Examen du cours de "Mesures de risque en finance"

Mercredi 14 Décembre 2016 (9h00-11h00)
Aucun document autorisé.

Il est impératif de rédiger la réponse aux deux parties sur des copies différentes.

Partie I (Mesures de risque) (sur 10 points)

On considère $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité et $\mathcal{X} = L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, l'ensemble des variables aléatoires à valeurs bornées muni de la norme $\|X\|_\infty = \inf\{M > 0, \mathbb{P}(|X| \leq M) = 1\}$.

On appelle fonction de perte une fonction $\ell : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue, croissante, telle que $\ell(x) > \ell(0)$ pour $x > 0$ et $\ell(x) < \ell(0)$ pour $x < 0$. On dit qu'une position financière X est acceptable si $\mathbb{E}[\ell(-X)] \leq \ell(0)$, et on note

$$\mathcal{A} = \{X \in \mathcal{X}, \mathbb{E}[\ell(-X)] \leq \ell(0)\}.$$

1. Montrer que si $X, Y \in \mathcal{X}$ sont telles que $X \in \mathcal{A}$ et $X \leq Y$, alors $Y \in \mathcal{A}$. En déduire que
$$\rho(X) = \inf\{m \in \mathbb{R}, \mathbb{E}[\ell(-X - m)] \leq \ell(0)\}$$
est une mesure de risque monétaire.
2. Montrer que pour tout $X \in \mathcal{X}$, $m \mapsto \mathbb{E}[\ell(-X + m)]$ est une fonction croissante, continue. En déduire que $\mathbb{E}[\ell(-X - \rho(X))] = \ell(0)$.

On suppose par la suite que la fonction ℓ est convexe.

3. Montrer que ρ est une mesure de risque convexe, et que $\rho(X) \geq \mathbb{E}[-X]$.
4. Soit $X \in \mathcal{X}$. Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{X}^{\mathbb{N}}$ une suite convergeant presque sûrement vers X telle que $\exists M > 0, \forall n \in \mathbb{N}, \|X_n\|_\infty \leq M$. Montrer que $\rho(X) \leq \liminf_{n \to +\infty} \rho(X_n)$.
5. En déduire que
$$\rho(X) = \sup_{\mathbb{Q} \in \mathcal{M}_1(\mathbb{P})} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[-X] - \alpha_{\min}(\mathbb{Q}),$$
où $\alpha_{\min}(\mathbb{Q}) = \sup_{X \in \mathcal{A}} \mathbb{E}[-X \frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}]$.

On note ℓ^* la transformée de Fenchel-Legendre de ℓ (i.e. $\ell^*(y) = \sup_{x \in \mathbb{R}} xy - \ell(x)$, $y \in \mathbb{R}$). On suppose en plus par la suite que ℓ est une fonction C^1 telle que $\{y \in \mathbb{R}, \ell^*(y) < \infty\} = \mathbb{R}_+$ et que ℓ^* est C^1 sur $\mathbb{R}_+$. Enfin, pour $\mathbb{Q} \in \mathcal{M}_1(\mathbb{P})$, on pose

$$A(\mathbb{Q}) = \inf_{\eta > 0} \frac{1}{\eta} \left(\ell(0) + \mathbb{E}[\ell^*(\eta \frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}})] \right).$$

6. Montrer que $\alpha_{\min}(\mathbb{Q}) \leq A(\mathbb{Q})$.
7. Montrer $\ell(0) + \ell^*(0) > 0$ et, pour $y > 0$, $\ell((\ell^*)'(y)) = (\ell^*)'(y)y - \ell^*(y)$.
8. On suppose qu'il existe $0 < m < M$ tels que $m \leq \frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} \leq M$, $\mathbb{P}$-p.s..
   (a) Montrer que $\frac{1}{\eta}\left(\ell(0) + \mathbb{E}[\ell^*(\eta \frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}})]\right) \to +\infty$ lorsque $\eta \to 0^+$ ou $\eta \to +\infty$.
   (b) En déduire qu'il existe $\eta^o > 0$ tel que
   $$\frac{1}{\eta^o} \left(\ell(0) + \mathbb{E}[\ell^*(\eta^o \frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}})] \right) = A(\mathbb{Q}) \text{ et } \mathbb{E}\left[\ell\left((\ell^*)' \left(\eta^o \frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} \right) \right) \right] = \ell(0).$$
   (c) Conclure que $\alpha_{\min}(\mathbb{Q}) = A(\mathbb{Q})$.
9. On admet que $\alpha_{\min}(\mathbb{Q}) = A(\mathbb{Q})$ pour tout $\mathbb{Q} \in \mathcal{M}_1(\mathbb{P})$. Calculer $\alpha_{\min}$ lorsque $\ell(x) = e^{\beta x}$, $\beta > 0$.

Partie II (barème indicatif /10 points)

Question 1 (1 point)

Soit F une fonction de répartition et $F^{-1}(y) = \inf\{x,\ F(x) \geq y\}$ son inverse généralisé. Montrer que si F^{-1} est continue alors $F^{-1}(F(x)) = x$.

Question 2 (2 points)

Soient $X_1,\ X_2,\ ...,\ X_n$ des variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées de fonction de survie $\overline{F}$ et $M_n = \max\limits_{1\leq i\leq n} X_i$. Pour $\tau \in]0,+\infty[$ et une suite de réels u_n, montrer : $\lim\limits_{n\to\infty} n\overline{F}(u_n) = \tau \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} P(M_n \leq u_n) = \exp(-\tau)$.

Question 3 (2 points)

On sait qu'une loi normale, de fonction de répartition F, appartient au domaine d'attraction d'une loi de Gumbel avec un coefficient de translation d_n vérifiant $1 - F(d_n) = 1/n$. En utilisant $1 - F(x) \sim F'(x)/x$ lorsque $x \to \infty$, donner une expression asymptotique de d_n.

Question 4 (2 points)

Soient $U_1,\ U_2,\ ...,\ U_n$ des variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées de loi uniforme sur $[0,1]$. Montrer que la statistique d'ordre $\left(\min\limits_{1\leq i\leq n} U_i = U_1^{(n)}, U_2^{(n)}, ..., U_n^{(n)} = \max\limits_{1\leq i\leq n} U_i\right)$ est de même loi que $\left(\dfrac{\Gamma_1}{\Gamma_{n+1}}, ..., \dfrac{\Gamma_n}{\Gamma_{n+1}}\right)$ où $\Gamma_k = E_1 + E_2 + ... + E_k$ avec $(E_i)_{1\leq i\leq n+1}$ sont des variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées de loi exponentielle $\mathcal{E}(1)$.

Question 5 (1 point)

Quelle asymétrie apparait lorsqu'une banque veut couvrir le risque de défaut d'une contre-partie qui n'est pas une banque ?

Question 6 (2 points)

Dans un marché de gré à gré, pour tout $t \in [0,T]$, C_t représente la somme des flux entre 0 et t réellement transmis par la banque à son client. On note : S l'actif sous-jacent risqué, r le taux OIS (Overnight Indexed Swap) sans risque, Γ le collatéral, B^0 l'actif de placement de la banque vis-à-vis de son client, $\overline{B}^0$ l'actif de placement du client vis-à-vis de la banque, B^f l'actif de placement de la banque vis-à-vis de son régulateur, $\overline{B}^f$ l'actif de placement du régulateur vis-à-vis de la banque. Préciser les expressions de η^0, $\overline{\eta}^0$, η^f, $\overline{\eta}^f$ qui interviennent dans le bilan des variations du portefeuille autofinancé de la banque : $dV_t = -dC_t + \xi_t dS_t + \eta_t^0 dB_t^0 + \overline{\eta}_t^0 d\overline{B}_t^0 + \eta_t^f dB_t^f + \overline{\eta}_{t-}^f d\overline{B}_t^f$.

Corrigé :

1. La fonction ℓ est croissante donc $\ell(-Y) \leq \ell(-X)$. Comme $X \in \mathcal{A}$, $\mathbb{E}[\ell(-Y)] \leq \mathbb{E}[\ell(-X)] = \ell(0)$, il vient que $Y \in \mathcal{A}$. De plus, $0 = \inf\{m \in \mathbb{R}, \ell(-m) \leq \ell(0)\}$ car $\ell(-m) > \ell(0)$ pour $m < 0$. Ainsi, $\mathcal{A}$ est bien un ensemble de positions acceptables au sens défini dans le cours, et ρ est la mesure de risque associée à cet ensemble.

2. La propriété de croissance découle de la croissance de ℓ. Pour $m' \in [m-1, m+1]$, $|-X+m'| \leq \|X\|_\infty + m + 1$ et donc $|\ell(-X+m')| \leq \sup_{|x|\leq \|X\|_\infty+m+1} |\ell(x)| < \infty$. Par convergence dominée, on en déduit la continuité de $m \mapsto \mathbb{E}[\ell(-X+m)]$.

   Par définition de $\rho(X)$, on a pour tout $m > \rho(X)$, $\mathbb{E}[\ell(-X-m)] \leq \ell(0)$ et donc $\mathbb{E}[\ell(-X-\rho(X))] \leq \ell(0)$ par continuité. Par ailleurs, pour $m < \rho(X)$ on a $\mathbb{E}[\ell(-X-m)] > \ell(0)$, ce qui donne par continuité $\mathbb{E}[\ell(-X-\rho(X))] \geq \ell(0)$.

3. Soient $X, Y \in \mathcal{X}$. Pour $\lambda \in [0,1]$, on a grâce à la convexité de ℓ,

   $$\mathbb{E}[\ell(-\lambda(X+\rho(X))-(1-\lambda)(Y+\rho(Y)))] \leq \lambda\mathbb{E}[\ell(-X+\rho(X))]+(1-\lambda)\mathbb{E}[\ell(-Y+\rho(Y))] = \ell(0).$$

   On en déduit que $\rho(\lambda X + (1-\lambda)Y) \leq \lambda\rho(X) + (1-\lambda)\rho(Y)$.

   Comme $\mathbb{E}[\ell(-X-\rho(X))] = \ell(0)$, l'inégalité de Jensen assure $\ell(\mathbb{E}[-X]-\rho(X)) \leq \ell(0)$, donc $\mathbb{E}[-X] - \rho(X) \leq 0$.

4. Par convergence dominée, on a pour tout $m \in \mathbb{R}$, $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}[\ell(-X_n - m)] = \mathbb{E}[\ell(-X-m)]$. En prenant $m = \rho(X) - \varepsilon$ avec $\varepsilon > 0$, comme $\mathbb{E}[\ell(-X-\rho(X)+\varepsilon)] > \ell(0)$, on obtient qu'il existe N tel que pour $n \geq N$, $\mathbb{E}[\ell(-X_n - \rho(X)+\varepsilon)] > \ell(0)$ et donc $\rho(X) - \varepsilon < \rho(X_n)$. Cela implique $\liminf_{n\to+\infty} \rho(X_n) \geq \rho(X) - \varepsilon$, pour tout $\varepsilon > 0$, ce qui donne le résultat annoncé.

5. On applique le théorème du cours qui assure que tout mesure de risque convexe satisfaisant la propriété de Fatou se représente sous la forme $\rho(X) = \sup_{\mathbb{Q}\in\mathcal{M}_1(\mathbb{P})} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[-X] - \alpha_{\min}(\mathbb{Q})$, avec $\alpha_{\min}(\mathbb{Q}) = \sup_{X\in\mathcal{A}} \mathbb{E}[-X\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}]$.

6. On observe que pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, $xy \leq \ell(x) + \ell^*(y)$. Pour $X \in \mathcal{A}$ et $\eta > 0$, on a $-X\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} = \frac{1}{\eta}(-X) \times (\eta\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}) \leq \frac{1}{\eta}[\ell(-X) + \ell^*(\eta\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}})]$. Pour $X \in \mathcal{A}$, $\mathbb{E}[\ell(-X)] \leq \ell(0)$, ce qui donne

   $$\mathbb{E}[-X\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}] \leq \frac{1}{\eta}[\ell(0) + \mathbb{E}[\ell^*(\eta\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}})]].$$

   On en déduit $\alpha_{\min}(\mathbb{Q}) \leq \frac{1}{\eta}[\ell(0) + \mathbb{E}[\ell^*(\eta\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}})]]$ pour tout $\eta > 0$, ce qui donne le résultat voulu.

7. $\ell^*(0) = \sup_{x\in\mathbb{R}} -\ell(x)$. Comme ℓ est croissante et $\ell(x) < \ell(0)$ pour $x < 0$, $\ell^*(0) > -\ell(0)$.

   Comme ℓ est une fonction convexe propre, $\ell = \ell^{**}$, et donc pour $y > 0$ $\ell((\ell^*)'(y)) = \sup_{z\geq 0} z(\ell^*)'(y) - \ell^*(z)$. La dérivée de $z \mapsto z(\ell^*)'(y) - \ell^*(z)$ est $(\ell^*)'(y) - (\ell^*)'(z)$. Comme ℓ^* est convexe, $(\ell^*)'$ est croissante et le supremum est atteint pour $z = y$ ce qui donne le résultat.

8. (a) On a $\ell^*(\eta\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}) \geq x\eta\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} - \ell(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, et donc

   $$\frac{1}{\eta}\left(\ell(0) + \mathbb{E}[\ell^*(\eta\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}})]\right) \geq \frac{1}{\eta}(\ell(0) - \ell(x)) + x.$$

   En prenant $x < 0$, il vient que $\frac{1}{\eta}\left(\ell(0) + \mathbb{E}[\ell^*(\eta\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}})]\right) \underset{\eta\to 0^+}{\to} +\infty$ car $\ell(x) < \ell(0)$. D'autre part, $\liminf_{\eta\to+\infty} \frac{1}{\eta}\left(\ell(0) + \mathbb{E}[\ell^*(\eta\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}})]\right) \geq x$, et en prenant x arbitrairement grand, il vient $\lim_{\eta\to+\infty} \frac{1}{\eta}\left(\ell(0) + \mathbb{E}[\ell^*(\eta\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}})]\right) = +\infty$.

(b) Comme il existe $M > 0$ tel que $0 \leq \frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} \leq M$, on obtient que pour tout $\eta \geq 0$, $\mathbb{E}[\ell^*(\eta \frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}})] < \infty$, et par le théorème de convergence dominée, la dérivée de $\eta \mapsto \frac{1}{\eta}\left(\ell(0) + \mathbb{E}[\ell^*(\eta \frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}})]\right)$ pour $\eta > 0$ est donnée par

$$\eta \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \frac{1}{\eta^2}\left(\eta \mathbb{E}\left[\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}(\ell^*)'(\eta \frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}})\right] - \mathbb{E}[\ell^*(\eta \frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}})] - \ell(0)\right) = \frac{1}{\eta^2}\left(\mathbb{E}\left[\ell\left((\ell^*)'(\eta \frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}})\right)\right] - \ell(0)\right),$$

grâce à la question **??**. En utilisant la question précédente, l'infimum est atteint pour un certain $\eta^o > 0$, et comme c'est un point critique, on a $\mathbb{E}\left[\ell\left((\ell^*)'(\eta^o \frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}})\right)\right] = \ell(0)$.

(c) On pose $X = -(\ell^*)'(\eta^o \frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}})$. On a $X \in \mathcal{X}$ puisque $(\ell^*)'$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et $m \leq \frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} \leq M$. De plus $\mathbb{E}\left[\ell\left(-X\right)\right] = \ell(0)$, et donc $X \in \mathcal{A}$. On en déduit que

$$\begin{aligned}
\alpha_{\min}(\mathbb{Q}) \geq \mathbb{E}\left[(\ell^*)'(\eta^o \frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}})\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}\right] &= \frac{1}{\eta^o}\mathbb{E}\left[(\ell^*)'(\eta^o \frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}})\eta^o \frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}\right] \\
&= \frac{1}{\eta^o}\mathbb{E}\left[\ell\left((\ell^*)'(\eta^o \frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}})\right) + \ell^*\left(\eta^o \frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}\right)\right] \\
&= \frac{1}{\eta^o}\left(\ell(0) + \mathbb{E}\left[\ell^*\left(\eta^o \frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}\right)\right]\right) = A(\mathbb{Q}).
\end{aligned}$$

9. On a $\ell^*(y) = \sup_{x \in \mathbb{R}} xy - e^{\beta x}$. Pour $y < 0$, $\ell^*(y) = +\infty$ car $xy - e^{\beta x} \to +\infty$ lorsque $x \to -\infty$. On a $\ell^*(0) = 0$, et pour $y > 0$, le supremum est atteint pour $x = \frac{1}{\beta}\log(y/\beta)$. Cela donne

$$\ell^*(y) = \frac{y}{\beta}\log\left(\frac{y}{\beta}\right) - \frac{y}{\beta}.$$

On a $(\ell^*)'(y) = \frac{1}{\beta}\log\left(\frac{y}{\beta}\right)$, $\ell((\ell^*)'(y)) = \frac{y}{\beta}$ et donc $\mathbb{E}[\frac{\eta^o}{\beta}\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}] = \ell(0) = 1$, ce qui donne $\eta^o = \beta$. On a donc

$$\begin{aligned}
A(\mathbb{Q}) &= \frac{1}{\beta}\left(1 + \mathbb{E}\left[\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}\log\left(\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}\right) - \frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}\right]\right) \\
&= \frac{1}{\beta}\mathbb{E}\left[\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}\log\left(\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}\right)\right].
\end{aligned}$$