Examen du cours de “Mesures de risque en finance”

Mercredi 19 Décembre 2018 (9h00-11h00)

Aucun document autorisé.

Il est impératif de rédiger la réponse aux deux parties sur des copies différentes.

Partie I (10 points)

On considère $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité et $\mathcal{X} = L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, l'ensemble des variables aléatoires à valeurs bornées muni de la norme $\|X\|_\infty = \inf\{M > 0, \mathbb{P}(|X| \leq M) = 1\}$.

Exercice 1 Soit $\alpha > 0$. Est-ce que la fonction $\rho(X) = \mathbb{E}[-X] + \alpha\mathbb{E}[|X - \mathbb{E}[X]|]$, $X \in \mathcal{X}$, est invariante par translation ? Positivement homogène ? Convexe ? Monotone ? Justifier vos réponses.

Exercice 2. (D'après Frittelli et Scandolo (2006))

On considère $n \geq 1$ et $X_1, \ldots, X_n \in \mathcal{X}$ tel que X_1 satisfait $\exists c \in \mathbb{R}_+^*, \mathbb{P}(X_1 \geq c) = 1$. On considère une application $\rho : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ ayant les propriétés suivantes :

— Monotonie : $X, Y \in \mathcal{X}$, $X \leq Y \implies \rho(Y) \leq \rho(X)$,

— $(X_1, \ldots, X_n)$-invariance par translation :

$$\forall X \in \mathcal{X}, \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}, \rho(X + \sum_{i=1}^n \lambda_i X_i) = \rho(X) - \sum_{i=1}^n \lambda_i,$$

— Normalisation $\rho(0) = 0$.

On note $\mathcal{A} = \{X \in \mathcal{X} : \rho(X) \leq 0\}$ l'ensemble des positions acceptables.

1. Montrer que pour tout $X \in \mathcal{X}$, $\rho(X) = \inf\{\lambda \in \mathbb{R} : X + \lambda X_1 \in \mathcal{A}\} = \inf\{\sum_{i=1}^n \lambda_i : \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}, X + \sum_{i=1}^n \lambda_i X_i \in \mathcal{A}\}$.
2. Dans cette question seulement, on suppose $X_1 = 1$. Soit $\alpha \in]0, 1[$. Vérifier que $\psi_\alpha(X) = \inf\{\sum_{i=1}^n \lambda_i : \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}, \mathbb{P}(X + \sum_{i=1}^n \lambda_i X_i < 0) \leq \alpha\}$ satisfait les trois propriétés ci-dessus lorsque $\psi_\alpha(0) > -\infty$, puis que $\psi_\alpha(X) \leq VaR_\alpha(X)$.
3. On suppose que ρ est une mesure de risque convexe et semi continue inférieurement pour la topologie faible*. On note $\mathcal{X}' = L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Montrer que $\rho(X) = \sup_{Y \in \mathcal{X}'} \mathbb{E}[XY] - \rho^*(Y)$, où $\rho^*(Y) = \sup_{X \in \mathcal{X}} \mathbb{E}[XY] - \rho(X)$, puis que
$$\rho(X) = \sup_{\mathbb{Q} \in \mathcal{Q}} \mathbb{E}_\mathbb{Q}[-X/X_1] - \alpha(\mathbb{Q}),$$
avec $\mathcal{Q} = \{\mathbb{Q} \in \mathcal{M}_1(\mathbb{P}), \forall i \in \{1, \ldots, n\}, \mathbb{E}_\mathbb{Q}[X_i/X_1] = 1\}$ et $\alpha(\mathbb{Q}) = \sup_{X \in \mathcal{X}} \mathbb{E}^\mathbb{Q}[-X/X_1] - \rho(X)$.
4. On suppose $n = 1$ et définit $\tilde{\rho}(X) = \rho(X_1 X)$. Montrer que $\tilde{\rho}$ est une mesure de risque monétaire, et retrouver dans ce cas le résultat de la question 3 à l'aide d'un théorème du cours.

Partie II (barème indicatif /10 points)

Question 1 (1,5 points)

Soit $(X_i)_{i \geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes et identiquement distribuées de fonction de répartition F. Montrer que $\max_{1 \leq i \leq n} X_i$ converge presque sûrement vers $x_\mu = \sup\{x, F(x) < 1\}$.

Question 2 **(2 points)**

D'après le cours, on sait qu'une fonction de répartition f non-dégénérée est max-stable si et seulement si $\exists$ une suite de fonctions de répartition (f_n) et deux suites b_n, a_n (> 0) telles que pour chaque $k = 1, 2, ...$, la convergence simple $f_n(b_{nk} + x/a_{nk}) \to f^{1/k}(x)$ est vérifiée lorsque $n \to \infty$.

Montrer alors qu'une fonction de répartition G non-dégénérée est max-stable si et seulement si $D(G) \neq \emptyset$ avec $G \in D(G)$. La notation $D(G)$ désigne le domaine d'attraction associé à la loi dont la fonction de répartition est donnée par G.

Question 3 **(2,5 points)**

Soient F une fonction de répartition avec $x_\mu = \sup\{x, F(x) < 1\}$ et G une fonction de répartition d'une loi max-stable.

1. Si $F \in D(G) \Rightarrow x_\mu < +\infty$, justifier la catégorie de G.
2. Si $F(x) = \dfrac{1}{\pi}\arctan(x) + \dfrac{1}{2} \in D(G)$, justifier la catégorie de G (Utiliser $\arctan(x) \underset{\infty}{\approx} \pi/2 - 1/x$).
3. Si $F(x) = 1 - e^{-\lambda x} \in D(G)$ avec $\lambda > 0$, justifier la catégorie de G.

Question 4 **(1,5 points)**

Pour $(\xi, \beta) \in \mathbb{R} - \{0\} \times (0, +\infty)$ et $x \in D_{\xi,\beta}$, soit la loi de Pareto généralisée caractérisée par sa fonction de survie $\overline{G}_{\xi,\beta}(x) = (1 + \xi x/\beta)^{-1/\xi}$ où $D_{\xi,\beta} = [0, \infty)$ si $\xi > 0$ et $D_{\xi,\beta} = [0, -\beta/\xi]$ si $\xi < 0$. Soient n observations X_1, ..., X_n indépendantes identiquement distribuées de fonction de répartition F avec $x_\mu = \sup\{x, F(x) < 1\} = +\infty$. On sait qu'il existe une fonction borélienne $\beta : \mathbb{R} \to (0, +\infty)$ telle que $\overline{F}_u(y) = P(X > u + y | X > u)$ $((u, y) \in \mathbb{R} \times [0, +\infty))$ vérifie la convergence uniforme :

$$\lim_{u \to \infty} \sup_{y \in [0, +\infty)} |\overline{F}_u(y) - \overline{G}_{\xi,\beta(u)}(y)| = 0.$$

Utiliser ce résultat pour proposer un estimateur de $q_\alpha = \inf\{x, F(x) \geq \alpha\}$ (Sans détailler le choix de u et l'estimation de (ξ, β)).

Question 5 **(2,5 points)**

Dans un marché de gré à gré, une banque b et son client c établissent un contrat dans lequel la banque assure une somme D_t de flux entre 0 et $t \in [0, T]$. Soit le couple prix-couverture (π, ξ) de ce contrat, incluant le défaut de chaque partie, qui vérifie

$$\left\{ \begin{array}{cc} \pi_{\overline{\tau}} = 1_{\tau < T} R & R = R^c - 1_{\tau = \tau^b} R^f, \\ d\pi_t = -dC_t + (r_t \pi_t + g_t(\pi_t, \xi_t))dt + dm_t^\xi & t \in [0, \overline{\tau}]. \end{array} \right.$$

1. Exprimer τ et dC_t en fonction des temps de défauts et de dD_t.
2. Que représentent les termes R^c et R^f ?

Pour $t \in [0, \overline{\tau}]$, soient $\theta_t = p_t - \pi_t$ et $(p_t)_{0 \leq t \leq T}$ le prix mark-to-market (excluant les défauts) associé à D.

3. Exprimer la valeur de p.
4. En identifiant la martingale $\widehat{m}$, montrer que θ vérifie

$$\left\{ \begin{array}{l} \theta_{\overline{\tau}} = p_{\overline{\tau}} - 1_{\tau < T} R \\ d(\beta_t \theta_t) + \beta_t g_t(p_t - \theta_t, \xi_t)dt = d\widehat{m}_t \quad t \in [0, \overline{\tau}], \end{array} \right.$$

   avec $\beta_t = \exp(-\int_0^t r_s ds)$.

Corrigé :

Exercice 1 La fonction ρ_α est invariante par translation : pour $X \in \mathcal{X}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $\mathbb{E}[X+\lambda] = \mathbb{E}[X]+\lambda$ et donc $\rho_\alpha(X+\lambda) = -\lambda - \mathbb{E}[X] + \alpha\mathbb{E}[|X-\mathbb{E}[X]|] = \rho_\alpha(X) - \lambda$. Elle est positivement homogène puisque pour $\lambda > 0$, $\mathbb{E}[|\lambda X - \mathbb{E}[\lambda X]|] = \lambda \mathbb{E}[|X-\mathbb{E}[X]|]$. Elle est également convexe car pour $\lambda \in [0,1]$, $X, Y \in \mathcal{X}$, $\mathbb{E}[|\lambda X + (1-\lambda)Y - \mathbb{E}[\lambda X + (1-\lambda)Y]|] = \mathbb{E}[|\lambda(X-\mathbb{E}[X]) + (1-\lambda)(Y-\mathbb{E}[Y])|] \leq \lambda\mathbb{E}[|X-\mathbb{E}[X]|] + (1-\lambda)\mathbb{E}[|Y-\mathbb{E}[Y]|]$ par l'inégalité trangulaire. Elle est monotone si $\alpha \in]0,1/2]$ si $X, Y \in \mathcal{X}$ avec $Y \geq 0$, on a à nouveau par l'inégalité triangulaire $\rho(X+Y) \leq \rho(X) + \rho(Y)$, puis on a $\rho(Y) = -\mathbb{E}[Y] + \alpha\mathbb{E}[|Y-\mathbb{E}[Y]|] \leq (2\alpha-1)\mathbb{E}[Y] \leq 0$ par l'inégalité triangulaire. En revanche, elle n'est pas monotone si $\alpha > 1/2$. Soit $x > 0$, $p_x \in [0,1]$ et X telle que $\mathbb{P}(X = x) = p_x$, $\mathbb{P}(X=0) = 1-p_x$. On a $\rho_\alpha(X) = -p_x x + \alpha(p_x(1-p_x)x + (1-p_x)p_x x) = p_x x[-1+2\alpha(1-p_x)] > 0 = \rho_\alpha(0)$ en prenant $p_x > 0$ assez petit, ce qui contredit la monotonie puisque $X \geq 0$.

Exercice 2

1. On a $\rho(X+\lambda X_1) = \rho(X) - \lambda$ donc $\{\lambda \in \mathbb{R}, X + \lambda X_1 \in \mathcal{A}\} = [\rho(X)+\infty)$ et donc $\inf\{\lambda \in \mathbb{R}, X+\lambda X_1 \in \mathcal{A}\} = \rho(X)$. De même, $\rho(X + \sum_{i=1}^n \lambda_i X_i) = \rho(X) - \sum_{i=1}^n \lambda_i$ et on a $X + \sum_{i=1}^n \lambda_i X_i \in \mathcal{A}$ si, et seulement si, $\rho(X) \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i$. On a donc $\rho(X) = \inf\{\sum_{i=1}^n \lambda_i : \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}, X + \sum_{i=1}^n \lambda_i X_i \in \mathcal{A}\}$.
2. Si $X \leq Y$, on a $\mathbb{P}(X + \sum_{i=1}^n \lambda_i X_i < 0) \geq \mathbb{P}(Y + \sum_{i=1}^n \lambda_i X_i < 0)$ et donc $\{\sum_{i=1}^n \lambda_i : \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}, \mathbb{P}(X + \sum_{i=1}^n \lambda_i X_i < 0) \leq \alpha\} \subset \{\sum_{i=1}^n \lambda_i : \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}, \mathbb{P}(Y + \sum_{i=1}^n \lambda_i X_i < 0) \leq \alpha\}$ puis $\psi_\alpha(Y) \leq \psi_\alpha(X)$. On a $\psi_\alpha(X + \sum_{i=1}^n \mu_i X_i) = \inf\{\sum_{i=1}^n \lambda_i : \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}, \mathbb{P}(X + \sum_{i=1}^n (\lambda_i + \mu_i) X_i < 0) \leq \alpha\} = \inf\{\sum_{i=1}^n \lambda_i - \sum_{i=1}^n \mu_i : \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}, \mathbb{P}(X + \sum_{i=1}^n \lambda_i X_i < 0) \leq \alpha\} = \psi_\alpha(X) - \sum_{i=1}^n \mu_i$. Enfin, on a $\psi_\alpha(0) \leq 0$ car pour tout $\lambda_1 > 0$, $\mathbb{P}(\lambda_1 X_1 < 0) = \mathbb{P}(\lambda_1 < 0) = 0$. Par ailleurs, s'il existe $\lambda_1, \dots \lambda_n \in \mathbb{R}$ tels que $\sum_{i=1} \lambda_i < 0$ et $\mathbb{P}(\sum_{i=1}^n \lambda_i X_i < 0) \leq \alpha$, alors on a pour tout $\mu > 0$, $\mathbb{P}(\sum_{i=1}^n \mu\lambda_i X_i < 0) \leq \alpha$ et donc $\psi_\alpha(0) = -\infty$ ce qui est exclut. Par conséquent, $\psi_\alpha(0) = 0$. En fait, en vertu de la question précédente, on a même alors $\psi_\alpha(X) = VaR_\alpha(X)$.
3. Comme $\mathcal{X}'$ est le dual de $\mathcal{X}$ pour la topologie faible* et que ρ est convexe s.c.i., on peut appliquer la dualité de Fenchel-Legendre qui donne, pour $X \in \mathcal{X}$, $\rho(X) = \rho^{**}(X) = \sup_{Y \in \mathcal{X}'} \mathbb{E}[XY] - \rho^*(Y)$, avec $\rho^*(Y) = \sup_{X \in \mathcal{X}} \mathbb{E}[XY] - \rho(X)$, $Y \in \mathcal{X}'$. Soit $Y \in \mathcal{X}'$ tel que $\rho^*(Y) < +\infty$. Comme $\mathcal{X}$ est un espace vectoriel, on a par monotonie de ρ pour tout $Z \in \mathcal{X}$ tel que $Z \geq 0$
$$\rho^*(Y) = \sup_{X \in \mathcal{X}} \mathbb{E}[(X+Z)Y] - \rho(X+Z) = \mathbb{E}[ZY] + \sup_{X \in \mathcal{X}} \mathbb{E}[XY] - \rho(X+Z) \geq \mathbb{E}[ZY] + \rho^*(Y).$$
Comme $\rho^*(Y) < +\infty$, cela donne $\forall Z \in \mathcal{X}, Z \geq 0 \implies \mathbb{E}[ZY] \leq 0$, et donc $Y \leq 0$. De plus, on a
$$\rho^*(Y) = \sup_{X \in \mathcal{X}} \mathbb{E}[(X+X_i)Y] - \rho(X+X_i) = \mathbb{E}[X_iY] + 1 + \sup_{X \in \mathcal{X}} \mathbb{E}[XY] - \rho(X) = \mathbb{E}[X_iY] + 1 + \rho^*(Y).$$
Ainsi, $\rho^*(Y) < +\infty \implies Y \leq 0, \forall i, \mathbb{E}[X_iY] = -1$. Comme $X_1 \geq 0$, on pose $\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} = -X_1 Y$, et on a bien $\mathbb{E}_\mathbb{Q}[X_i/X_1] = \mathbb{E}[-X_iY] = 1$ pour tout i. Réciproquement, si $\mathbb{Q} \in \mathcal{Q}$, on définit $Y = -\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}/X_1$, et on a bien $Y \in \mathcal{X}'$ puisque $|Y| \leq |\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}|/c$ par hypothèse sur X_1, et $\mathbb{E}[-YX_i] = \mathbb{E}_\mathbb{Q}[X_i/X_1] = 1$. Enfin, on observe que $\rho^*(-\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}/X_1) = \sup_{X \in \mathcal{X}} \mathbb{E}[-\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} X/X_1] - \rho(X) = \sup_{X \in \mathcal{X}} \mathbb{E}_\mathbb{Q}[-X/X_1] - \rho(X) = \alpha(\mathbb{Q})$. Ainsi, on a bien
$$\begin{aligned}\rho(X) &= \sup_{Y \in \mathcal{X}', Y \leq 0, \forall i, \mathbb{E}[X_iY] = -1} \mathbb{E}[XY] - \rho^*(Y) \\ &= \sup_{\mathbb{Q} \in \mathcal{Q}} \mathbb{E}[XY] - \rho^*(-\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}/X_1) = \sup_{\mathbb{Q} \in \mathcal{Q}} \mathbb{E}[XY] - \alpha(\mathbb{Q}).\end{aligned}$$

4. On a pour $X \in \mathcal{X}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $\tilde{\rho}(X+\lambda) = \rho(X_1 X + \lambda X_1) = \rho(X_1 X) - \lambda$. Comme $X_1 > 0$, $X \leq Y \iff X_1 X \leq X_1 Y$ et donc $\tilde{\rho}$ est monotone. Ainsi, $\tilde{\rho}$ est une mesure de risque monétaire. Si ρ est convexe s.c.i., $\tilde{\rho}$ l'est également puisque $\tilde{\rho}(\lambda X + (1-\lambda)Y) = \rho(\lambda X X_1 + (1-\lambda) Y X_1) \leq \lambda \rho(X X_1) + (1-\lambda)\rho(Y X_1) = \lambda \tilde{\rho}(X) + (1-\lambda)\tilde{\rho}(Y)$. De plus, si $X_n \to X$ pour la topologie faible*, $X_n X_1 \to X X_1$ pour la topologie faible*, car si $Y \in \mathcal{X}'$, $X_1 Y \in \mathcal{X}'$ puisque $\|X_1\|_\infty < \infty$, et donc $\mathbb{E}[X_n X_1 Y] \to \mathbb{E}[X X_1 Y]$. Ainsi $\liminf_n \rho(X_n X_1) \geq \rho(X X_1)$. On peut donc appliquer le théorème de représentation pour $\tilde{\rho}$ vu en cours. $\tilde{\rho}(X) = \sup_{\mathbb{Q} \in \mathcal{M}_1(\mathbb{P})} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[-X] - \tilde{\alpha}(\mathbb{Q})$ avec $\tilde{\alpha}(\mathbb{Q}) = \sup_{X \in \mathcal{X}} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[-X] - \tilde{\rho}(X) = \sup_{X \in \mathcal{X}} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[-X/X_1] - \tilde{\rho}(X/X_1) = \sup_{X \in \mathcal{X}} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[-X/X_1] - \rho(X))$. Cela donne

$$\rho(X) = \tilde{\rho}(X/X_1) = \sup_{\mathbb{Q} \in \mathcal{M}_1(\mathbb{P})} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[-X/X_1] - \tilde{\alpha}(\mathbb{Q}),$$

ce qui est le résultat de la question 3 avec $n = 1$.