Examen du cours de “Mesures de risque en finance”

Mercredi 16 Décembre 2015 (9h00-11h00)

Aucun document autorisé.

Il est impératif de rédiger la réponse aux deux parties sur des copies différentes. Chaque partie sera notée sur 10 points.

Partie I (Mesure de risque)

Soit $(\Omega, \mathcal{F})$ un espace mesurable. On note $\mathcal{X} = \{X : \Omega \to \mathbb{R},\ \mathcal{F}\text{-mesurable, telle que } \|X\| < +\infty\}$, où $\|X\| = \sup_{\omega \in \Omega} |X(\omega)|$. On dit que deux positions financières $X, Y \in \mathcal{X}$ sont *comonotones* si

$$\forall \omega, \omega' \in \Omega, (X(\omega) - X(\omega'))(Y(\omega) - Y(\omega')) \geq 0.$$

Une mesure de risque monétaire ρ est dite *comonotone* si pour toutes positions financières $X, Y \in \mathcal{X}$ comonotones, on a

$$\rho(X + Y) = \rho(X) + \rho(Y).$$

1. Montrer que si $g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sont deux fonctions croissantes ou bien deux fonction décroissantes, alors pour tout $X \in \mathcal{X}$, $g(X)$ et $h(X)$ sont comonotones.
2. On suppose que $g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sont deux fonctions croissantes et que X et Y sont comonotone. Montrer que $g(X)$ et $h(Y)$ sont comonotones. Montrer également que $X + g(Y)$ et $h(Y)$ sont comonotones.

Une fonction $c : \mathcal{F} \to [0, 1]$ est dite *monotone* si $\forall A, B \in \mathcal{F},\ A \subset B \implies c(A) \leq c(B)$. Elle est dite *normalisée* si $c(\emptyset) = 0$ et $c(\Omega) = 1$. Nous supposerons c monotone et normalisée par la suite. Pour $X \in \mathcal{X}$, on définit l'*intégrale de Choquet* $\int X dc$ par

$$\int X dc = \int_{-\infty}^{0} [c(X > x) - 1] dx + \int_{0}^{+\infty} c(X > x) dx,$$

où $c(X > x) = c(\{\omega \in \Omega, X(\omega) > x\})$ pour $x \in \mathbb{R}$. Enfin, on définit

$$X \in \mathcal{X},\ \rho_c(X) = \int (-X) dc.$$

L'objectif de cet exercice est de montrer qu'une mesure de risque ρ est comonotone si, et seulement si il existe une fonction monotone c telle que $\rho = \rho_c$.

On commence par considérer une fonction monotone normalisée c. L'objectif est de prouver que ρ_c est une mesure de risque monétaire comonotone.

3. Vérifier que l'intégrale de Choquet est bien définie et satisfait $|\int X dc| \leq \|X\|$.
4. Montrer que ρ_c est une mesure de risque monétaire positivement homogène.
5. Calculer $\rho_c(-X)$ lorsque $X \in \mathcal{X}$ est à valeurs dans $\mathbb{N}$.
6. On suppose $X, Y \in \mathcal{X}$ à valeurs dans $\mathbb{N}$ et comonotones dans toute la question.
   (a) On suppose que Y est à valeurs dans $\{0, 1\}$. Montrer qu'il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $\{Y = 1\} \subset \{X \geq m\}$ et $\{Y = 0\} \subset \{X \leq m\}$. En déduire que $\rho_c(-(X + Y)) = \rho_c(-X) + \rho_c(-Y)$.
   (b) On suppose que Y est à valeurs dans $\{0, \ldots, n\}$. Montrer que $X + \min(Y, n-1)$ et $\mathbf{1}_{Y \geq n}$ sont comonotones. En déduire que $\rho_c(-(X + Y)) = \rho_c(-(X + \min(Y, n-1)) + \rho_c(-\mathbf{1}_{Y \geq n})$.
   (c) Conclure que $\rho_c(-(X + Y)) = \rho_c(-X) + \rho_c(-Y)$
7. Montrer que ρ_c est comonotone [Indication : on pourra montrer et utiliser que $\rho_c(-X) = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \rho_c(-\lfloor n(X + \|X\|) \rfloor) - \|X\|$].

On considère désormais une mesure de risque monétaire comonotone ρ. Le but des questions restantes est de montrer que ρ s'écrit sous la forme d'une intégrale de Choquet.

8. Montrer que pour $X \in \mathcal{X}$, on a $\rho(nX) = n\rho(X)$ pour $n \in \mathbb{N}$, puis que $\rho(\lambda X) = \lambda\rho(X)$ pour $\lambda \in \mathbb{Q}, \lambda > 0$. En déduire que ρ est positivement homogène.
9. On définit $c_\rho(A) = \rho(-\mathbf{1}_A)$ pour $A \in \mathcal{F}$. Montrer que c_ρ est monotone et normalisée.
10. On considère $X \in \mathcal{X}$ à valeurs dans $\mathbb{N}$. Montrer que
$$\rho(-X) = c_\rho(X \geq 1) + \rho(-\max(X-1,0)).$$
En déduire que $\rho(-X) = \sum_{i=1}^{+\infty} c_\rho(X \geq i)$, puis que $\rho(-X) = \rho_{c_\rho}(-X)$.
11. Montrer que $\rho(X) = \rho_{c_\rho}(X)$ pour tout $X \in \mathcal{X}$.

Partie II **(à rédiger sur une copie distincte, barème indicatif /10 points)**

Question 1 **(1 point)**

Soit f une fonction croissante et continue à droite et on lui associe son inverse généralisé $f^{-1}(y) = \inf\{x,\ f(x) \geq y\}$. On définit une nouvelle fonction $g(x) = f(ax+b) - c$, avec $(a,b,c) \in (0,\infty) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. En justifiant le calcul, donner l'expression de l'inverse généralisé g^{-1} de g en fonction de f^{-1}, a, b et c.

Question 2 **(2 points)**

D'après le cours, on sait qu'une fonction de répartition f non-dégenérée est max-stable si et seulement si $\exists$ une suite de fonctions de répartition (f_n) et deux suites b_n, a_n (> 0) telles que : Pour chaque $k = 1, 2, ...$, la convergence simple $f_n(b_{nk} + x/a_{nk}) \to f^{1/k}(x)$ est vérifiée lorsque $n \to \infty$.

Montrer alors qu'une fonction de répartition G non-dégénérée est max-stable si et seulement si $D(G) \neq \emptyset$ avec $G \in D(G)$. La notation $D(G)$ désigne le domaine d'attraction associé à la loi dont la fonction de répartition est donnée par G.

Question 3 **(2 points)**

Une condition nécessaire pour vérifier le principe d'attraction est d'avoir :
$\lim_{x\to x_\mu} \overline{F}(x)/\overline{F}(x^-) = 1$ où $\overline{F} = 1 - F$ et F est la fonction de répartition associée à une loi μ, de plus $x_\mu = \sup\{x, F(x) < 1\}$.

Montrer alors qu'une loi de Poisson $\mathcal{P}(\theta)$, avec $\theta > 0$, ne vérifie pas le principe d'attraction.

Question 4 **(2 points)**

Soient n observations X_1, ..., X_n indépendantes identiquement distribuées de loi de Pareto généralisée caractérisée par sa fonction de survie donnée, pour $(\xi, \beta) \in \mathbb{R} \times (0,\infty)$ et $x \in D_{\xi,\beta}$, par : $\overline{G}_{\xi,\beta}(x) = (1 + \xi x/\beta)^{-1/\xi} 1_{\xi \neq 0} + e^{-x/\beta} 1_{\xi=0}$ où $D_{\xi,\beta} = [0,\infty)$ si $\xi \geq 0$ et $D_{\xi,\beta} = [0, -\beta/\xi]$ si $\xi < 0$. Calculer l'expression de la log-vraisemblance ainsi que la fonction e définie par : $e(u) = E(X_1 - u | X_1 > u)$ lorsque $\xi < 1$.

Question 5 **(1 point)**

Quelle asymétrie apparait lorsqu'une banque veut couvrir le risque de défaut d'une contre-partie qui n'est pas une banque ?

Question 6 **(2 points)**

Existe-t-il toujours une contradiction entre avoir plusieurs actifs sans-risque et l'absence d'opportunité d'arbitrage ? Donner deux cas possibles qui justifient la non-contradiction.

Corrigé de la Partie 1 :

1. Lorsque g et h ont la même monotonie, on a $(g(x)-g(x'))(h(x)-h(x')) \geq 0$ pour tout $x, x' \in \mathbb{R}$.

2. Soient $\omega, \omega' \in \Omega$. Par comonotonie, on a $(X(\omega)-X(\omega'))(Y(\omega)-Y(\omega')) \geq 0$. Trois cas distincts sont possibles :
   — $X(\omega) = X(\omega')$ ou $Y(\omega) = Y(\omega')$, et on a $(g(X(\omega))-g(X(\omega')))(h(Y(\omega))-h(Y(\omega'))) = 0$,
   — $X(\omega) > X(\omega')$ et $Y(\omega) > Y(\omega')$, et on a $(g(X(\omega))-g(X(\omega')))(h(Y(\omega))-h(Y(\omega'))) \geq 0$ par croissance de g et h,
   — $X(\omega) < X(\omega')$ et $Y(\omega) < Y(\omega')$, et on a $(g(X(\omega))-g(X(\omega')))(h(Y(\omega))-h(Y(\omega'))) \geq 0$ par croissance de g et h.

   Donc $g(X)$ et $h(Y)$ sont comonotones. Grâce à ce résultat, X et $h(Y)$ sont comonotones. De plus, la première question assure que $g(Y)$ et $h(Y)$ sont comonotones. On en déduit que $X + g(Y)$ et $h(Y)$ sont comonotones.

3. La fonction $x \in \mathbb{R} \mapsto c(X > x) \in [0,1]$ est décroissante donc mesurable, et vaut 1 pour $x < -\|X\|$ et 0 pour $x > \|X\|$. Ainsi, $\int X dc$ est bien définie et vaut $\int_{-\|X\|}^{0} [c(X > x) - 1]dx + \int_0^{\|X\|} c(X > x)dx$. Le premier terme est négatif et plus grand que $-\|X\|$ tandis que le second est positif et inférieur à $\|X\|$. On en déduit que $|\int X dc| \leq \|X\|$.

4. Monotonie. Pour $X \leq Y$, on a pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\{-Y > x\} \subset \{-X > x\}$ et donc $c(-Y > x) \leq c(-X > x)$ grâce à la propriété de décroissance de c. On en déduit que $\rho_c(Y) \leq \rho_c(X)$.
   Invariance par translation. Soit $m \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned}
\rho_c(X+m) = \int (-X-m)dc &= \int_{-\infty}^{0} [c(-X-m > x) - 1]dx + \int_0^{+\infty} c(-X-m > x)dx \\
&= \int_{-\infty}^{0} [c(-X > x+m) - 1]dx + \int_0^{+\infty} c(-X > x+m)dx \\
&= \int_{-\infty}^{m} [c(-X > x) - 1]dx + \int_m^{+\infty} c(-X > x)dx \\
&= \int_{-\infty}^{0} [c(-X > x) - 1]dx + \int_0^{+\infty} c(-X > x)dx - m = \rho_c(X) - m.
\end{aligned}$$

   Il reste à prouver l'homogénéité positive. Soit $\lambda > 0$. On a, par changement de variable,

$$\begin{aligned}
\rho_c(\lambda X) &= \int_{-\infty}^{0} [c(-X > x/\lambda) - 1]dx + \int_0^{+\infty} c(-X > x/\lambda)dx \\
&= \lambda \int_{-\infty}^{0} [c(-X > x) - 1]dx + \lambda \int_0^{+\infty} c(-X > x)dx = \lambda \rho_c(X).
\end{aligned}$$

5. Soit $X \in \mathcal{X}$ tel que $X : \Omega \to \mathbb{N}$. Il existe $M \in \mathbb{N}$ tel que $\{X > M\} = \emptyset$. On a

$$\rho_c(-X) = \int X dc = \int_0^{\infty} c(X > x)dx = \sum_{i=1}^{M-1} \int_{i-1}^{i} c(X > x)dx = \sum_{i=1}^{M-1} c(X \geq i) = \sum_{i=1}^{\infty} c(X \geq i).$$

6. (a) Grâce à la comonotonie, on a pour tout $\omega \in \{Y = 1\}$, $\omega' \in \{Y = 0\}$, $X(\omega) \geq X(\omega')$. On note $m = \max_{\omega \in \{Y=0\}} X(\omega)$ (avec pour convention $m = 0$ si $\{Y = 0\} = \emptyset$). Ce max est bien défini car X est bornée et à valeurs entières. On a bien par construction $\{Y = 0\} \subset \{X \leq m\}$ et, comme le maximum est atteint $X(\omega) \geq m$ pour tout $\omega \in \{Y = 1\}$ ce qui donne $\{Y = 1\} \subset \{X \geq m\}$. D'après la question précédente,

$\rho_c(-(X+Y)) = \sum_{i=1}^{\infty} c(X+Y \geq i)$ et $\rho_c(-Y) = c(Y=1)$. Pour $i \leq m$, on a $\{X+Y \geq i\} = \{X \geq i\}$, pour $i \geq m+2$, on a $\{X+Y \geq i\} = \{X \geq i-1\}$ et pour $i = m+1$, $\{X+Y \geq m+1\} = \{X \geq m, Y=1\} = \{Y=1\}$. Cela donne

$$\rho_c(-(X+Y)) = \sum_{i=1}^{m} c(X \geq i) + c(Y=1) + \sum_{i=m+2}^{\infty} c(X \geq i-1) = \rho_c(-X) + \rho_c(-Y).$$

(b) Les fonctions $x \mapsto \min(x, n-1)$ et $x \mapsto \mathbf{1}_{x \geq n}$ sont croissantes. Grâce à la question 2, $X + \min(Y, n-1)$ et $\mathbf{1}_{Y \geq n}$ sont comonotones. De plus $\mathbf{1}_{Y \geq n}$ est à valeurs dans $\{0,1\}$. En remarquant que $Y = \min(Y, n-1) + \mathbf{1}_{Y \geq n}$, il vient grâce à la question précédente que $\rho_c(-(X+Y)) = \rho_c(-(X + \min(Y, n-1))) + \rho_c(-\mathbf{1}_{Y \geq n})$.

(c) En appliquant le résultat de question précédente à X et $\min(Y, n-1)$, on obtient $\rho_c(-(X + \min(Y, n-1))) = \rho_c(-(X + \min(Y, n-2))) + \rho_c(-\mathbf{1}_{Y \geq n-1})$, puis en itérant

$$\rho_c(-(X+Y)) = \rho_c(-X) + \sum_{i=1}^{n} \rho_c(-\mathbf{1}_{Y \geq i}) = \rho_c(-X) + \sum_{i=1}^{n} \rho_c(Y \geq i) = \rho_c(-X) + \rho_c(-Y).$$

7. Soient X et Y deux positions comonotones. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $x \mapsto \lfloor n(x + \|X\|) \rfloor$ et $x \mapsto \lfloor n(x + \|Y\|) \rfloor$ sont croissantes donc $\lfloor n(X + \|X\|) \rfloor$ et $\lfloor n(Y + \|Y\|) \rfloor$ par la question 2. Comme elles sont à valeurs entières, la question précédente assure $\rho_c(-(\lfloor n(X + \|X\|) \rfloor + \lfloor n(Y + \|Y\|) \rfloor)) = \rho_c(-(\lfloor n(X + \|X\|) \rfloor) + \rho_c(-(\lfloor n(Y + \|Y\|) \rfloor))$. Comme $n(X + \|X\|) - 1 \leq \lfloor n(X + \|X\|) \rfloor \leq n(X + \|X\|)$, on a par monotonie, positive homogénéité et invariance par translation de ρ_c que

$$\rho_c(-X) + \|X\| \leq \frac{1}{n} \rho_c(-\lfloor n(X + \|X\|) \rfloor) \leq \rho_c(-X) + \|X\| + \frac{1}{n}.$$

Cela donne $\rho_c(-X) = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \rho_c(-\lfloor n(X + \|X\|) \rfloor) - \|X\|$. De même, on montre que $\rho_c(-(X+Y)) = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \rho_c(-(\lfloor n(X + \|X\|) \rfloor + \lfloor n(Y + \|Y\|) \rfloor)) - \|X\| - \|Y\|$. On obtient ainsi que $\rho_c(-(X+Y)) = \rho_c(-X) + \rho_c(-Y)$ pour tout $X, Y \in \mathcal{X}$, ce qui donne la comonotonie.

8. Pour $n \geq 2$, $\rho(nX) = \rho((n-1)X) + \rho(X)$ puisque X est comonotone avec $(n-1)X$. Cela donne $\rho(nX) = n\rho(X)$ pour tout $X \in \mathcal{X}$, et donc aussi $\rho(X) = n\rho(X/n)$ puisque X est quelconque. Pour $\lambda = p/q$ avec $p \in \mathbb{N}$, $q \in \mathbb{N}^*$, on a $\rho(\frac{p}{q}X) = p\rho(\frac{1}{q}X) = \frac{p}{q}\rho(X)$. Enfin, ρ est 1-Lipschitz ce qui assure $|\rho(\lambda X) - \rho(\frac{p}{q}X)| \leq |\lambda - \frac{p}{q}| \|X\|$, et en approchant $\lambda > 0$ par une suite de rationnels, on obtient la positive homogénéité.

9. Si $A \subset B$, $-\mathbf{1}_B \leq -\mathbf{1}_A$, et par monotonie de ρ, $c_\rho(A) \leq c_\rho(B)$. Par ailleurs, $c(\emptyset) = \rho(0) = 0$ et $c(\Omega) = \rho(-1) = 1$.

10. On a $X = \mathbf{1}_{X \geq 1} + \max(X-1, 0)$ et donc $-X = -\mathbf{1}_{X \geq 1} - \max(X-1, 0)$. On sait que $-\mathbf{1}_{X \geq 1}$ et $-\max(X-1, 0)$ sont comonotones grâce à la première question, ce qui donne $\rho(-X) = c_\rho(X \geq 1) + \rho(-\max(X-1, 0))$. En appliquant ce résultat à $\max(X-1, 0)$, on obtient $\rho(-\max(X-1, 0)) = c_\rho(\max(X-1, 0) \geq 1) + \rho(-\max(\max(X-1, 0) - 1, 0)) = c_\rho(X \geq 2) + \rho(-\max(X-2, 0))$. En itérant, on obtient $\rho(-X) = \sum_{i=1}^{N} c_\rho(X \geq i)$, où $N > \|X\|$, puis $\rho(-X) = \sum_{i=1}^{\infty} c_\rho(X \geq i) = \rho_{c_\rho}(-X)$ par la question 5.

11. Par la question précédente, $\rho(-X) = \rho_{c_\rho}(-X)$ lorsque X est à valeurs dans $\mathbb{N}$. De plus, comme ρ et ρ_{c_ρ} sont des mesures de risques monétaires positivement homogènes, on obtient comme à la question 7 que $\rho(-X) = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \rho(-\lfloor n(X + \|X\|) \rfloor) - \|X\|$ et $\rho_{c_\rho}(-X) = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \rho_{c_\rho}(-\lfloor n(X + \|X\|) \rfloor) - \|X\|$. Cela donne l'égalité voulue.