Examen du cours de "Mesures de risque en finance"

Mercredi 6 Janvier 2021 (9h00-11h00)

Aucun document autorisé.

Il est impératif de rédiger la réponse aux deux parties sur des copies différentes.

Partie I (10 points)

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité et $\mathcal{X} = L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, l'ensemble des variables aléatoires à valeurs bornées muni de la norme $\|X\|_\infty = \inf\{M > 0, \mathbb{P}(|X| \leq M) = 1\}$. On suppose l'espace de probabilité sans atome, c'est à dire qu'il existe $U \in \mathcal{X}$ suivant la loi uniforme sur $[0,1]$. On note $\mathcal{M}_1(\mathbb{P})$ l'ensemble des mesures de probabilité sur $(\Omega, \mathcal{F})$ qui sont absolument continues par rapport à $\mathbb{P}$ et rappelle que le théorème de Radon-Nikodym garantit que

$$\mathbb{Q} \in \mathcal{M}_1(\mathbb{P}) \iff \exists Z \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}), \forall X \in L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}), \mathbb{E}_\mathbb{Q}[X] = \mathbb{E}[ZX].$$

Dans ce cas, Z est unique et est notée $\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}$.

Pour $\lambda \in]0,1[$, on pose

$$\rho_\lambda(X) = \sup_{\mathbb{Q} \in \mathcal{M}_1(\mathbb{P}): \frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} \leq 1/\lambda} \mathbb{E}_\mathbb{Q}[-X]. \tag{1}$$

L'objectif est de montrer que $\rho_\lambda(X) = AVaR_\lambda(X)$.

1. Montrer que ρ_λ est une mesure de risque cohérente.
2. Montrer que $\rho_\lambda(X) = \sup_{Z \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}): 0 \leq Z \leq 1/\lambda \text{ et } \mathbb{E}[Z]=1} \mathbb{E}[-XZ]$, puis que
$$\rho_\lambda(X) = \sup_{\psi: \mathbb{R} \to [0,1/\lambda] \text{ mesurable t.q. } \mathbb{E}[\psi(X)]=1} \mathbb{E}[-X\psi(X)].$$
3. Soit $X \in L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. On considère q un quantile d'ordre λ de X (c'est à dire $\mathbb{P}(X < q) \leq \lambda$ et $\mathbb{P}(X \leq q) \geq \lambda$, et on définit
$$\psi_0(x) = \frac{1}{\lambda}\mathbf{1}_{x<q} + \kappa \mathbf{1}_{x=q},$$
avec $\kappa = \frac{1-\mathbb{P}(X<q)/\lambda}{\mathbb{P}(X=q)}$ si $\mathbb{P}(X = q) > 0$ et $\kappa = 0$ si $\mathbb{P}(X = q) = 0$
   (a) Vérifier que $\psi_0(x) \in [0, 1/\lambda]$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
   (b) Calculer $\mathbb{E}[\psi_0(X)]$ et $\mathbb{E}[-X\psi_0(X)]$.
   (c) Vérifier que pour toute fonction $\psi : \mathbb{R} \to [0, 1/\lambda]$ mesurable, $\psi(x) \leq \psi_0(x)$ si $x < q$ et $\psi(x) \geq \psi_0(x)$ si $x > q$. En déduire que $0 \leq \mathbb{E}[-X(\psi_0(X) - \psi(X))]$ si on a de plus $\mathbb{E}[\psi(X)] = 1$.
   (d) Montrer que $\rho_\lambda(X) = AVaR_\lambda(X)$, puis construire $\mathbb{Q}_0 \in \mathcal{M}_1(\mathbb{P})$ telle que $\frac{d\mathbb{Q}_0}{d\mathbb{P}} \leq 1/\lambda$ et $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}_0}[-X] = \rho_\lambda(X)$.
4. On propose une méthode alternative pour obtenir ce résultat.
   (a) Montrer à partir de (1) que
$$\rho_\lambda(X) = \sup_{\mathbb{Q} \in \mathcal{M}_1(\mathbb{P}): \frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} \leq 1/\lambda} \left(\sup_{Z \text{ t.q. } Z \overset{loi}{=} \frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}} \mathbb{E}[-ZX] \right).$$

(b) En déduire que

$$\rho_\lambda(X) = \sup_{\mathbb{Q}\in\mathcal{M}_1(\mathbb{P}):\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}\leq 1/\lambda} \int_0^1 VaR_u(X)\times(-q^+_{-\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}}(u))du,$$

où $q^+_Z(u)$ désigne, comme dans le cours, le plus grand quantile d'ordre u.

(c) Donner la monotonie des fonctions $]0,1[\ni u\mapsto VaR_u(X)$ et $]0,1[\ni u\mapsto -q^+_{-\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}}(u)$ et la valeur de $\int_0^1 -q^+_{-\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}}(u)du$. Montrer que pour $\mathbb{Q}\in\mathcal{M}_1(\mathbb{P})$ telle que $\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}\leq 1/\lambda$, $\int_0^1 VaR_u(X)\times(-q^+_{-\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}}(u))du \leq \frac{1}{\lambda}\int_0^\lambda VaR_u(X)du$ et construire une probabilité pour laquelle on a égalité. Conclure.

Corrigé succinct

1. Exemple vu en cours.
2. Théorème de Radon-Nikodym puis $\mathbb{E}[Z|X]$ est une fonction mesurable de X. Par monotonie de l'espérance, elle est positive et majorée par $1/\lambda$.
3. (a) Il suffit de vérifier que $\kappa\in[0,1/\lambda]$. On se place dans le cas $\mathbb{P}(X=q)>0$ sinon il n'y a rien à prouver. Par définition du quantile, on a $1\leq\mathbb{P}(X\leq q)/\lambda$ et donc $\kappa\leq\frac{\mathbb{P}(X\leq q)/\lambda-\mathbb{P}(X<q)/\lambda}{\mathbb{P}(X=q)}=1/\lambda$. La positivité de κ est claire par définition du quantile.

   (b) $\mathbb{E}[\psi_0(X)] = P(X<q)/\lambda+\kappa\mathbb{P}(X=q)=1$. $\mathbb{E}[-X\psi_0(X)] = -q+\mathbb{E}[(q-X)\psi_0(X)] = -q+\frac{1}{\lambda}\mathbb{E}[(q-X)^+] = AVaR_\lambda(X)$.

   (c) Première assertion claire car ψ à valeurs dans $[0,1/\lambda]$. On a donc $-X(\psi_0(X)-\psi(X))1_{X<q}\geq -q(\psi_0(X)-\psi(X))1_{X<q}$ et $-X(\psi_0(X)-\psi(X))1_{X>q}\geq -q(\psi_0(X)-\psi(X))1_{X>q}$ ce qui donne

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}[-X(\psi_0(X)-\psi(X))]\\
&=\mathbb{E}[-X(\psi_0(X)-\psi(X))1_{X<q}]+\mathbb{E}[-X(\psi_0(X)-\psi(X))1_{X=q}]+\mathbb{E}[-X(\psi_0(X)-\psi(X))1_{X>q}]\\
&\geq\mathbb{E}[-q(\psi_0(X)-\psi(X))1_{X<q}]+\mathbb{E}[-q(\psi_0(X)-\psi(X))1_{X=q}]+\mathbb{E}[-q(\psi_0(X)-\psi(X))1_{X>q}]\\
&=\mathbb{E}[-q(\psi_0(X)-\psi(X))]=0.
\end{aligned}$$

   (d) D'après la question précédente $\rho_\lambda(X)\leq\mathbb{E}[-X\psi_0(X)]=AVaR_\lambda(X)$. En définissant $\frac{d\mathbb{Q}_0}{d\mathbb{P}}=\psi_0(X)$ on obtient l'égalité.
4. (a) Si Z a même loi que $\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}$, alors $0\leq Z\leq 1/\lambda$ p.s. et en définissant $\frac{d\tilde{\mathbb{Q}}}{d\mathbb{P}}=Z$ on construit une probabilité satisfaisant la condition : $\sup_{\mathbb{Q}\in\mathcal{M}_1(\mathbb{P}):\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}\leq 1/\lambda}\left(\sup_{Z \text{ t.q. } Z\overset{loi}{=}\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}}\mathbb{E}[-ZX]\right)\leq$ $\rho_\lambda(X)$. L'autre inégalité est triviale.

   (b) On utilise le lemme du cours $\sup_{Z\overset{loi}{=}Z'}\mathbb{E}[-ZX]=\int_0^1 q^+_X(u)q^+_{-Z}(u)du=\int_0^1 VaR_u(X)\times(-q^+_{-Z}(u))du$.

   (c) Le quantile est une fonction croissante de $u\in]0,1[$, donc ces deux fonctions sont décroissantes. $\int_0^1 -q^+_{-\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}}(u)du = -\mathbb{E}[-\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}]=1$. Si $\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}\leq 1/\lambda$, $-q^+_{-\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}}(u)$ est une fonction décroissante à valeurs dans $[0,1/\lambda]$ d'intégrale 1. Une fonction r qui satisfait ces propriétés et qui maximise l'intégrale $\int_0^1 VaR_u(X)r(u)du$ est $r(u)=\mathbf{1}_{u\leq\lambda}/\lambda$ car $VaR_u(X)$ est décroissante, et l'égalité est atteinte pour $\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}=\mathbf{1}_A/\lambda$, où A est un ensemble de probabilité λ.

Partie II (barème indicatif /10 points)

Question 1 (2 points)

Soit f une fonction croissante et continue à droite et on lui associe son inverse généralisé $f^{-1}(y) = \inf\{x,\ f(x) \geq y\}$. On définit une nouvelle fonction $g(x) = f((x/a) + b) - c$, avec $(a, b, c) \in (0, \infty) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. En supposant que f^{-1} est continue, justifier que $f^{-1}(f(x)) = x$ puis que $g^{-1}(f(x) - c) = a(x - b)$.

Question 2 (1 + 2 points)

Soit G fonction de répartition d'une loi max-stable. Lorsque $G(x) \in]0, 1[$, nous définissons l'inverse généralisé U de la fonction $-\log(-\log(G))$.

1. Montrer qu'il existe une fonction réelle $a(s) > 0$ telle que $[U(y + log(s)) - U(log(s))]/a(s) = U(y) - U(0)$.
2. Si $a(s) \neq 1$, montrer que G est la fonction de répartition d'une loi de Fréchet ou de Weibull.

Question 3 (2 + 2 points)

Soient $(U_i)_{1\leq i\leq n}$ des variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées de loi uniforme sur $[0, 1]$ et soient $(V_i)_{1\leq i\leq n}$ des variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées de fonction de survie $\overline{F}(x) = (1/x)1_{x\geq 1}$. Pour $X = U, V$ nous définissons la statistique d'ordre $(X_i^{(n)})_{1\leq i\leq n} = \Big(\min_{1\leq i\leq n} X_i = X_1^{(n)} \leq X_2^{(n)} \leq ... \leq X_n^{(n)} \leq \max_{1\leq i\leq n} X_i\Big)$.

1. Montrer que $(U_i^{(n)})_{1\leq i\leq n}$ est de même loi que $(\Gamma_1/\Gamma_{n+1}, \ldots, \Gamma_n/\Gamma_{n+1})$ où $\Gamma_k = E_1 + E_2 + ... + E_k$ et $(E_i)_{1\leq i\leq n+1}$ sont des variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées de loi exponentielle $\mathcal{E}(1)$.
2. Pour une suite $k_n \in \{1, ..., n\}$ avec $\lim_{n\to+\infty} k_n = +\infty$, montrer la convergence en probabilité de $\dfrac{k_n}{n} V_{n+1-k_n}^{(n)}$ vers 1 lorsque $n \to +\infty$.

Question 4 (1 point)

Donner deux cas possibles qui justifient la non-contradiction de l'existence de plusieurs actifs sans-risque avec l'absence d'opportunité d'arbitrage.