Examen du cours de "Mesures de risque en finance"

Mercredi 20 Décembre 2017 (9h00-11h00)

Aucun document autorisé.

Il est impératif de rédiger la réponse des deux parties sur des copies différentes.

Partie I (Mesures de risque) (sur 10 points)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $u \in \mathbb{R}^n$ le vecteur tel que $u_i = 1$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, et on munit $\mathbb{R}^n$ de l'ordre partiel :

$$x, y \in \mathbb{R}^n, x \le y \text{ si } \forall i \in \{1, \dots, n\}, x_i \le y_i.$$

On note $\mathcal{P} = \{x \in \mathbb{R}^n : \forall i \in \{1, \dots, n\}, x_i \ge 0, \sum_{i=1}^n x_i = 1\}$ et, pour $x, y \in \mathbb{R}^n$, $x \cdot y = \sum_{i=1}^n x_i y_i$ le produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$. On considère une fonction $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ telle que :

i) $h(0) = 0$,

ii) $\forall x, y \in \mathbb{R}^n,\ x \le y \implies h(y) \le h(x)$,

iii) $\forall x \in \mathbb{R}^n, m \in \mathbb{R},\ h(x + mu) = h(x) - m$.

On note $A_h = \{x \in \mathbb{R}^n, h(x) \le 0\}$.

1. Montrer que $h(x) = \inf\{m \in \mathbb{R}, x + mu \in A_h\}$.
2. Soit $\alpha : \mathcal{P} \to [0, +\infty]$ une fontion telle que $\inf_{p \in \mathcal{P}} \alpha(p) = 0$. Montrer que la fonction $\tilde{h}(x) = \sup_{p \in \mathcal{P}}\{-p \cdot x - \alpha(p)\}$ satisfait les propriétés i), ii), iii) et est convexe.
3. On suppose désormais h convexe. Montrer que $h(x) = \sup_{y \in \mathbb{R}^n}\{x \cdot y - h^*(y)\}$ avec $h^*(y) = \sup_{x \in \mathbb{R}^n}\{x \cdot y - h(x)\}$, puis que $h(x) = \sup_{p \in \mathcal{P}}\{-p \cdot x - \alpha_h(p)\}$, où $\alpha_h(p) = \sup_{x \in \mathbb{R}^n}\{-p \cdot x - h(x)\}$. Vérifier que $\alpha_h(p) = \sup_{x \in A_h}\{-p \cdot x\}$.

Pour une permutation σ de $\{1, \dots, n\}$, et un vecteur $x \in \mathbb{R}^n$, on note $x_\sigma \in \mathbb{R}^n$ le vecteur tel que $(x_\sigma)_i = x_{\sigma(i)}$. Par ailleurs, pour chaque $x \in \mathbb{R}^n$, il existe une permutation σ_c qui permet d'ordonner les éléments de x, c'est à dire telle que $x_{\sigma_c(1)} \le \dots \le x_{\sigma_c(n)}$ et on note $\vec{x} = x_{\sigma_c}$ le vecteur réordonné.

4. On suppose toujours h convexe, et en plus on fait l'hypothèse que h est symétrique, c'est à dire que $h(x) = h(x_\sigma)$ pour toute permutation σ de $\{1, \dots, n\}$. Montrer que α_h est alors également symétrique. En déduire que
$$h(x) = \sup_{p \in \mathcal{P}} \vec{p} \cdot \overrightarrow{(-x)} - \alpha_h(\vec{p}).$$

On considère $\Omega = \{1, \dots, n\}$ et $\mathcal{X} = \{X : \Omega \to \mathbb{R}\}$, l'ensemble des fonctions de Ω dans $\mathbb{R}$ qui sera ici l'ensemble des positions financières possibles. On a naturellement un isomorphisme $\Phi : \mathcal{X} \to \mathbb{R}^n$ défini par $\Phi(X) = \begin{pmatrix} X(1) \\ \vdots \\ X(n) \end{pmatrix}$. Ainsi, pour $x \in \mathbb{R}^n$, $\Phi^{-1}(x)$ est la position financière telle que $(\Phi^{-1}(x))(i) = x_i$ pour $1 \le i \le n$.

5. Montrer que $\rho : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ est une mesure de risque monétaire normalisée si, et seulement si $h_\rho(x) := \rho(\Phi^{-1}(x))$ satisfait les propriétés i), ii), iii).
6. A l'aide du théorème de représentation des mesures de risques convexes, retrouver le résultat de la question 3.

On munit désormais Ω de la tribu discrète $\mathcal{F} = \{A : A \subset \Omega\}$ et de la probabilité uniforme $\mathbb{P}(\{i\}) = 1/n$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$.

7. On considère $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $x = \vec{x}$, i.e. $x_1 \le \dots \le x_n$. Calculer pour tout $\lambda \in]0, 1]$, $VaR_\lambda(\Phi^{-1}(x))$ puis $h_{AVaR_\lambda}(x) := AVaR_\lambda(\Phi^{-1}(x))$.
8. Montrer que ρ est invariante en loi si et seulement si h_ρ est symétrique. Dans ce cas, montrer à l'aide de la question 4 que
$$h_\rho(x) = \sup_{q \in \mathcal{P}} \sum_{i=1}^n q_i h_{AVaR_{i/n}}(x) - \beta(q),$$

avec $\beta(q) = \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \sum_{i=1}^n q_i h_{AVaR_{i/n}}(x) - h_\rho(x)$ pour $q \in \mathcal{P}$. [Indication : on vérifiera que $\Psi : \{p \in \mathcal{P}, p = \overrightarrow{p}\} \to \mathcal{P}$ définie par $\Psi(p)_i = (p_{n-i+1} - p_{n-i})i$ avec $p_0 = 0$ est une application linéaire bijective.]

Comparer ce résultat avec le théorème vu en cours sur la représentation des mesures de risques invariantes en loi.

9. On suppose maintenant $\mathbb{P}$ n'est plus la probabilité uniforme et est telle que pour tout $I, J \subset \{1, \dots, n\}$, $\mathbb{P}(I) = \mathbb{P}(J) \implies I = J$. A-t-on le même résultat de représentation qu'à la question précédente pour les mesures de risques invariantes en loi ?

Partie II (barème indicatif /10 points)

Question 1 (1 point)

Soit F une fonction de répartition non dégénérée et inversible d'inverse F^{-1}. Soient $(a, \alpha, b, \beta) \in (0, \infty) \times (0, \infty) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ vérifiant $F(ax + b) = F(\alpha x + \beta)$ pour tout x. Montrer que $a = \alpha$ et $b = \beta$.

Question 2 (1+1 points)

Soient $\alpha > 0$, F fonction de répartition continue et $F^{-1}(y) = \inf\{x \in \mathbb{R},\ F(x) \geq y\}$, elles vérifient $\forall x \in \mathbb{R}$ et $y \in]0, 1]$: $F(x) \geq y \Leftrightarrow x \geq F^{-1}(y)$.

1. Montrer que $F(F^{-1}(x)) = x$.
2. En supposant que $x^\alpha(1 - F(x))$ est à variation lente, montrer que F est dans le domaine d'attraction d'une loi de Fréchet i.e. $\exists\ d_n = 0$ et $c_n = F^{-1}\left(1 - \frac{1}{n}\right)$ avec $F^n(c_n x + d_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \exp(-x^{-\alpha})$.

Question 3 (1,5+2 points)

On sait que les lois normale (centrée réduite) et log-normale, de fonctions de répartition respectives F_N et F_L, appartiennent au domaine d'attraction d'une loi de Gumbel de fonction de répartition Λ i.e. il existent des coefficients de translation d_n^N et d_n^L et des coefficients d'échelle c_n^N et c_n^L strictement positifs tels que $F_N^n(x/c_n^N + d_n^N) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \Lambda(x)$ et $F_L^n(x/c_n^L + d_n^L) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \Lambda(x)$. De plus, il suffit de prendre $c_n^N = \sqrt{2\log(n)}$ et d_n^N vérifiant $nF_N'(d_n^N)/d_n^N \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$.

1. Donner une expression asymptotique de d_n^N.
2. Soient deux constantes positives μ, σ et le maximum $M_n = \max\limits_{1\leq i\leq n} e^{\mu+\sigma X_i}$ où X_1, ..., X_n sont n observations indépendantes identiquement distribuées de loi normale centrée réduite. Lorsque $n \to \infty$, utiliser le fait que $P\left(M_n \leq \exp\left(\mu + \sigma d_n^N + \dfrac{\sigma x}{c_n^N}\right)\right) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \Lambda(x)$ pour exprimer d_n^L et c_n^L en fonction de d_n^N, c_n^N, μ et σ.

Question 4 (1,5 points)

Soient n observations X_1, ..., X_n indépendantes identiquement distribuées de loi de Pareto généralisée caractérisée par sa fonction de survie donnée, pour $(\xi, \beta) \in \mathbb{R} \times (0, \infty)$ et $x \in D_{\xi,\beta}$, par : $\overline{G}_{\xi,\beta}(x) = (1 + \xi x/\beta)^{-1/\xi} 1_{\xi\neq 0} + e^{-x/\beta} 1_{\xi=0}$ où $D_{\xi,\beta} = [0, \infty)$ si $\xi \geq 0$ et $D_{\xi,\beta} = [0, -\beta/\xi]$ si $\xi < 0$.

Lorsque $\xi < 1$ et $E(X_1 - u | X_1 > u) = \dfrac{\beta + \xi u}{1 - \xi}$, expliquer le choix de u et l'estimation de (ξ, β).

Question 5 (2 points)

Dans un marché de gré à gré, pour tout $t \in [0, T]$, C_t représente la somme des flux entre 0 et t réellement transmis par la banque à son client. On note : S l'actif sous-jacent risqué, r le taux OIS (Overnight Indexed Swap) sans risque, Γ le collatéral, B^0 l'actif de placement de la banque vis-à-vis de son client, $\overline{B}^0$ l'actif de placement du client vis-à-vis de la banque, B^f l'actif de placement de la banque vis-à-vis de son régulateur, $\overline{B}^f$ l'actif de placement du régulateur vis-à-vis de la banque. Préciser les expressions de η^0, $\overline{\eta}^0$, η^f, $\overline{\eta}^f$ qui interviennent dans le bilan des variations du portefeuille autofinancé de la banque : $dV_t = -dC_t + \xi_t dS_t + \eta_t^0 dB_t^0 + \overline{\eta}_t^0 d\overline{B}_t^0 + \eta_t^f dB_t^f + \overline{\eta}_{t-}^f d\overline{B}_t^f$.

Corrigé de la Parite I :

1. On a $\inf\{m \in \mathbb{R}, x+mu \in A_h\} = \inf\{m \in \mathbb{R}, h(x+mu) \leq 0\} = \inf\{m \in \mathbb{R}, h(x)-m \leq 0\} = h(x)$.
2. On a $h(0) = -\inf_{p\in\mathcal{P}} \alpha(p) = 0$. Soient $x \leq y$. Pour tout $p \in \mathcal{P}$, on a $p \cdot x \leq p \cdot y$ (car $p \geq 0$) et donc $-p \cdot y - \alpha(p) \leq -p \cdot x - \alpha(p)$, ce qui donne le résultat en passant au supremum. Enfin, comme $p \cdot u = 1$, on a $p \cdot (x+mu) = p \cdot x + m$, et donc $\tilde{h}(x+mu) = \tilde{h}(x) - m$. Enfin, $\tilde{h}$ est convexe comme supremum de fonctions convexes.
3. Le premier résultat découle de la dualité de Fenchel-Legendre (h est continue car fonction convexe sur $\mathbb{R}^n$) : $h(x) = h^{**}(x) = \sup_{y\in\mathbb{R}^n} x \cdot y - h^*(y)$, avec $h^*(y) = \sup_{x\in\mathbb{R}^n} x \cdot y - h(x)$. Ensuite on observe que $h^*(y) < \infty \implies -y \in \mathcal{P}$. En effet, soit $y \in \mathbb{R}^n$ tel que $h^*(y) < \infty$. Pour $z \in \mathbb{R}^n$, on a
$$h^*(y) = \sup_{x\in\mathbb{R}^n} x \cdot y - h(x) = \sup_{x\in\mathbb{R}^n} (x+z) \cdot y - h(x+z),$$
car $\mathbb{R}^n = \{z + x, x \in \mathbb{R}^n\}$. Ainsi, en prenant $z \geq 0$, on a $h(x+z) \leq h(x)$, ce qui implique $h^*(y) \geq h^*(y) + z \cdot y$ puis $z \cdot y \leq 0$ car $h^*(y) < \infty$. Comme $z \geq 0$ est arbitraire, cela prouve que $y \leq 0$. En prenant $z = u$, on obtient $h^*(y) = h^*(y) + u \cdot y + 1$, et donc $\sum_{i=1}^n y_i = -1$. Enfin on remarque que pour $p \in \mathcal{P}$, $h^*(-p) = \sup_{x\in\mathbb{R}^n} -x \cdot p - h(x) = \alpha_h(p)$. Clairement, $\alpha_h(p) \geq \sup_{x\in A_h} -x \cdot p - h(x) \geq \sup_{x\in A_h} -x \cdot p$, puisque $h(x) \leq 0$ pour $x \in A_h$. Inversement, si $x \in \mathbb{R}^n$, $x + h(x)u \in A_h$ puisque $h(x+h(x)u) = h(x) - h(x) = 0$ et donc $\sup_{x\in A_h} -x \cdot p \geq \sup_{x\in\mathbb{R}^n} -(x+h(x)u) \cdot p = \sup_{x\in\mathbb{R}^n} -x \cdot p - h(x)$ ce qui donne l'égalité voulue.
4. Il suffit de remarquer que $p_\sigma \cdot x = \sum_{i=1}^n p_{\sigma(i)} x_i = \sum_{i=1}^n p_i x_{\sigma^{-1}(i)} = p \cdot x_{\sigma^{-1}}$. Ainsi, puisque $h(x) = h(x_{\sigma^{-1}})$, il vient $\alpha_h(p_\sigma) = \sup_{x\in\mathbb{R}^n} -x \cdot p_\sigma - h(x) = \sup_{x\in\mathbb{R}^n} -x_{\sigma^{-1}} \cdot p - h(x_{\sigma^{-1}}) = \alpha_h(p)$, la dernière égalité venant du fait que $x \mapsto x_\sigma$ est bijective. Ainsi, α_h est symétrique. Comme h est symétrique,
$$h(x) = h(-\overrightarrow{(-x)}) = \sup_{p\in\mathcal{P}} p \cdot \overrightarrow{(-x)} - \alpha_h(p) = \sup_{p\in\mathcal{P},\sigma\in\mathfrak{S}_n} p_\sigma \cdot \overrightarrow{(-x)} - \alpha_h(p_\sigma).$$
A p fixé, $\alpha_h(p_\sigma) = \alpha(p) = \alpha(\overrightarrow{p})$ et la permutation qui maximise $p_\sigma \cdot \overrightarrow{(-x)}$ est celle qui ordonne p dans l'ordre croissant. On en déduit $h(x) = \sup_{p\in\mathcal{P}} \overrightarrow{p} \cdot \overrightarrow{(-x)} - \alpha_h(\overrightarrow{p})$.
5. Il suffit d'observer que pour $X, Y \in \mathcal{X}$, $X \leq Y \iff \Phi(X) \leq \Phi(Y)$ et pour $X \in \mathcal{X}, m \in \mathbb{R}$, $\Phi(X+m) = \Phi(X) + mu$.
6. D'après le théorème de représentation des mesures de risque, $\rho(X) = \sup_{Q\in\mathcal{M}_{1,f}} \mathbb{E}_Q[-X] - \alpha(Q)$ où $\mathcal{M}_{1,f}$ est l'ensemble des mesures finiment additives sur Ω positives et de masse 1, et $\alpha(Q) = \sup_{X\in\mathcal{X}} \mathbb{E}_Q[-X] - \rho(X)$. Notons pour $Q \in \mathcal{M}_{1,f}$, $q_i = Q(\{i\})$ si bien que $q \in \mathcal{P}$, et réciproquement, pour $q \in \mathcal{P}$ on peut définit $Q \in \mathcal{M}_{1,f}$ telle que $Q(\{i\}) = q_i$. On a $\mathbb{E}_Q[-X] = -q \cdot \Phi(X)$, ce qui donne $\alpha(Q) = \alpha_{h_\rho}(q)$ puis $h_\rho(x) = \sup_{q\in\mathcal{P}} -q \cdot x - \alpha_{h_\rho}(q)$.
7. On a $VaR_\lambda(\Phi^{-1}(x)) = \inf\{m \in \mathbb{R} : \mathbb{P}(\Phi^{-1}(x) < -m) \leq \lambda\} = -x_i$ pour $\lambda \in]\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}]$, $1 \leq i \leq n$. Ensuite, on utilise la formule $AVaR_\lambda(\Phi^{-1}(x)) = \frac{1}{\lambda}\int_0^\lambda VaR_u(\Phi^{-1}(x))du$. Il vient que $AVaR_\lambda(\Phi^{-1}(x)) = -x_1$ pour $\lambda \in]0, \frac{1}{n}]$, $AVaR_{\frac{i}{n}}(\Phi^{-1}(x)) = -\frac{1}{i}\sum_{j=1}^i x_i$ pour $1 \leq i \leq n$, et pour $\lambda \in]\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}]$ avec $1 \leq i \leq n-1$,
$$\begin{aligned} AVaR_\lambda(\Phi^{-1}(x)) &= \frac{1}{\lambda}\left[\frac{i}{n} AVaR_{\frac{i}{n}}(\Phi^{-1}(x)) - (\lambda - \frac{i}{n})x_{i+1}\right] \\ &= -\frac{1}{\lambda}\left[\frac{1}{n}\sum_{j=1}^i x_i + (\lambda - \frac{i}{n})x_{i+1}\right] \\ &= \frac{1}{\lambda}\left[(\lambda - \frac{i}{n})(i+1) AVaR_{\frac{i+1}{n}}(\Phi^{-1}(x)) + (\frac{i+1}{n} - \lambda) i AVaR_{\frac{i}{n}}(\Phi^{-1}(x))\right], \end{aligned}$$
ce qui montre en outre que $AVaR_\lambda(\Phi^{-1}(x))$ est une combinaison convexe de $AVaR_{\frac{i}{n}}(\Phi^{-1}(x))$ et $(i+1)AVaR_{\frac{i+1}{n}}(\Phi^{-1}(x))$, puisque $\frac{1}{\lambda}[(\lambda - \frac{i}{n})(i+1) + (\frac{i+1}{n} - \lambda)i] = 1$.

8. Il suffit de remarquer que pour $X, Y \in \mathcal{X}$, $X \overset{loi}{=} Y \iff \exists \sigma \in \mathfrak{S}_n, \Phi(X)_\sigma = \Phi(Y)$. Ainsi, si h_ρ est symétrique, $\rho = h_\rho \circ \Phi$ est invariante en loi, et si ρ est invariante en loi, $\rho(\Phi^{-1}(x)) = \rho(\Phi^{-1}(x_\sigma))$. Soit $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $x = \overrightarrow{x}$, i.e. $x_1 \leq \cdots \leq x_n$. D'après la question 4, on a

$$h_\rho(x) = \sup_{p \in \mathcal{P}, p = \overrightarrow{p}} \sum_{i=1}^{n} -p_i x_{n+1-i} - \alpha_h(p).$$

Grâce à la question précédente, on a $-x_{n+1-i} = (n-i+1) AVaR_{\frac{n-i+1}{n}}(\Phi^{-1}(x)) - (n-i) AVaR_{\frac{n-i}{n}}(\Phi^{-1}(x))$ et donc

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} -p_i x_{n+1-i} &= \sum_{i=1}^{n} p_i [(n-i+1) AVaR_{\frac{n-i+1}{n}}(\Phi^{-1}(x)) - (n-i) AVaR_{\frac{n-i}{n}}(\Phi^{-1}(x))] \\
&= \sum_{i=1}^{n} p_i (n-i+1) AVaR_{\frac{n-i+1}{n}}(\Phi^{-1}(x)) - \sum_{i=2}^{n} p_{i-1} (n-i+1) AVaR_{\frac{n-i+1}{n}}(\Phi^{-1}(x)) \\
&= \sum_{i=1}^{n} (p_i - p_{i-1})(n-i+1) AVaR_{\frac{n-i+1}{n}}(\Phi^{-1}(x)) \\
&= \sum_{i=1}^{n} (p_{n-i+1} - p_{n-i}) i AVaR_{\frac{i}{n}}(\Phi^{-1}(x)),
\end{aligned}$$

en posant $p_0 = 0$. Soit $q \in \mathbb{R}^n$ tel que $q_i = (p_{n-i+1} - p_{n-i}) i$. On a $q_i \geq 0$ et $\sum_{i=1}^n q_i = \sum_{i=1}^n i p_{n-i+1} - \sum_{i=1}^{n-1} i p_{n-i} = \sum_{i=1}^n i p_{n-i+1} - \sum_{i=2}^n (i-1) p_{n-i+1} = \sum_{i=1}^n p_i = 1$. Réciproquement, si $q \in \mathcal{P}$, on pose $p_1 = q_n / n$ et $p_i = p_{i-1} + q_{n-i+1}/n + i - 1$ pour $i = 2, \ldots, n$ si bien que $p = \overrightarrow{p}$ et par le même calcul $\sum_{i=1}^n p_i = \sum_{i=1}^n q_i = 1$. Ainsi, l'application linéaire Ψ est bijective, et $\beta(q) = \alpha(\Psi^{-1}(q)) = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \sum_{i=1}^n q_i AVaR_{\frac{i}{n}}(\Phi^{-1}(x)) - h_\rho(x)$. On conclut en utilisant que

$$h_\rho(x) = h_\rho(\overrightarrow{x}) = \sup_{q \in \mathcal{P}} \sum_{i=1}^{n} q_i AVaR_{\frac{i}{n}}(\Phi^{-1}(\overrightarrow{x})) - \beta(q) = \sup_{q \in \mathcal{P}} \sum_{i=1}^{n} q_i AVaR_{\frac{i}{n}}(\Phi^{-1}(x)) - \beta(q).$$

Le théorème du cours sur la représentation des mesures de risque vu en cours ne s'applique pas ici car il suppose l'existence d'une v.a. uniforme sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, ce qui est impossible avec Ω fini. Néanmoins s'il s'appliquait, on aurait

$$\rho(X) = \sup_{\mu \in \mathcal{M}_1(]0,1])} \left(\int_{]0,1]} AVaR_\lambda(X) \mu(d\lambda) - \beta(\mu) \right),$$

où $\beta(\mu) = \sup_{X \in \mathcal{X}} \int_{]0,1]} AVaR_\lambda(X) \mu(d\lambda) - \rho(X)$. Comme $AVaR_\lambda(X) = AVaR_{1/n}(X)$ pour $\lambda \in]0, 1/n]$ et $AVaR_\lambda(X)$ est une combinaison convexe de $AVaR_{i/n}(X)$ et $AVaR_{(i+1)/n}(X)$ pour $\lambda \in]i/n, (i+1)/n]$, ce résultat donnerait

$$\rho(X) = \sup_{q \in \mathcal{P}} \left(\sum_{i=1}^{n} q_i AVaR_{i/n}(X) - \beta(q) \right),$$

avec $\beta(q) = \sup_{X \in \mathcal{X}} \sum_{i=1}^n q_i AVaR_{i/n}(X) - \rho(X)$, ce qui est précisément le résultat obtenu via l'isomorphisme Φ entre $\mathcal{X}$ et $\mathbb{R}^n$. Ainsi, on a étendu le résultat du cours, à un cas où l'espace de probabilité ne supporte pas de loi uniforme.

9. Dans ce cas, $X \overset{loi}{=} Y \iff X = Y$. En effet, supposons que X a même loi que Y. Pour $x \in \mathbb{R}$ tel que $\mathbb{P}(X = x) > 0$, on pose $I = \{i, X(i) = x\}$ et $J = \{i, Y(i) = x\}$. Comme $\mathbb{P}(I) = \mathbb{P}(J)$, il vient $I = J$ et donc $X = Y$ en répétant l'argument pour tous les x tels que $\mathbb{P}(X = x) > 0$. Par conséquent, la propriété d'invariance en loi n'apporte aucune information supplémentaire sur ρ (toute mesure de risque est invariante en loi) et on ne peut pas aller au delà de la représentation donnée à la question 3. Si on prend $h_\rho(x) = -x_1$ i.e. $\rho(X) = -X(1)$, cela définit une mesure de risque convexe invariante en loi, mais on ne peut pas avoir $h(x) = \sup_{\mu \in \mathcal{M}_1(]0,1])} \left(\int_{]0,1]} AVaR_\lambda(\Phi^{-1}(x)) \mu(d\lambda) - \beta(\mu) \right)$ car $AVaR_\lambda(\Phi^{-1}(x)) \to +\infty$ lorsque $x_2 \to -\infty$.