpha)dt + \sigma\sqrt{x_t^\alpha}dW_t \end{cases}$$

où $\alpha = (k, \theta, \sigma, x_0^\alpha)$ est tel que $x_0^\alpha > 0$ (et $4k\theta > \sigma^2$), et $\varphi(t)$ est une fonction déterministe positive.

Coefficient d'actualisation : $D(t, T) = \exp\left(-\int_t^T r_s ds\right)$.



Evaluation du spread de CDS dans le modèle SSRD

On suppose que l'on est déjà sous une probabilité martingale.

Contrat équitable $\implies \mathbb{E}[\text{Payoff}] = 0$.

$$\begin{aligned}
 & \sum_{i=1}^n \alpha_i R_f \mathbb{E} \left[\exp \left(- \int_0^{T_i} (r_s + \lambda_s) ds \right) \right] \\
 & + R_f \int_0^{T_n} \mathbb{E} \left[\exp \left(- \int_0^u (r_s + \lambda_s) ds \right) \lambda_u \right] (u - T_{\beta(u)-1}) du \\
 & = Z \int_0^T \mathbb{E} \left[\exp \left(- \int_0^u (r_s + \lambda_s) ds \right) \lambda_u \right] du.
 \end{aligned}$$



Intérêts/incovenients du modèle

- Calibration automatique aux prix des CDS, indépendante du choix du modèle de taux d'intérêt pourvu que ce modèle calibre la courbe des zéro-coupons.
- Permet de calculer des prix de dérivés "exotiques" sur τ par méthode de Monte-Carlo ou, si possible, en utilisant des formules analytiques approchées.
- Permet de voir l'impact de ρ sur des produits hybrides.
- Niveau de volatilité sur λ bas \rightarrow ajout de sauts (Brigo & El Bachir)



Copules

Théorème (Sklar)

Soient X_1, \dots, X_m des variables aléatoires réelles et F_1, \dots, F_m leur fonction de répartition respective que l'on suppose continues. Alors, il existe une unique fonction $C : [0, 1]^m \rightarrow [0, 1]$ appelée copule de (X_1, \dots, X_m) telle que :

$$\forall x_1, \dots, x_m \in \mathbb{R}, \mathbb{P}(X_1 \leq x_1, \dots, X_m \leq x_m) = C(F_1(x_1), \dots, F_m(x_m)).$$

Ainsi, la loi de (X_1, \dots, X_m) est entièrement caractérisée par les lois marginales F_i et la copule C qui décrit toutes les interactions entre ces variables.



Modélisation à plusieurs sous-jacents

Au moins deux approches possibles :

- Modéliser directement le processus de perte $L(t)$ associé à un portefeuille. (Schönbucher ; Sidenius, Piterbarg & Andersen 2005)
- Modéliser chaque défaut à l'aide d'un modèle à intensité (calibré aux CDS). Dépendance entre les défauts : copule entre les seuils ξ_1, \dots, ξ_m qui définissent chaque défaut choisie dans une famille paramétrée. ▶ Déf seuil



Copules périodiques

En dimension $m = 2$, une copule est une fonction $C : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ telle que :

- 1 $\forall u \in [0, 1], C(u, 1) = C(1, u) = u.$
- 2 $\forall u \in [0, 1], C(u, 0) = C(0, u) = 0.$
- 3 $\partial_u \partial_v C(u, v)$ est une mesure positive au sens des distributions.

Si l'on cherche C telle que $\partial_u \partial_v C(u, v) = \tilde{c}(u \pm v)$ au sens usuel, il est facile de voir que :

$$1, 2, 3 \iff \tilde{c} \text{ fonction positive 1-périodique.}$$



Copules périodiques : propriétés

- En spécifiant la famille de fonction périodique, on peut atteindre les bornes de Fréchet C^- , C^\perp et C^+ .
- Connaissance analytique du ρ de Spearman.
- Possibilité d'étendre ces familles à plusieurs variables $m \geq 2$.
- Simulation aisée de ces copules.
- Permet des relations deux à deux asymétriques.



- 1 Risque de crédit
 - Présentation du marché
 - Le modèle SSRD
 - Modélisation sur panier et copules
- 2 Discrétisation du processus CIR
 - Position du problème
 - Vitesse de convergence
 - Conclusion
- 3 Dualité Call-Put pour les options américaines perpétuelles
 - Introduction
 - Cadre et notations
 - Résultat de dualité



Le processus CIR

$$\begin{cases} X_t = x_0 + \int_0^t (a - kX_s) ds + \sigma \int_0^t \sqrt{X_s} dW_s, t \in [0, T] \\ x_0, \sigma, a \geq 0, k \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Propriété : $\forall t \geq 0, X_t \geq 0$.

Lorsque $2a \geq \sigma^2$ et $x_0 > 0, \forall t \geq 0, X_t > 0$.

On considère un intervalle de temps $[0, T]$ et la discrétisation régulière $t_i^n = iT/n$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $0 \leq i \leq n$.



Motivations I

- On sait simuler exactement les accroissements du processus (X_t) qui suivent une loi de χ^2 décentré. Cependant, si l'on doit simuler une trajectoire entière dans un algorithme de Monte-Carlo, cette méthode est coûteuse en temps.
- Le schéma d'Euler-Maruyama explicite

$$\hat{X}_{t_{i+1}}^n = \hat{X}_{t_i}^n + \frac{T}{n}(a - k\hat{X}_{t_i}^n) + \sigma\sqrt{\hat{X}_{t_i}^n}(W_{t_{i+1}} - W_{t_i})$$

avec $\hat{X}_{t_0}^n = x_0$ n'est pas bien défini car il peut prendre des valeurs négatives et la racine carrée n'est alors plus définie. Cela arrive fréquemment dès que $\sigma^2 > a$. Il en est de même pour le schéma de Milstein si $k > 0$.



Motivations II

- Lorsque l'on souhaite corrélérer (X_t) avec un autre processus (Y_t) , il est en général difficile de simuler exactement les accroissements de (X_t, Y_t) .

C'est notamment le cas dans le cas dans le modèle à volatilité stochastique d'Heston (Broadie & Kaya 2003) :

$$\begin{cases} dS_t = S_t(rdt + \sqrt{\nu_t}d\tilde{W}_t) \\ d\nu_t = (a - k\nu_t)dt + \sigma\sqrt{\nu_t}dW_t \end{cases}$$

avec $d\langle W, \tilde{W} \rangle_t = \rho dt$ ou encore dans le modèle SSRD.



Schémas existants dans la littérature

- Deelstra et Delbaen (1998) :

$\hat{X}_{t_{i+1}}^n = \hat{X}_{t_i}^n + \frac{T}{n}(a - k\hat{X}_{t_i}^n) + \sigma\sqrt{\hat{X}_{t_i}^n \mathbf{1}_{\hat{X}_{t_i}^n > 0}}(W_{t_{i+1}} - W_{t_i})$. Ne garantit pas la positivité de la discrétisation. Résultat de convergence forte :

$$\mathbb{E} \left[\sup_{0 \leq i \leq n} |\hat{X}_{t_i}^n - X_{t_i}| \right] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

- Diop (2003) : $\hat{X}_{t_{i+1}}^n = |\hat{X}_{t_i}^n + \frac{T}{n}(a - k\hat{X}_{t_i}^n) + \sigma\sqrt{\hat{X}_{t_i}^n}(W_{t_{i+1}} - W_{t_i})|$.
- Vitesse forte : sous cond. techniques (Berkaoui, Bossy & Diop)

$$\mathbb{E} \left[\sup_{0 \leq i \leq n} |\hat{X}_{t_i}^n - X_{t_i}| \right] \underset{n \rightarrow \infty}{\leq} Cte\sqrt{T/n}.$$

- Vitesse faible : si $f \in \mathcal{C}^4$ avec ses dérivées bornées,

$$|\mathbb{E}[f(\hat{X}_T^n)] - \mathbb{E}[f(X_T)]| \leq Cte \left((T/n)^{a/\sigma^2} + T/n \right).$$



Schémas existants dans la littérature

- Deelstra et Delbaen (1998) :

$\hat{X}_{t_{i+1}}^n = \hat{X}_{t_i}^n + \frac{T}{n}(a - k\hat{X}_{t_i}^n) + \sigma \sqrt{\hat{X}_{t_i}^n \mathbf{1}_{\hat{X}_{t_i}^n > 0}} (W_{t_{i+1}} - W_{t_i})$. Ne garantit pas la positivité de la discrétisation. Résultat de convergence forte :

$$\mathbb{E} \left[\sup_{0 \leq i \leq n} |\hat{X}_{t_i}^n - X_{t_i}| \right] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

- Diop (2003) : $\hat{X}_{t_{i+1}}^n = |\hat{X}_{t_i}^n + \frac{T}{n}(a - k\hat{X}_{t_i}^n) + \sigma \sqrt{\hat{X}_{t_i}^n} (W_{t_{i+1}} - W_{t_i})|$.
- Vitesse forte : sous cond. techniques (Berkaoui, Bossy & Diop)

$$\mathbb{E} \left[\sup_{0 \leq i \leq n} |\hat{X}_{t_i}^n - X_{t_i}| \right] \underset{n \rightarrow \infty}{\leq} Cte \sqrt{T/n}.$$

- Vitesse faible : si $f \in \mathcal{C}^4$ avec ses dérivées bornées,

$$|\mathbb{E}[f(\hat{X}_T^n)] - \mathbb{E}[f(X_T)]| \leq Cte \left((T/n)^{a/\sigma^2} + T/n \right).$$



Schémas considérés

- Le schéma implicite : $(\sigma^2 \leq 2a)$

$$\hat{X}_{t_{i+1}}^n = \left(\frac{\sigma(W_{t_{i+1}} - W_{t_i}) + \sqrt{\sigma^2(W_{t_{i+1}} - W_{t_i})^2 + 4(\hat{X}_{t_i}^n + (a - \frac{\sigma^2}{2})\frac{T}{n})(1 + k\frac{T}{n})}}{2(1 + k\frac{T}{n})} \right)^2.$$

- Le schéma implicite $\sqrt{}$: $(\sigma^2 \leq 4a)$

$$\hat{X}_{t_{i+1}}^n = \left(\frac{\frac{\sigma}{2}(W_{t_{i+1}} - W_{t_i}) + \sqrt{\hat{X}_{t_i}^n} + \sqrt{(\frac{\sigma}{2}(W_{t_{i+1}} - W_{t_i}) + \sqrt{\hat{X}_{t_i}^n})^2 + 4(1 + \frac{kT}{2n})\frac{a - \sigma^2/4}{2}\frac{T}{n}}}{2(1 + \frac{kT}{2n})} \right)^2.$$

- Les schémas explicites $E(\lambda)$: $(0 \leq \lambda \leq a - \sigma^2/4)$

$$\hat{X}_{t_{i+1}}^n = \left(\left(1 - \frac{kT}{2n}\right) \sqrt{\hat{X}_{t_i}^n} + \frac{\sigma(W_{t_{i+1}} - W_{t_i})}{2(1 - \frac{kT}{2n})} \right)^2 + (a - \sigma^2/4)\frac{T}{n} + \lambda[(W_{t_{i+1}} - W_{t_i})^2 - \frac{T}{n}].$$



Vitesse faible : résultat théorique

Proposition

Soit $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction C^4 telle que $\exists A, m > 0, \forall x \geq 0, |f^{(4)}(x)| \leq A(1 + x^m)$. Si l'on suppose en plus que le schéma (\hat{X}^n) satisfait une certaine hypothèse (\mathcal{H}_W) non précisée ici, l'erreur faible est en $1/n$:

$$\mathbb{E}[f(\hat{X}_T^n)] = \mathbb{E}[f(X_T)] + O(1/n).$$

Le schéma implicite ($\sigma^2 \leq 2a$) et les schémas $E(\lambda)$ ($0 \leq \lambda \leq a - \sigma^2/4$) satisfont (\mathcal{H}_W) .

Preuve : repose sur la même idée que celle de Talay et Tubaro (1990) pour le schéma d'Euler.



Résultats numériques I

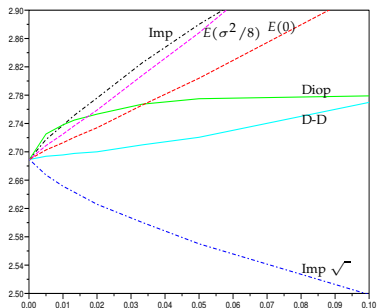
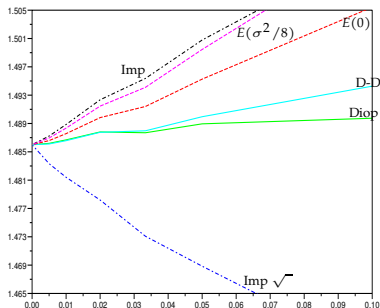


FIG.: $\mathbb{E}(f(\hat{X}_1^{2n}))$ en fonction de $1/n$ pour $f(x) = \frac{5+3x^4}{2+5x}$, $x_0 = 0$, $k = 1$, $a = 1$ avec $\sigma = 1$ (gauche) ou $\sigma = \sqrt{3}$ (droite).



Développement de l'erreur faible (schémas $E(\lambda)$)

Proposition

Soit $\nu \in \mathbb{N}^*$ et $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ que l'on suppose C^∞ et t.q.

$\forall q, \exists A_q > 0, m_q \in \mathbb{N}, |f^{(q)}(x)| \leq A_q(1 + x^{m_q})$. Soit (\hat{X}^n) un schéma explicite $E(\lambda)$ avec $0 \leq \lambda \leq a - \sigma^2/4$. Alors, l'erreur faible a un développement jusqu'à l'ordre ν :

$$\mathbb{E}[f(\hat{X}_T^n)] = \mathbb{E}[f(X_T)] + c_1/n + c_2/n^2 + \dots + c_{\nu-1}/n^{\nu-1} + O(1/n^\nu)$$

Méthode de Romberg pour avoir une meilleure convergence vers $\mathbb{E}[f(X_T)]$:

$$2\mathbb{E}[f(\hat{X}_T^{2n})] - \mathbb{E}[f(\hat{X}_T^n)] = \mathbb{E}[f(X_T)] + O(1/n^2).$$



Vitesse forte : résultat théorique

Proposition

Si (\hat{X}^n) est un schéma satisfaisant une certaine hypothèse (\mathcal{H}_S) non précisée ici, alors le schéma converge fortement : $\exists C > 0$ dépendant de T et (k, a, σ, x_0) tel que

$$\sup_{0 \leq i \leq n} \mathbb{E}(|\hat{X}_{t_i}^n - X_{t_i}|) \leq C / \ln(n)$$

$$\mathbb{E} \left(\sup_{0 \leq i \leq n} |\hat{X}_{t_i}^n - X_{t_i}| \right) \leq C / \sqrt{\ln(n)}.$$

Le schéma implicite ($\sigma^2 \leq 2a$) et les schémas $E(\lambda)$ ($0 \leq \lambda \leq a - \sigma^2/4$) satisfont (\mathcal{H}_S) .



Résultats numériques

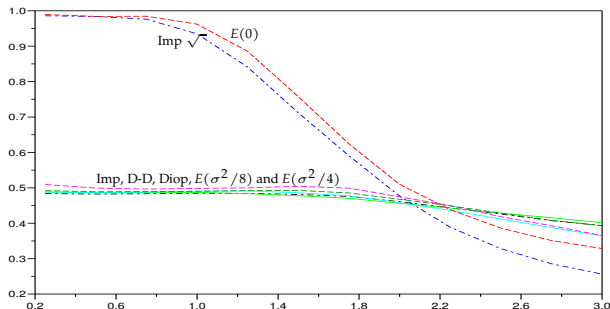


FIG.: Vitesse de convergence de S_n : estimation du paramètre α en fonction de $\sigma^2/(2a)$ for $x_0 = 1$, $k = 1$ et $a = 1$. (Si $S_n \sim Cte/n^\alpha$, $\log_{10}(S_n) - \log_{10}(S_{10n}) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \alpha$)



Récapitulatif de l'étude I

	Implicite, $\sigma^2 \leq 2a$	Implicit $\sqrt{\cdot}$, $\sigma^2 \leq 4a$	Diop	Deelstra Delbaen	$E(0)$, $\sigma^2 \leq 4a$	$E(\lambda)$, $0 < \lambda$, $\lambda \leq a - \sigma^2/4$
Positivité	Y	Y	Y	N	Y	Y
Monotonie	Y	Y	N	N	N	N
CV forte	Y	?	Y*	Y	Y	Y
CV fble en $1/n$	Y	?	Y*	?	Y	Y
Dev ^t err. fble	?	?	?	?	Y	Y

Tab.: Résultats théoriques



Récapitulatif de l'étude II

		Implicite	Implicite $\sqrt{\cdot}$	Diop	Deelstra Delbaen	$E(0)$	$E(\lambda), 0 < \lambda,$ $\lambda \leq a - \sigma^2/4$
$\sigma^2 \in [0, 2a]$	Ordre de CV forte CV faible en $1/n$ Romberg en $1/n^2$	$\approx 1/2$ Y N	≈ 1 Y N	$\approx 1/2$ Y N	$\approx 1/2$ Y Y	≈ 1 Y Y	$\approx 1/2$ Y Y
$\sigma^2 \in [2a, 4a]$	Ordre de CV forte CV faible en $1/n$ Romberg en $1/n^2$	$\approx 1/2$? N	$\approx 1/2$? N	$\approx 1/2$ N N	$\approx 1/2$ Y Y?	$\approx 1/2$ Y Y	$\approx 1/2$ Y Y

TAB.: Résultats numériques



- 1 Risque de crédit
 - Présentation du marché
 - Le modèle SSRD
 - Modélisation sur panier et copules
- 2 Discrétisation du processus CIR
 - Position du problème
 - Vitesse de convergence
 - Conclusion
- 3 Dualité Call-Put pour les options américaines perpétuelles
 - Introduction
 - Cadre et notations
 - Résultat de dualité



Petit glossaire

Type d'option :

- **Put** : droit de vendre un actif à un certain prix défini à l'avance appelé **strike**.
- **Call** : droit d'acheter un actif à un certain prix défini à l'avance appelé **strike**.

Clause d'exercice :

- **option européenne** : donne le droit d'exercer l'option à une certaine échéance T .
- **option américaine** : donne le droit d'exercer l'option à tout instant, jusqu'à une échéance T .

Exemple : si S_T désigne le cours d'une action en T , un call européen de strike $y > 0$ et de maturité T paye $\max(S_T - y, 0)$ en T .



Dualité pour les options européennes I

Modèle d'actif à volatilité locale $\sigma(\cdot)$ (homogène en temps) :

$$\begin{cases} dS_t^x = \sigma(S_t^x)S_t^x dW_t + (r - \delta)S_t^x dt \\ S_0^x = x > 0 \end{cases}$$

Prix d'un put de strike $y > 0$: $P^E(T; x, y) = \mathbb{E} [e^{-rT}(y - S_T^x)^+]$.

On a l'EDP de Dupire ($t > 0$) :

$$\begin{cases} \partial_t P^E(t; x, y) - \frac{1}{2}y^2\sigma^2(y)\partial_y^2 P^E(t; x, y) + (r - \delta)y\partial_y P^E(t; x, y) + \delta P^E(t; x, y) = 0 \\ P(0; x, y) = (y - x)^+. \end{cases}$$

→ permet de déduire σ des prix.



Dualité pour les options européennes II

- Retournement de temps $T \rightarrow \mathbf{T} - T$: EDP de Dupire = EDP de Feynman-Kac pour le call européen $\mathbb{E} [e^{-\delta T} (\bar{S}_T^y - x)^+]$ sur l'actif

$$d\bar{S}_t^y = \sigma(\bar{S}_t^y)\bar{S}_t^y dW_t + (\delta - r)\bar{S}_t^y dt, \quad \bar{S}_0^y = y.$$

- Relation de dualité call-put :

$$E [e^{-rT} (y - S_T^x)^+] \stackrel{(r \leftrightarrow \delta, x \leftrightarrow y)}{=} \mathbb{E} [e^{-\delta T} (\bar{S}_T^y - x)^+]$$



Qu'en est-il des options américaines ?

- Ce résultat reste vrai pour les options américaines dans le modèle de Black-Scholes (i.e. avec une volatilité constante) :

$$\sup_{\tau \in \mathcal{T}_{0,T}} \mathbb{E} [e^{-r\tau} (y - S_\tau^x)^+] = \sup_{\tau \in \mathcal{T}_{0,T}} \mathbb{E} [e^{-\delta\tau} (\bar{S}_\tau^y - x)^+]$$

- A-t-on une formule de dualité pour les options américaines dans un modèle à volatilité locale ?

→ Etude ici dans le cadre simplifié des options américaines perpétuelles avec volatilité locale homogène en temps.



Le modèle du sous-jacent

$$\begin{cases} dS_t^x = \sigma(S_t^x)S_t^x dW_t + (r - \delta)S_t^x dt \\ S_0^x = x \end{cases}$$

où

- $x > 0$ prix initial
- $r > 0$ taux d'intérêt court et $\delta \geq 0$ taux de dividende

Hypothèse (\mathcal{H}_{vol})

$\sigma : \mathbb{R}_+^* \rightarrow [\underline{\sigma}, \bar{\sigma}]$ fonction de volatilité supposée C^0 avec $0 < \underline{\sigma} < \bar{\sigma} < +\infty$.



Prix du put américain perpétuel

$$P_\sigma(x, y) = \sup_{\tau} \mathbb{E} (e^{-r\tau} (y - S_\tau^x)^+)$$

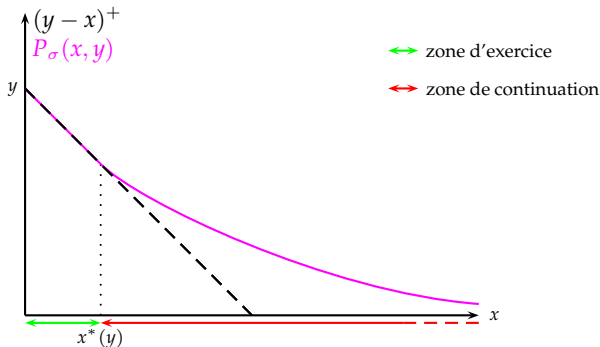
où $y > 0$ désigne le strike.

La fonction $x > 0 \mapsto P_\sigma(x, y)$ est décroissante, convexe (El Karoui, Jeanblanc & Shreve, Hobson) et est minorée par $(y - x)^+$.

$$\Rightarrow \exists x^*(y) \in (0, y), \begin{cases} \forall x \leq x^*(y), P_\sigma(x, y) = y - x \\ \forall x > x^*(y), P_\sigma(x, y) > (y - x)^+ \end{cases}$$



Formulation en frontière libre



$$x > x^*(y) : \frac{\sigma^2(x)x^2}{2} \partial_{xx} P_\sigma(x, y) + (r - \delta)x \partial_x P_\sigma(x, y) - rP_\sigma(x, y) = 0$$

$$\begin{cases} P_\sigma(x^*(y), y) = y - x^*(y) \\ \partial_x P_\sigma(x^*(y), y) = -1 \text{ (smooth fit)} \end{cases} \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} P_\sigma(x, y) = 0.$$

3 Cond. limite pour une EDO d'ordre 2 \rightarrow détermine $x^*(y)$



EDO pour la frontière d'exercice $x^*(y)$ I

A une constante multiplicative près, l'unique solution positive de

$$\frac{\sigma^2(x)x^2}{2}f''(x) + (r - \delta)xf'(x) - rf(x) = 0$$

qui s'annule à l'infini est

$$f(x) = \begin{cases} \mathbb{E}(e^{-r\tau_1^x}) & \text{si } x \geq 1 \\ 1/\mathbb{E}(e^{-r\tau_x^1}) & \text{si } x \leq 1 \end{cases}$$

où $\tau_y^x = \inf\{t \geq 0 : S_t^x = y\}$.



EDO pour la frontière d'exercice $x^*(y)$ II

Par conséquent,

$$\forall y > 0, \forall x \geq x^*(y), P_\sigma(x, y) = \alpha(y)f(x).$$

et

$$\forall y > 0, \begin{cases} \alpha(y)f(x^*(y)) = y - x^*(y) \\ \alpha(y)f'(x^*(y)) = -1 \end{cases}$$

Proposition

La frontière d'exercice $y \mapsto x^(y)$ est l'unique solution de l'équation implicite*

$$F(x^*(y), y) = 0 \text{ avec } F(x, y) = y - x + \frac{f}{f'}(y)$$

En particulier, elle est continûment dérivable.



EDO pour la frontière d'exercice $x^*(y)$ III

- $\frac{f(x^*(y))}{f'(x^*(y))} = x^*(y) - y$

$$\xrightarrow{\partial_y} 1 = \frac{f(x^*(y))f''(x^*(y))}{f'(x^*(y))^2} x^*(y)' = \frac{f''(x^*(y))}{f'(x^*(y))} (x^*(y) - y)x^*(y)'$$

- EDO sur f au point $x = x^*(y)$:

$$\underbrace{\frac{\sigma^2(x^*(y))x^*(y)^2 f''(x^*(y))}{2 f'(x^*(y))}}_{= \frac{\sigma^2(x^*(y))x^*(y)^2}{2(x^*(y)-y)x^*(y)'}} + \underbrace{(r - \delta)x^*(y) - r \frac{f(x^*(y))}{f'(x^*(y))}}_{= ry - \delta x^*(y)} = 0$$

- On en déduit :

$$\boxed{x^{*'}(y) = \frac{(x^*(y)\sigma(x^*(y)))^2}{2(y - x^*(y))(ry - \delta x^*(y))}} \quad (1)$$



EDO pour la frontière d'exercice $x^*(y)$ IV

Dans le modèle de Black-Scholes, la frontière est linéaire. Comme $P_{\underline{\sigma}} \leq P_{\sigma} \leq P_{\overline{\sigma}}$,

$$\exists 0 < c_1 < c_2 < \min(1, \frac{r}{\delta}), \forall y > 0, c_1 y \leq x^*(y) \leq c_2 y. \quad (2)$$

Proposition

La frontière x^* est l'unique solution de l'EDO (1) qui satisfait (2). En outre,

$$\sigma \in \mathcal{H}_{\text{vol}} \mapsto x^* \in \{f \in C^1, f(0) = 0, 0 < \varepsilon \leq f' \leq \frac{1}{\varepsilon}, (2)\}$$

est une application bijective.



Dualité Call-Put : objectif

Nous voulons avoir une relation de dualité :

$$\forall x, y > 0, P_\sigma(x, y) = c_\eta(y, x)$$

où $c_\eta(y, x)$ est le prix d'un call américain perpétuel de strike x , sous-jacent y , taux d'intérêt δ , taux de dividende r et fonction de volatilité η :

$$c_\eta(y, x) = \sup_{\tau} \mathbb{E} (e^{-\delta\tau} (\bar{S}_\tau^y - x)^+)$$

$$\text{avec } d\bar{S}_t^y = \eta(\bar{S}_t^y) \bar{S}_t^y dW_t + (\delta - r) \bar{S}_t^y dt, \bar{S}_0^y = y.$$



Frontière d'exercice pour le call

On a :

$$c_\eta(y, x) = \begin{cases} (y - x)^+ & \text{si } y \geq y^*(x) \\ \beta(x)g(y) & \text{si } y \leq y^*(x) \end{cases}$$

où g est l'unique solution positive (à une cte multiplicative près) de

$$\frac{\eta^2(y)y^2}{2}g''(y) + (\delta - r)yg'(y) - \delta g(y) = 0$$

s'annulant quand $y \rightarrow 0$ et y^* est l'unique solution de

$$\begin{cases} y^{*'}(x) = \frac{(y^*(x)\eta(y^*(x)))^2}{2(y^*(x)-x)(ry^*(x)-\delta x)} \\ \exists c_2 > c_1 > \max(1, \frac{\delta}{r}), \forall x > 0, c_1x \leq y^*(x) \leq c_2x \end{cases}$$



Dualité Call-Put : résultat I

Théorème

Les conditions suivantes sont équivalentes.

- 1 $\forall x, y > 0, P_\sigma(x, y) = c_\eta(y, x)$
- 2 $\forall y > 0, y^*(x^*(y)) = y$
- 3 $\forall x > 0, \sigma(x) = \frac{2(y^*(x) - x)(ry^*(x) - \delta x)}{xy^*(x)\eta(y^*(x))}$
- 4 $\forall y > 0, \eta(y) = \frac{2(y - x^*(y))(ry - \delta x^*(y))}{x^*(y)y\sigma(x^*(y))}$

Preuve : 1 \Rightarrow 2 : Egalité des zones de continuation

$$\{x^*(y) < x\} = \{y < y^*(x)\}.$$

2 \Rightarrow 3, 4 : En dérivant $y^{*'}(x^*)x^{*'} = 1 + \text{ODE}$ pour y^* et x^* .

3 \Rightarrow 2 (resp. 4 \Rightarrow 2) : on remarque que $(x^*)^{-1}$ (resp. $(y^*)^{-1}$) résout la même EDO que y^* (resp. x^*) et appartient à

$$\{f \in C^1, f(0) = 0, 0 < \varepsilon \leq f' \leq \frac{1}{\varepsilon}, (2)\}.$$



Dualité Call-Put : résultat II

2 \Rightarrow 1 : Egalité claire pour la zone d'exercice. Relation de smooth-fit en $x = x^*(y)$:

$$\begin{cases} y - x^*(y) = \beta(x^*(y))g(y) \\ 1 = \beta(x^*(y))g'(y) \end{cases} \implies \beta'(x^*(y))g(y) = -1.$$

$$x^*(y) - y = \frac{\beta(x^*(y))}{\beta'(x^*(y))} = \frac{f(x^*(y))}{f'(x^*(y))} \implies \exists C > 0, \beta = Cf.$$

$\alpha(y)f(x^*(y)) = y - x^*(y) = \beta(x^*(y))g(y) \implies \alpha = g/C$. Sur la zone de continuation :

$$P_\sigma(x, y) = \alpha(x)f(y) = \beta(y)g(x) = c_\eta(y, x).$$



Un exemple numérique

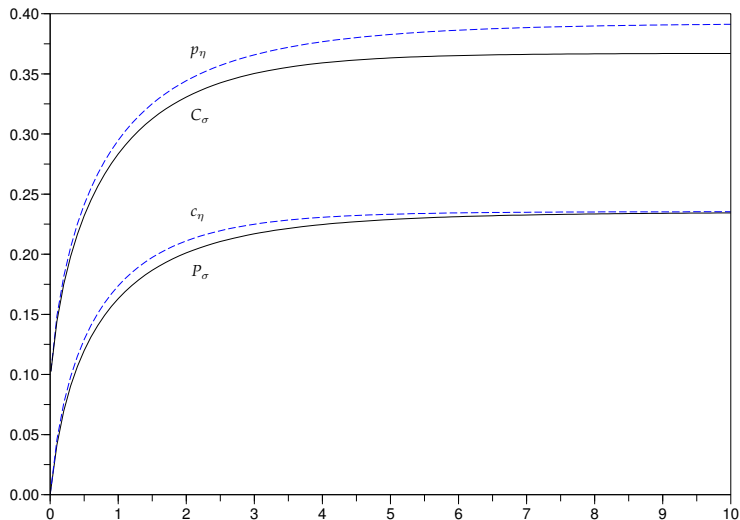
Un exemple analytique :

$$\sigma(x) = \sqrt{2 \frac{((r - \delta b)x + ra - \delta c)((1 - b)x + a - c)}{bx^2 + 2cx + ac}}$$

$$\eta(y) = \frac{\sqrt{2(y - x^*(y))(ry - \delta x^*(y))y^{*'}(x^*(y))}}{y}.$$

où $x^*(y) = \frac{1}{2} \left(by - a + \sqrt{(by - a)^2 + 4cy} \right)$ et
 $\max(c/a, b) < \min(1, r/\delta)$.

Exemple numérique : $x = 0.5, y = 0.4, r = 0.2, \delta = 0.1$ et
 $(a, b, c) = (1, 0.4, 0.1)$.





Egalité des volatilités duales σ et η

Dans le modèle de Black-Scholes : $\sigma \equiv \sigma_0$ constante $\Rightarrow \eta \equiv \sigma_0$.

Proposition 1

Soit $\delta < r$ et σ une fonction qui satisfait $(\mathcal{H}_{\text{vol}})$ et qui est analytique au voisinage de 0, i.e. $\exists \rho > 0, \forall x \in [0, \rho), \sigma(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \sigma_k x^k$. Alors,

$$\forall x, y > 0, P_{\sigma}(x, y) = c_{\sigma}(y, x) \implies \forall x \geq 0, \sigma(x) = \sigma_0.$$



Calibration de la volatilité I

Nous souhaitons retrouver la fonction de volatilité σ à partir de

- la valeur initiale x_0 du sous-jacent
- les prix "de marché" $p(y)$ des puts perpétuels pour tous les strikes $y > 0$

Soit $Y = \sup\{y > 0 : p(y) > (y - x_0)^+\}$.

$$\textcircled{1} \quad \frac{\eta^2(y)y^2}{2}p''(y) + (\delta - r)yp'(y) - \delta p(y) = 0$$

→ donne la fonction de vol. duale $\eta(y) = \frac{1}{y} \sqrt{2 \frac{\delta p(y) + (r - \delta)yp'(y)}{p''(y)}}$

pour $y \in (0, Y]$,

$$\textcircled{2} \quad \text{EDO pour } y^* \text{ sur } (0, x_0] \text{ avec la condition terminale } y^*(x_0) = Y$$

→ $y^*(x)$ pour $x \in (0, x_0]$,

$$\textcircled{3} \quad \text{thm de dualité} \rightarrow \text{on obtient } \sigma \text{ sur } (0, x_0].$$



Calibration de la volatilité II

- Prix de marché des calls perpétuels pour tous les strikes \rightarrow donne la restriction de la fct de volatilité σ sur l'intervalle complémentaire $[x_0, +\infty)$
- Procédure de calibration valable si les prix proviennent d'un modèle à volatilité $\sigma(\cdot)$:

$\sigma \mapsto ((P_\sigma(x_0, y), C_\sigma(x_0, y)), y > 0)$ est injective.

- Si les prix $p(y)$ sont "réels" : conditions techniques pour qu'ils puissent être représentés par un modèle à volatilité $\sigma(\cdot)$.



Perspectives de recherche en lien avec cette thèse

- Dualité Call-Put pour les options américaines à maturité finie T : problème bien plus difficile (on perd la forme produit).
- Étude du comportement de la convergence forte en fonction de σ . Trouver des schémas de discrétisation efficaces pour $\sigma^2 \gg 4a$.
- Risque de crédit sur plusieurs défauts : modélisation directe des taux de CDO.



Perspectives de recherche en lien avec cette thèse

- Dualité Call-Put pour les options américaines à maturité finie T : problème bien plus difficile (on perd la forme produit).
- Etude du comportement de la convergence forte en fonction de σ . Trouver des schémas de discrétisation efficaces pour $\sigma^2 \gg 4a$.
- Risque de crédit sur plusieurs défauts : modélisation directe des taux de CDO.



Perspectives de recherche en lien avec cette thèse

- Dualité Call-Put pour les options américaines à maturité finie T : problème bien plus difficile (on perd la forme produit).
- Etude du comportement de la convergence forte en fonction de σ . Trouver des schémas de discrétisation efficaces pour $\sigma^2 \gg 4a$.
- Risque de crédit sur plusieurs défauts : modélisation directe des taux de CDO.