Examen du cours de “Mesures de risque en finance”

Mercredi 18 Décembre 2019 (9h00-11h00)

Aucun document autorisé.

Il est impératif de rédiger la réponse aux deux parties sur des copies différentes.

Partie I (10 points)

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité et $\mathcal{X} = L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, l'ensemble des variables aléatoires à valeurs bornées muni de la norme $\|X\|_\infty = \inf\{M > 0, \mathbb{P}(|X| \leq M) = 1\}$. On suppose l'espace de probabilité sans atome, c'est à dire qu'il existe $U \in \mathcal{X}$ suivant la loi uniforme sur $[0,1]$. On note $\mathcal{M}_1(\mathbb{P})$ l'ensemble des mesures de probabilité sur $(\Omega, \mathcal{F})$ qui sont absolument continues par rapport à $\mathbb{P}$ et rappelle que le théorème de Radon-Nikodym garantit que

$$\mathbb{Q} \in \mathcal{M}_1(\mathbb{P}) \iff \exists Z \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}), \forall X \in L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}), \mathbb{E}_\mathbb{Q}[X] = \mathbb{E}[ZX].$$

On considère $\rho_1, \rho_2 : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ deux mesures de risque monétaires telle que

$$\inf_{Z \in \mathcal{X}} \rho_1(-Z) + \rho_2(Z) > -\infty,$$

et on définit l'*inf-convolution* de ρ_1 et ρ_2 par

$$\rho_1 \,\square\, \rho_2(X) = \inf_{Z \in \mathcal{X}} \rho_1(X - Z) + \rho_2(Z).$$

Cela peut être interprété par exemple comme une institution financière avec deux filiales (ayant pour mesure de risque respective ρ_1 et ρ_2) qui cherche à répartir le risque de façon optimale entre les deux.

1. Montrer que $\rho_1 \,\square\, \rho_2(X) > -\infty$ pour tout $X \in \mathcal{X}$, puis que $\rho_1 \,\square\, \rho_2 : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ est une mesure de risque monétaire (qui peut être non normalisée). Vérifier que $\rho_1 \,\square\, \rho_2 = \rho_2 \,\square\, \rho_1$.
2. Montrer que $\rho_1 \,\square\, \rho_2$ est une mesure de risque convexe si ρ_1 et ρ_2 sont des mesures de risque convexes.
3. Exprimer la transformée de Fenchel-Legendre $(\rho_1 \,\square\, \rho_2)^* : L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \to]-\infty, +\infty]$ à l'aide de ρ_1^* et de ρ_2^*.
4. On considère la mesure de risque entropique de paramètre $s > 0$:
$$\mathrm{Ent}_s(X) = \frac{1}{s} \log(\mathbb{E}[e^{-sX}]), \; X \in \mathcal{X}.$$
Montrer que Ent_s est une mesure de risque monétaire convexe invariante en loi (on rappelle que cette dernière propriété assure la semi continuité inférieure pour la topologie faible*).
5. En déduire que $\mathrm{Ent}_s(X) = \sup_{\mathbb{Q} \in \mathcal{M}_1(\mathbb{P})} \mathbb{E}_\mathbb{Q}[-X] - \alpha_s(\mathbb{Q})$, où $\alpha_s : \mathcal{M}_1(\mathbb{P}) \to [0, +\infty]$ est une fonction à préciser à l'aide de Ent_s^* et $\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}$. Inversement, à l'aide du cours, exprimer Ent_s^* à l'aide de α_s.
6. On admet que $\alpha_s(\mathbb{Q}) = \frac{1}{s} H(\mathbb{Q}|\mathbb{P})$, où $H(\mathbb{Q}|\mathbb{P}) = \mathbb{E}\left[\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} \log\left(\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}\right)\right]$. Montrer que pour $s, t > 0$, $(\mathrm{Ent}_s \,\square\, \mathrm{Ent}_t)^{**} = \mathrm{Ent}_{\frac{st}{s+t}}$.
7. Pour $X \in \mathcal{X}$, trouver $\lambda \in [0,1]$ tel que $\mathrm{Ent}_s(\lambda X) + \mathrm{Ent}_t((1-\lambda)X) = \mathrm{Ent}_{\frac{st}{s+t}}(X)$. En déduire la valeur de $\mathrm{Ent}_s \,\square\, \mathrm{Ent}_t$ et déterminer alors la répartition optimale du risque si $\rho_1 = \mathrm{Ent}_s$ et $\rho_2 = \mathrm{Ent}_t$.

Partie II (barème indicatif /10 points)

Question 1 (2,5 points)

Soit G fonction de répartition d'une loi max-stable. Lorsque $G(x) \in]0,1[$, nous définissons l'inverse généralisé U de la fonction $-\log(-\log(G))$.

1. Montrer qu'il existe une fonction réelle $a(s) > 0$ telle que
   $[U(y + \log(s)) - U(\log(s))]/a(s) = U(y) - U(0)$.
2. Si $a(s) = 1$ pour tout $s > 0$, montrer que G est la fonction de répartition d'une loi de Gumbel.

Question 2 (1,5 points)

Une condition nécessaire pour vérifier le principe d'attraction est d'avoir :
$\lim_{x \to x_\mu} \overline{F}(x)/\overline{F}(x^-) = 1$ où $\overline{F} = 1 - F$ est la fonction de survie associée à la loi μ et $x_\mu = \sup\{x; F(x) < 1\}$.
Montrer alors qu'une loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$ ne vérifie pas le principe d'attraction.

Question 3 (3,5 points)

Soient deux constantes α et β strictement positives, les densités respectives d'une loi Gamma(α, β) et d'une loi logGamma(α, β) sont données par

$$f_\Gamma(x) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x} 1_{x>0}$$

$$f_{\log \Gamma}(x) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} [\log(x)]^{\alpha-1} x^{-\beta-1} 1_{x>1}$$

et notons $\overline{F}_\Gamma$ et $\overline{F}_{\log \Gamma}$ leur fonction de survie.

1. Lorsque $x \to \infty$, montrer que $\overline{F}_\Gamma(x)/f_\Gamma(x) \to \beta^{-1}$
   et que $\overline{F}_{\log \Gamma}(x)/[x f_{\log \Gamma}(x)] \to \beta^{-1}$.
2. Justifier l'appartenance de Gamma(α, β) au domaine d'attraction de la loi de Gumbel et préciser les suites $c_n > 0$ et d_n associées.
3. Justifier l'appartenance de logGamma(α, β) au domaine d'attraction de la loi de Fréchet et préciser la suite $c_n > 0$ associée ($d_n = 0$).

Question 4 (2,5 points)

Dans un marché de gré à gré, une banque b et son client c établissent un contrat dans lequel la banque assure une somme D_t de flux entre 0 et $t \in [0, T]$. Soit le couple prix-couverture (π, ξ) de ce contrat, incluant le défaut τ^b et τ^c de chaque partie avec $\tau = \tau^b \wedge \tau^c$ et $\overline{\tau} = T \wedge \tau$, qui vérifie

$$\begin{cases} \pi_{\overline{\tau}} = 1_{\tau<T} R & R = R^c - 1_{\tau=\tau^b} R^f, \\ d\pi_t = -1_{\tau>t} dD_t + (r_t \pi_t + g_t(\pi_t, \xi_t))dt + dm_t^\xi & t \in [0, \overline{\tau}]. \end{cases}$$

1. Donner deux raisons rendant la stratégie de couverture moins usuelle.

Pour $t \in [0, \overline{\tau}]$, définissons $\theta_t = p_t - \pi_t$ et $(p_t)_{0 \le t \le T}$ le prix mark-to-market (excluant les défauts) associé à D.

2. Exprimer la valeur de p en fonction de D et β avec $\beta_t = \exp(-\int_0^t r_s ds)$.
3. En identifiant la martingale $\widehat{m}$, montrer que θ vérifie

$$\begin{cases} \theta_{\overline{\tau}} = p_{\overline{\tau}} - 1_{\tau<T} R \\ d(\beta_t \theta_t) + \beta_t g_t(p_t - \theta_t, \xi_t)dt = d\widehat{m}_t \quad t \in [0, \overline{\tau}]. \end{cases}$$

Corrigé :

1. On a $X \geq -\|X\|_\infty$ et donc $\rho_1(X-Z) \leq \rho_1(-\|X\|_\infty - Z) = \|X\|_\infty + \rho_1(-Z)$. Par conséquent, $\rho_1 \square \rho_2(X) \geq \|X\|_\infty + \inf_{Z\in\mathcal{X}} \rho_1(-Z) + \rho_2(Z) > -\infty$. Cash-invariance : $\rho_1 \square \rho_2(X+c) = \inf_{Z\in\mathcal{X}} \rho_1(X+c-Z) + \rho_2(Z) = \inf_{Z\in\mathcal{X}} \rho_1(X-Z) + \rho_2(Z) - c = \rho_1 \square \rho_2(X) - c$. Monotonie : si $X \leq Y$, alors $X - Z \leq Y - Z$ pour tout $Z \in \mathcal{X}$ et donc en passant à l'inf, $\rho_1 \square \rho_2(X) \leq \rho_1 \square \rho_2(Y)$. Symétrie : on pose $Z' = X - Z$. Par la propriété d'espace vectoriel de $\mathcal{X}$, $\rho_1 \square \rho_2(X) = \inf_{Z'\in\mathcal{X}} \rho_1(Z') + \rho_2(X - Z') = \rho_2 \square \rho_1(X)$.
2. Soient $X, Y \in \mathcal{X}$, $\lambda \in [0,1]$, on a en utilisant la structure d'espace vectoriel de $\mathcal{X}$ pour la deuxième égalité :

$$\begin{aligned}
\rho_1 \square \rho_2(\lambda X + (1-\lambda)Y) &= \inf_{Z\in\mathcal{X}} \rho_1((\lambda X + (1-\lambda)Y - Z) + \rho_2(Z) \\
&= \inf_{Z_1,Z_2\in\mathcal{X}} \rho_1(\lambda(X - Z_1) + (1-\lambda)(Y - Z_2)) + \rho_2(\lambda Z_1 + (1-\lambda)Z_2) \\
&\leq \inf_{Z_1,Z_2\in\mathcal{X}} \lambda[\rho_1(X - Z_1) + \rho_2(Z_1)] + (1-\lambda)[\rho_1(Y - Z_2) + \rho_2(Z_2)] \\
&= \lambda\rho_1 \square \rho_2(X) + (1-\lambda)\rho_1 \square \rho_2(Y).
\end{aligned}$$

3. Par définition la fonction $(\rho_1 \square \rho_2)^* : L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \to]-\infty, +\infty]$ est définie par :

$$\begin{aligned}
Y \in L^1,\ (\rho_1 \square \rho_2)^*(Y) &= \sup_{X\in\mathcal{X}} \mathbb{E}[XY] - \rho_1 \square \rho_2(X) \\
&= \sup_{X\in\mathcal{X}} \mathbb{E}[XY] + \left(\sup_{Z\in\mathcal{X}} -\rho_1(X - Z) - \rho_2(Z)\right) \\
&= \sup_{X,Z\in\mathcal{X}} \mathbb{E}[(X - Z + Z)Y] - \rho_1(X - Z) - \rho_2(Z) \\
&= \sup_{Z,Z'\in\mathcal{X}} \mathbb{E}[Z'Y] - \rho_1(Z') + \mathbb{E}[ZY] - \rho_2(Z) = \rho_1^*(Y) + \rho_2^*(Y).
\end{aligned}$$

4. Ent_s est clairement monotone par croissance de la fonction exponentielle. Invariance par translation $\mathrm{Ent}_s(X+c) = \frac{1}{s}\log(\mathbb{E}[e^{-s(X+c)}]) = \frac{1}{s}\log(e^{-sc}\mathbb{E}[e^{-sX}]) = \mathrm{Ent}_s(X) - c$. Convexité : pour $X, Y \in \mathcal{X}$, $\lambda \in]0,1[$, on a

$$\mathbb{E}[e^{-\lambda sX - (1-\lambda)sY}] = \mathbb{E}[(e^{-sX})^\lambda (e^{-sY})^{1-\lambda}] \leq \mathbb{E}[e^{-sX}]^\lambda \mathbb{E}[e^{-sY}]^{(1-\lambda)}$$

par l'inégalité de Hölder. Il en découle la convexité de Ent_s. Enfin, si $X, X' \in \mathcal{X}$ ont même loi, e^{-sX} et $e^{-sX'}$ ont même loi et même espérance ce qui donne l'invariance en loi.
5. Ainsi, le théorème vu en cours assure que $\mathrm{Ent}_s(X) = \sup_{\mathbb{Q}\in\mathcal{M}_1(\mathbb{P})} \mathbb{E}_\mathbb{Q}[-X] - \alpha_s(\mathbb{Q})$, avec $\alpha_s(\mathbb{Q}) = \sup_{X\in\mathcal{X}} \mathbb{E}_\mathbb{Q}[-X] - \mathrm{Ent}_s(X) = \mathrm{Ent}_s^*(-\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}})$. Inversement, nous avons vu dans le cours que $\mathrm{Ent}_s^*(Y) = +\infty$ si $Y \notin \{Z \in L^1, Z \leq 0 \text{ et } \mathbb{E}[Z] = -1\}$ et $\mathrm{Ent}_s^*(Y) = \alpha_s(\mathbb{Q}^Y)$ sinon, avec $\frac{d\mathbb{Q}^Y}{d\mathbb{P}} = -Y$.
6. Par définition, pour $X \in \mathcal{X}$,

$$\begin{aligned}
(\mathrm{Ent}_s \square \mathrm{Ent}_t)^{**}(X) &= \sup_{Y\in L^1} E[XY] - (\mathrm{Ent}_s \square \mathrm{Ent}_t)^*(Y) \\
&= \sup_{Y\in L^1} \mathbb{E}[XY] - \mathrm{Ent}_s^*(Y) - \mathrm{Ent}_t^*(Y) \\
&= \sup_{Y\in\{Z\in L^1, Z\leq 0 \text{ et } \mathbb{E}[Z]=-1\}} \mathbb{E}[XY] - \mathrm{Ent}_s^*(Y) - \mathrm{Ent}_t^*(Y) \\
&= \sup_{\mathbb{Q}\in\mathcal{M}_1(\mathbb{P})} \mathbb{E}_\mathbb{Q}[-X] - \alpha_s(\mathbb{Q}) - \alpha_t(\mathbb{Q}) \\
&= \sup_{\mathbb{Q}\in\mathcal{M}_1(\mathbb{P})} \mathbb{E}_\mathbb{Q}[-X] - \frac{st}{s+t} H(\mathbb{Q}|\mathbb{P}) = \mathrm{Ent}_{\frac{st}{s+t}}(X).
\end{aligned}$$

7. On a $\mathrm{Ent}_s(\lambda X) + \mathrm{Ent}_t((1-\lambda)X) = \frac{1}{s}\mathbb{E}[e^{-s\lambda X}] + \frac{1}{t}\mathbb{E}[e^{-t(1-\lambda)X}] = \frac{st}{s+t}\mathbb{E}[e^{-\frac{st}{s+t}X}]$ en prenant $\lambda = \frac{t}{s+t} \in]0,1[$ (et donc $1-\lambda = \frac{s}{s+t}$). On a toujours $(\mathrm{Ent}_s \,\square\, \mathrm{Ent}_t)^{**}(X) \leq \mathrm{Ent}_s \,\square\, \mathrm{Ent}_t(X)$, et comme $\mathrm{Ent}_s \,\square\, \mathrm{Ent}_t(X) \leq \mathrm{Ent}_s(\lambda X) + \mathrm{Ent}_t((1-\lambda)X)$ en prenant $Z = (1-\lambda)X$, il vient que $(\mathrm{Ent}_s \,\square\, \mathrm{Ent}_t)^{**}(X) = \mathrm{Ent}_s \,\square\, \mathrm{Ent}_t(X) = \mathrm{Ent}_{\frac{st}{s+t}}(X)$. Ainsi pour ces mesures de risques, la répartition optimale du risque est obtenue en affectant la proportion $\frac{t}{s+t}$ du portefeuille à l'entité de mesure de risque Ent_s et la proportion $\frac{s}{s+t}$ du portefeuille à l'entité de mesure de risque Ent_t.