Examen du cours de "Mesures de risque en finance"

Mercredi 4 Janvier 2023 (9h00-11h00)

Aucun document autorisé.

Il est impératif de rédiger la réponse aux deux parties sur des copies différentes.

Partie I (10 points)

EXERCICE 1 :

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité et $\mathcal{X} = L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ l'ensemble des variables aléatoires réelles à valeurs bornées muni de la norme $\|X\|_\infty = \inf\{M > 0, \mathbb{P}(|X| \leq M) = 1\}$. Soit $\lambda_0 \in]0,1[$. Pour $X, Y \in \mathcal{X}$, on dit que X est dominé par Y (on note $X \prec Y$) si

$$\mathbb{E}[f(X)] \leq \mathbb{E}[f(Y)]$$

pour toute fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ croissante et concave. Cette relation est appelée dominance stochastique du second ordre.

1. Vérifier que pour $X, Z \in \mathcal{X}$, $X \prec \mathbb{E}[X|Z]$.
2. Montrer que pour $X \in \mathcal{X}$, $\lambda \in]0,1]$, $AVaR_\lambda(X) = \frac{1}{\lambda}\mathbb{E}[(q - X)^+] - q$, où q est un quantile d'ordre λ de X. Montrer ensuite que
$$AVaR_\lambda(X) = \frac{1}{\lambda} \inf_{r \in \mathbb{R}} (\mathbb{E}[(r - X)^+] - \lambda r).$$
(On pourra se contenter de faire la preuve lorsque X admet une densité.)
3. Déduire de la question précédente la propriété suivante :
$$X \prec Y \implies \forall \lambda \in]0,1],\ AVaR_\lambda(X) \geq AVaR_\lambda(Y).$$
4. Rappeler le résultat de représentation vu en cours pour une mesure de risque ρ convexe et invariante en loi. En déduire qu'elle satisfait la propriété suivante :
$$X \prec Y \implies \rho(X) \geq \rho(Y).$$

On considère une mesure de risque monétaire normalisée $\rho : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$, convexe et invariante en loi telle que $\rho(X) \geq VaR_{\lambda_0}(X)$, c'est à dire qu'elle est plus conservatrice que la Value-at-Risk de niveau λ_0.

5. Pour $\varepsilon > 0$, on définit l'événement $A_\varepsilon = \{-X \geq VaR_{\lambda_0}(X) - \varepsilon\}$ et
$$Y_\varepsilon = \mathbb{E}[X|\mathbf{1}_{A_\varepsilon}] = \mathbf{1}_{A_\varepsilon^c} X + \mathbf{1}_{A_\varepsilon} \mathbb{E}[X|A_\varepsilon],$$
avec $\mathbb{E}[X|A_\varepsilon] = \frac{\mathbb{E}[X\mathbf{1}_{A_\varepsilon}]}{\mathbb{P}(A_\varepsilon)}$. Montrer que $\mathbb{P}(Y_\varepsilon < \mathbb{E}[X|A_\varepsilon]) = 0$ et $\mathbb{P}(Y_\varepsilon \leq \mathbb{E}[X|A_\varepsilon]) > \lambda_0$.
6. En déduire que $\rho(X) \geq -\mathbb{E}[X|A_\varepsilon]$.
7. On suppose que $X \in \mathcal{X}$ est telle que $\mathbb{P}(X = x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Montrer que $\rho(X) \geq AVaR_{\lambda_0}(X)$.
8. On considère désormais $X, U \in \mathcal{X}$ avec $U \sim \mathcal{U}(0,1)$ indépendante de X et $\eta > 0$. Montrer que $\mathbb{P}(X + \eta U = x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. En déduire que $\rho(X) \geq AVaR_{\lambda_0}(X)$.

EXERCICE 2 – PRÉSENTATION DU 7 DÉCEMBRE 2022

1. Quels sont les trois types de scenarios utilisés pour les stress tests sur le risque de marché ? Donner un exemple pour chacun.
2. Quels sont les risques liés à une option européenne qui paye le maximum de deux actions ? (On pourra exprimer ces risques à l'aide des grecques).

Partie II (barème indicatif /10 points)

Exercice 1 (1 + 1 + 1 + 1 points)

La notation $D(G)$ désigne le domaine d'attraction associé à la fonction de répartition G, avec $\overline{G}$ la fonction de survie.

1) Donner un exemple de $G \in D(G)$ en précisant les suites $a_n > 0$ et b_n choisies dans la limite.

Pour toute la suite, on prend G comme dans la réponse à la question 1.

2) Soit $u_n(x)$ une suite de fonctions telle que la limite simple de $n\overline{G}(u_n(x))$, lorsque $n \to \infty$, est $-\log(G(x))$. Donner une expression pour $u_n(x)$.

3) Donner un exemple de $F \in D(G)$ avec $F \neq G$ en précisant les suites $c_n > 0$ et d_n choisies dans la limite.

4) Soit $v_n(x)$ une suite de fonctions telle que la limite simple de $n\overline{F}(v_n(x))$, lorsque $n \to \infty$, est $-\log(G(x))$. Donner une expression pour $v_n(x)$.

Exercice 2 (1 + 1,5 + 1 points)

Soit $(V_k^{(n)})_{1\leq k\leq n}$ une statistique d'ordre d'une loi de Pareto de densité $1/x^2 1_{x\geq 1}$.

1) Quelle est la loi de $1/V_{n+1-k}^{(n)}$ lorsque $k \in \{1, ..., n\}$.

2) Montrer que la statistique d'ordre $\left(V_1^{(n)}, ..., V_n^{(n)}\right)$ est de même loi que $\left(\frac{\Gamma_{n+1}}{\Gamma_n}, ..., \frac{\Gamma_{n+1}}{\Gamma_1}\right)$ où $\Gamma_k = E_1 + E_2 + ... + E_k$ avec $(E_i)_{1\leq i\leq n+1}$ sont des variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées de loi exponentielle $\mathcal{E}(1)$.

3) Pour une suite $k_n \in \{1, ..., [n/2]\}$ avec $\lim\limits_{n\to+\infty} k_n = +\infty$, étudier la convergence en probabilité de $\dfrac{k_n}{n} V_{n+1-2k_n}^{(n)}$ lorsque $n \to +\infty$.

Exercice 3 (1 + 0,5 + 1 points)

Dans un marché de gré à gré, une banque b et son client c établissent un contrat dans lequel la banque assure une somme D_t de flux entre 0 et $t \in [0, T]$. Soit le couple prix-couverture (π, ξ) de ce contrat, incluant le défaut τ^b et τ^c de chaque partie avec $\tau = \tau^b \wedge \tau^c$ et $\overline{\tau} = T \wedge \tau$, qui vérifie

$$\left\{ \begin{array}{cc} \pi_{\overline{\tau}} = 1_{\tau<T} R & R = R^c - 1_{\tau=\tau^b} R^f, \\ d\pi_t = -1_{\tau>t} dD_t + (r_t \pi_t + g_t(\pi_t, \xi_t))dt + dm_t^{\xi} & t \in [0, \overline{\tau}]. \end{array} \right.$$

1. Donner deux raisons rendant la stratégie de couverture moins usuelle.

Pour $t \in [0, \overline{\tau}]$, définissons $\theta_t = p_t - \pi_t$ et $(p_t)_{0\leq t\leq T}$ le prix mark-to-market (excluant les défauts) associé à D.

2. Exprimer la valeur de p en fonction de D et β avec $\beta_t = \exp(-\int_0^t r_s ds)$.
3. En identifiant la martingale $\widehat{m}$, montrer que θ vérifie

$$\left\{ \begin{array}{l} \theta_{\overline{\tau}} = p_{\overline{\tau}} - 1_{\tau<T} R \\ d(\beta_t \theta_t) + \beta_t g_t(p_t - \theta_t, \xi_t)dt = d\widehat{m}_t \quad t \in [0, \overline{\tau}]. \end{array} \right.$$

Corrigé EXERCICE 1

1. Soit $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ croissante et concave. On veut montrer que $\mathbb{E}[f(X)] \leq \mathbb{E}[f(\mathbb{E}[X|Z])]$. D'après l'inégalité de Jensen, on a presque sûrement que $\mathbb{E}[f(X)|Z] \leq f(\mathbb{E}[X|Z])$, ce qui donne le résultat en prenant l'espérance.

2. Nous avons vu en cours que $X \overset{loi}{=} q_X^+(U)$, où $q_X^+(\lambda)$ désigne le plus grand quantile d'ordre λ de X. Comme q est un quantile d'ordre λ de X, on a $\mathbb{P}(X \leq q) \geq \lambda$ et $\mathbb{P}(X < q) \leq \lambda$. Ainsi, $\frac{1}{\lambda}\mathbb{E}[(q - q_X^+(U))^+] - q = \frac{1}{\lambda}\int_0^1 (q - q_X^+(\lambda))^+ d\lambda - q = \frac{1}{\lambda}\int_0^\lambda (q - q_X^+(\lambda))d\lambda - q = \frac{1}{\lambda}\int_0^\lambda VaR_\lambda(X)d\lambda = AVaR_\lambda(X)$, puisque $VaR_\lambda(X) = -q_X^+(\lambda)$.
   Par le théorème de convergence dominée, la dérivée à droite et la dérivée à gauche de $\phi : r \in \mathbb{R} \mapsto \mathbb{E}[(r - X)^+] - \lambda r$ sont respectivement données par $\phi_d'(r) = \mathbb{P}(X \leq r) - \lambda$ et $\phi_g'(r) = \mathbb{P}(X < r) - \lambda$. On a $\phi_g'(r) \leq \phi_d'(r)$, et ces deux quantités sont égales lorsque X est à densité (la fonction est alors dérivable et la dérivée continue par rapport à r). Lorsque $r < q_X^-(\lambda)$, on a nécessairement $\mathbb{P}(X \leq r) < \lambda$ et $\phi_d'(r) < 0$. Lorsque $r > q_X^+(\lambda)$, $\mathbb{P}(X < r) > \lambda$ i.e. $\phi_g'(r) > 0$. Si X est à densité, on en déduit immédiatement le résultat en écrivant que ϕ est l'intégrale de sa dérivée : pour q quantile d'ordre λ,
   $$\phi(r) - \phi(q) = \int_q^r \phi'(s)ds > 0 \text{ pour } r \notin [q_X^-(\lambda), q_X^+(\lambda)].$$
   Dans le cas général, on remarque que $(r - X)^+ = \int_{-\infty}^r \mathbf{1}_{X \leq s} ds$, et par le théorème de Fubini, $\phi(r) = \int_{-\infty}^r \mathbb{P}(X \leq s)ds - \lambda r$. Par conséquent,
   $$\phi(r) - \phi(q) = \int_q^r \phi_d'(s)ds > 0.$$

3. On a $AVaR_\lambda(X) = -\frac{1}{\lambda}\sup_{r\in\mathbb{R}}(-\mathbb{E}[(r - X)^+] + \lambda r)$, et $x \mapsto -(r - x)^+$ est croissante et concave pour tout $r \in \mathbb{R}$. Pour $X \prec Y$, on a $-\mathbb{E}[(r - X)^+] \leq -\mathbb{E}[(r - Y)^+]$ et donc $AVaR_\lambda(X) \geq AVaR_\lambda(Y)$.

4. Pour ρ satisfaisant ces hypothèses, nous avons vu que
   $$\rho(X) = \sup_{\nu\in\mathcal{M}_1(]0,1])} \int_0^1 AVaR_\lambda(X)\nu(d\lambda) - \beta(\nu),$$
   où $\beta(\nu) = \sup_{X\in\mathcal{A}_\rho} \int_0^1 AVaR_\lambda(X)\nu(d\lambda)$. Pour $X \prec Y$, on a pour tout $\nu \in \mathcal{M}_1(]0,1])$, $\int_0^1 AVaR_\lambda(X)\nu(d\lambda) \geq \int_0^1 AVaR_\lambda(Y)\nu(d\lambda)$ et donc $\rho(X) \geq \rho(Y)$.

5. Sur A_ε^c, on a $-X < VaR_{\lambda_0}(X) - \varepsilon$, i.e. $X > -VaR_{\lambda_0}(X) + \varepsilon$. Par ailleurs, on a $\mathbb{E}[X|A_\varepsilon] \leq -VaR_{\lambda_0}(X) + \varepsilon$. Ainsi, on a $X > \mathbb{E}[X|A_\varepsilon]$ sur A_ε^c, et donc $Y \geq \mathbb{E}[X|A_\varepsilon]$ presque sûrement. Il vient $\mathbb{P}(Y < \mathbb{E}[X|A_\varepsilon]) = 0$ et $\mathbb{P}(Y \leq \mathbb{E}[X|A_\varepsilon]) = \mathbb{P}(A_\varepsilon) = \mathbb{P}(X \leq q_X^+(\lambda_0) + \varepsilon) > \lambda_0$.

6. La question précédente assure que $q_Y^+(\lambda_0) = \mathbb{E}[X|A_\varepsilon]$ ou encore $VaR_{\lambda_0}(Y) = -\mathbb{E}[X|A_\varepsilon]$. A l'aide des question 1 et 4, on obtient $\rho(X) \geq \rho(\mathbb{E}[X|\mathbf{1}_{A_\varepsilon}]) = \rho(Y_\varepsilon) \geq VaR_{\lambda_0}(Y_\varepsilon) = -\mathbb{E}[X|A_\varepsilon]$.

7. Grâce à l'hypothèse faite sur X, on a $\mathbb{P}(-X \geq VaR_{\lambda_0}(X)) = \lambda_0$, $\mathbb{P}(A_\varepsilon) \to_{\varepsilon\to 0} \lambda_0$ et $\mathbb{E}[X\mathbf{1}_{A_\varepsilon}] \to_{\varepsilon\to 0} \mathbb{E}[X\mathbf{1}_{A_0}]$ par convergence dominée. Ainsi, $\rho(X) \geq -\frac{1}{\lambda_0}\mathbb{E}[X\mathbf{1}_{A_0}] = AVaR_{\lambda_0}(X)$.

8. On note μ_X la mesure de probabilité de X. Pour $\eta > 0$, on a par indépendance $\mathbb{P}(X + \eta U = x) = \int \mathbb{P}(U = \frac{x-z}{\eta})\mu_X(dz) = 0$, puisque $\mathbb{P}(U = u) = 0$ pour tout $u \in \mathbb{R}$. A l'aide de la question précédente, on obtient $\rho(X + \eta U) \geq AVaR_{\lambda_0}(X + \eta U)$. Par monotonie de ρ, $\rho(X) \geq \rho(X + \eta U)$ car $\eta U \geq 0$. Par monotonie et invariance par translation de $AVaR_{\lambda_0}$, on a $AVaR_{\lambda_0}(X + \eta U) \geq AVaR_{\lambda_0}(X + \eta) \geq AVaR_{\lambda_0}(X) - \eta$ car $\eta U \leq \eta$. On en déduit que $\rho(X) \geq AVaR_{\lambda_0}(X) - \eta$, et comme $\eta > 0$ est arbitraire, il vient que $\rho(X) \geq AVaR_{\lambda_0}(X)$.