Examen du cours de “Mesures de risque en finance”

Mercredi 6 Janvier 2022 (9h00-11h00)

Aucun document autorisé.

Il est impératif de rédiger la réponse aux deux parties sur des copies différentes.

Partie I (10 points)

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité et $\mathcal{X} = L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, l'ensemble des variables aléatoires à valeurs bornées muni de la norme $\|X\|_\infty = \inf\{M > 0, \mathbb{P}(|X| \le M) = 1\}$. Dans tout ce problème, nous appellerons simplement *mesure de risque* une mesure de risque monétaire normalisée $\rho : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$.

1. Rappeler les axiomes qu'une telle fonction satisfait.

On dit qu'une mesure de risque $\rho : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ est *étoilée* si :

$$\forall X \in \mathcal{X}, \forall \lambda > 1, \rho(\lambda X) \ge \lambda \rho(X).$$

Un ensemble $B \subset \mathcal{X}$ est dit étoilé si $\forall X \in B, \lambda \in [0,1], \lambda X \in B$.

2. Montrer qu'une mesure de risque $\rho : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ est étoilée si, et seulement si

$$\forall Y \in \mathcal{X}, \forall \lambda \in]0,1[, \rho(\lambda Y) \le \lambda \rho(Y).$$

   En déduire que les mesures de risque convexes sont étoilées.

3. Montrer qu'une mesure de risque $\rho : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ est étoilée si, et seulement si l'ensemble des positions acceptables $\mathcal{A}_\rho$ est un ensemble étoilé.
4. On considère une famille $(\rho_\theta)_{\theta \in \Theta}$ de mesures de risques étoilées. Est-ce que les fonctions $\rho_\vee(X) := \sup_{\theta \in \Theta} \rho_\theta(X)$ et $\rho_\wedge(X) := \inf_{\theta \in \Theta} \rho_\theta(X)$ sont des mesures de risques étoilées ?
5. Montrer qu'une mesure de risque étoilée ρ qui est sous-additive, c'est à dire telle que

$$\forall X, Y \in \mathcal{X}, \rho(X+Y) \le \rho(X) + \rho(Y),$$

   est une mesure de risque cohérente.

On suppose par la suite que ρ est une mesure de risque étoilée. Pour $Y \in \mathcal{X}$, on définit l'ensemble

$$\mathcal{A}_Y = \{\lambda(Y + \rho(Y)) + Z, \lambda \in [0,1], Z \in \mathcal{X} \ t.q. \ Z \ge 0\}.$$

6. Montrer que $\mathcal{A}_Y$ est un ensemble de positions acceptables convexe tel que $\mathcal{A}_Y \subset \mathcal{A}_\rho$. En déduire que

$$\forall X \in \mathcal{X}, \rho(X) \le \inf_{Y \in \mathcal{X}} \rho_{\mathcal{A}_Y}(X)$$

7. Montrer que $\rho(X) = \rho_{\mathcal{A}_X}(X)$ et en déduire que $\rho(X) = \inf_{Y \in \mathcal{X}} \rho_{\mathcal{A}_Y}(X)$.
8. Pour $X \in \mathcal{X}$, on considère une suite $(X_n)_{n \ge 1}$ telle que $X_n \ge X_{n+1}$ et $X_n \to X$, p.s. Montrer que $\lim_{n \to \infty} \rho_{A_Y}(X_n) = \rho_{A_Y}(X)$. En déduire que $\rho_{\mathcal{A}_Y}(X) = \sup_{\mathbb{Q} \in \mathcal{M}_1(\mathbb{P})} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[-X] - \alpha^*(\mathbb{Q})$ où $\alpha^*(\mathbb{Q}) = \sup_{X \in \mathcal{A}_Y} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[-X]$.

Corrigé

1. Pour $X \in \mathcal{X}, m \in \mathbb{R}$, $\rho(X+m) = \rho(X) - m$, $X \leq Y$, $\rho(Y) \leq \rho(X)$, $\rho(0) = 0$.
2. La mesure ρ est étoilée ssi

$$\begin{aligned}\forall \lambda > 1, \forall X \in \mathcal{X}, \rho(\lambda X) \geq \lambda \rho(X) &\iff \forall \lambda > 1, \forall X' \in \mathcal{X}, \frac{1}{\lambda}\rho(X') \geq \rho(X'/\lambda) \\ &\iff \forall \lambda' \in]0,1[, X' \in \mathcal{X}, \lambda'\rho(X') \geq \rho(\lambda' X').\end{aligned}$$

   Pour une mesure de risque convexe, on a $\rho(\lambda X + (1-\lambda)Y) \leq \lambda\rho(X) + (1-\lambda)\rho(Y)$ pour tout $\lambda \in]0,1[, X, Y \in \mathcal{X}$. En prenant $Y = 0$ et en utilisant la normalisation, on obtient que ρ est étoilée.
3. Par définition $\mathcal{A}_\rho = \{X \in \mathcal{X}, \rho(X) \leq 0\}$. Si ρ est étoilée, on a pour $X \in \mathcal{A}_\rho$, $\lambda \in]0,1[$, $\rho(\lambda X) \leq \lambda \rho(X) \leq 0$ et donc $\lambda X \in \mathcal{A}_\rho$. Réciproquement, si $\mathcal{A}_\rho$ est étoilé, comme $\rho(X) = \inf\{m \in \mathbb{R}, X + m \in \mathcal{A}_\rho\}$, il vient pour $\lambda \in]0,1[$,

$$\rho(\lambda X) = \inf\{m \in \mathbb{R}, \lambda(X + m/\lambda) \in \mathcal{A}_\rho\} \leq \inf\{m \in \mathbb{R}, X + m/\lambda \in \mathcal{A}_\rho\} = \lambda\rho(X),$$

   l'inégalité venant du fait que $X + m/\lambda \in \mathcal{A}_\rho \implies \lambda(X + m/\lambda) \in \mathcal{A}_\rho$, puisque $\mathcal{A}_\rho$ est étoilé.
4. Si $\forall \theta \in \Theta, \lambda \in]0,1[, X \in \mathcal{X}, \rho_\theta(\lambda X) \leq \lambda \rho_\theta(X)$, alors $\sup_{\theta\in\Theta} \rho_\theta(\lambda X) \leq \lambda \sup_{\theta\in\Theta} \lambda\rho_\theta(X)$ et $\inf_{\theta\in\Theta} \rho_\theta(\lambda X) \leq \lambda \inf_{\theta\in\Theta} \lambda\rho_\theta(X)$. De même, les propriétés de normalisation, de monotonie et d'invariance par translation sont satisfaites par $\rho_\vee$ et $\rho_\wedge$ qui sont des mesures de risque étoilées.
5. Si ρ est étoilée et sous-additive, alors pour $\lambda \in]0,1[, X, Y \in \mathcal{X}$,

$$\rho(\lambda X + (1-\lambda)Y) \leq \rho(\lambda X) + \rho((1-\lambda)Y) \leq \lambda\rho(X) + (1-\lambda)\rho(Y),$$

   ce qui prouve la convexité. Soit $X \in \mathcal{X}$. En utilisant la sous-additivité, on a par récurrence que $\rho(nX) \leq n\rho(X)$. Mais comme ρ est étoilée, $\rho(nX) \geq n\rho(X)$ et donc $\rho(nX) = n\rho(X)$. Pour $\lambda \in [1,n]$, on a $\rho(\lambda X) \geq \lambda\rho(X)$. Comme $\lambda/n \in]0,1]$, on a également $\rho(\lambda X) = \rho((\lambda/n)nX) \leq (\lambda/n)\rho(nX) = \lambda\rho(X)$ et donc $\rho(\lambda X) = \lambda\rho(X)$. Il vient $\rho(\lambda X) = \lambda\rho(X)$ pour tout $\lambda \geq 1, X \in \mathcal{X}$, puis pour tout $\lambda > 0$ en considérant $X = X'/\lambda$ comme à la question 2.
6. Clairement si $Z' \geq 0$ et $X \in \mathcal{A}_Y$, $X + Z' \in \mathcal{A}_Y$ donc $\mathcal{A}_Y$ est bien un ensemble de positions acceptables. Soient $X_1, X_2 \in \mathcal{A}_Y$ et $\alpha \in]0,1[$. On peut écrire $X_i = \lambda_i(Y + \rho(Y)) + Z_i$ avec $\lambda_i \in [0,1]$ et $Z_i \geq 0$. On a $X_1 \geq \lambda_1(Y + \rho(Y))$ et donc $\rho(X_1) \leq \rho(\lambda_1(Y + \rho(Y))) \leq \lambda_1\rho(Y + \rho(Y)) = 0$ en utilisant successivement la monotonie, la proriété étoilée et la cash-invariance. Ainsi $\mathcal{A}_Y \subset \mathcal{A}_\rho$. De plus, $\mathcal{A}_Y$ est convexe car

$$\alpha X_1 + (1-\alpha)X_2 = [\alpha\lambda_1 + (1-\alpha)\lambda_2](Y + \rho(Y)) + (\alpha Z_1 + (1-\alpha)Z_2),$$

   et $\alpha\lambda_1 + (1-\alpha)\lambda_2 \in [0,1]$, $(\alpha Z_1 + (1-\alpha)Z_2) \geq 0$.
   Par conséquent, $\rho_{\mathcal{A}_Y}$ est une mesure de risque convexe, et $\rho(X) = \inf\{m \in \mathbb{R}, X + m \in \mathcal{A}_\rho\} \leq \inf\{m \in \mathbb{R}, X + m \in \mathcal{A}_Y\} = \rho_{\mathcal{A}_Y}(X)$.
7. On a $\rho_{\mathcal{A}_X}(X) = \inf\{m \in \mathbb{R}, X + m \in \mathcal{A}_X\}$, et comme on a clairement $X + \rho(X) \in \mathcal{A}_X$, il vient $\rho_{\mathcal{A}_X}(X) \leq \rho(X)$. En utilisant la question précédente, on obtient $\rho(X) = \rho_{\mathcal{A}_X}(X)$.
8. Par monotonie, $\rho_{\mathcal{A}_Y}(X_n) \leq \rho_{\mathcal{A}_Y}(X_{n+1}) \leq \rho_{\mathcal{A}_Y}(X)$. On note $L = \lim_{n\to\infty} \rho_{\mathcal{A}_Y}(X_n)$ et on a $L \leq \rho_{\mathcal{A}_Y}(X)$. Par définition de $\rho_{\mathcal{A}_Y}(X_n)$, il existe $m_n \in [\rho_{\mathcal{A}_Y}(X_n), \rho_{\mathcal{A}_Y}(X_n) + 1/n]$ tel que $m_n + X_n \in \mathcal{A}_Y$, et donc $\lambda_n \in [0,1]$ et $Z_n \geq 0$ tels que $m_n + X_n = \lambda_n(Y + \rho(Y)) + Z_n$. On a $m_n \to L$, $X_n \to X$ p.s. et, quitte à extraire une sous-suite, $\lambda_n \to \lambda_\infty$. On en déduit la

convergence presque sûre de Z_n vers $Z_\infty := L+X-\lambda_\infty(Y+\rho(Y))$, et comme $\mathbb{P}(Z_n \geq 0) = 1$, il vient $\mathbb{P}(Z_\infty \geq 0) = 1$. Ainsi, il vient

$$L + X = \lambda_\infty(Y + \rho(Y)) + Z_\infty \in \mathcal{A}_Y.$$

Cela prouve $\rho_{\mathcal{A}_Y}(X) \leq L$ et donc $L = \rho_{\mathcal{A}_Y}(X)$. Grâce à cette propriété de "continuité par au-dessus", on peut appliquer le théorème du cours sur la représentation des mesures de risque ce qui donne le résultat voulu.

Partie II **(barème indicatif /10 points)**

Question 1 **(2 points)**

Soit f une fonction croissante et continue à droite et on lui associe son inverse généralisé $f^{-1}(y) = \inf\{x,\ f(x) \geq y\}$. On définit une nouvelle fonction $g(x) = f((x/a) + b) - c$, avec $(a, b, c) \in (0, \infty) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. En supposant que f^{-1} est continue, justifier que $f^{-1}(f(x)) = x$ puis que $g^{-1}(f(x) - c) = a(x - b)$.

Question 2 **(1 + 2 points)**

Soit G fonction de répartition d'une loi max-stable. Lorsque $G(x) \in]0, 1[$, nous définissons l'inverse généralisé U de la fonction $-\log(-\log(G))$.

1. Montrer qu'il existe une fonction réelle $a(s) > 0$ telle que
   $[U(y + log(s)) - U(log(s))]/a(s) = U(y) - U(0)$.
2. Si $a(s) \neq 1$, montrer que G est la fonction de répartition d'une loi de Fréchet ou de Weibull.

Question 3 **(2 + 2 points)**

Soient $(U_i)_{1\leq i\leq n}$ des variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées de loi uniforme sur $[0, 1]$ et soient $(V_i)_{1\leq i\leq n}$ des variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées de fonction de survie $\overline{F}(x) = (1/x)1_{x\geq 1}$. Pour $X = U, V$ nous définissons la statistique d'ordre $(X_i^{(n)})_{1\leq i\leq n} = \left(\min_{1\leq i\leq n} X_i = X_1^{(n)} \leq X_2^{(n)} \leq ... \leq X_n^{(n)} \leq \max_{1\leq i\leq n} X_i\right)$.

1. Montrer que $(U_i^{(n)})_{1\leq i\leq n}$ est de même loi que $(\Gamma_1/\Gamma_{n+1}, \ldots, \Gamma_n/\Gamma_{n+1})$ où $\Gamma_k = E_1 + E_2 + ... + E_k$ et $(E_i)_{1\leq i\leq n+1}$ sont des variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées de loi exponentielle $\mathcal{E}(1)$.
2. Pour une suite $k_n \in \{1, ..., n\}$ avec $\lim_{n\to+\infty} k_n = +\infty$, montrer la convergence en probabilité de $\dfrac{k_n}{n} V_{n+1-k_n}^{(n)}$ vers 1 lorsque $n \to +\infty$.

Question 4 **(1 point)**

Donner deux cas possibles qui justifient la non-contradiction de l'existence de plusieurs actifs sans-risque avec l'absence d'opportunité d'arbitrage.