# Examen du cours de "Mesures de risque en finance"

**Mercredi 10 Janvier 2024 (9h00-11h00)**

**Aucun document autorisé.**
**Il est impératif de rédiger la réponse aux deux parties sur des copies différentes.**

## Partie I (10 points)

On considère $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité tel qu'il existe une variable aléatoire réelle $U$ de loi uniforme sous $\mathbb{P}$. On considère $\mathcal{X} = L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, l'ensemble des variables aléatoires à valeurs bornées muni de la norme $\|X\|_\infty = \inf\{M > 0, \mathbb{P}(|X| \leq M) = 1\}$. On définit, pour $\alpha \in ]0, +\infty[$,

$$X \in \mathcal{X},\ \rho_\alpha(X) = \frac{1}{\alpha} \log(\mathbb{E}[e^{-\alpha X}]).$$

1. Montrer que $\rho_\alpha(X)$ est une mesure de risque monétaire convexe. Est-elle cohérente?
2. (a) Montrer que pour $X \in \mathcal{X}$ fixé, $\alpha \mapsto \rho_\alpha(X)$ est une fonction croissante.
   (b) Calculer pour $X \in \mathcal{X}$, $\rho_0(X) := \lim_{\alpha \to 0} \rho_\alpha(X)$. Est-ce que $\rho_0$ est une mesure de risque cohérente?

On introduit, comme dans le cours, $\mathcal{M}_1(\mathbb{P})$ l'ensemble des mesures de probabilité sur $(\Omega, \mathcal{F})$ qui sont absolument continues par rapport à $\mathbb{P}$. Par la suite, $\mathbb{E}$ désignera l'espérance par rapport à la probabilité de référence $\mathbb{P}$. Pour $\mathbb{Q} \in \mathcal{M}_1(\mathbb{P})$, on note $\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}$ la densité de $\mathbb{Q}$ par rapport à $\mathbb{P}$ et $\mathbb{E}_\mathbb{Q}$ l'espérance sous la probabilité $\mathbb{Q}$: $\mathbb{E}_\mathbb{Q}[X] = \mathbb{E}[\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} X]$ pour tout $X \in \mathcal{X}$.

3. On se donne $\alpha \in ]0, +\infty[$.
   (a) Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{X}^\mathbb{N}$ une suite bornée (c'est à dire qu'il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, \|X_n\|_\infty \leq M$) telle que $X_n \underset{n\to+\infty}{\to} X, p.s.$. Montrer que $\rho_\alpha(X) = \lim_{n\to+\infty} \rho_\alpha(X_n)$.
   (b) En déduire que
   $$\rho_\alpha(X) = \sup_{\mathbb{Q}\in\mathcal{M}_1(\mathbb{P})} \mathbb{E}_\mathbb{Q}[-X] - \gamma_\alpha(\mathbb{Q}),$$
   où $\gamma_\alpha(\mathbb{Q}) = \sup_{X\in\mathcal{X}} \mathbb{E}[-X \frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}] - \frac{1}{\alpha} \log \mathbb{E}[e^{-\alpha X}]$. Vérifier que $\gamma_\alpha(\mathbb{Q}) = \frac{1}{\alpha}\gamma_1(\mathbb{Q})$

On pose $\varphi(x) = x\log(x)$ , $x \geq 0$ ($\varphi(0) = 0$ en prolongeant par continuité). Pour $\mathbb{Q} \in \mathcal{M}_1(\mathbb{P})$, on pose $H(\mathbb{Q}|\mathbb{P}) = \mathbb{E}\left[\varphi\left(\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}\right)\right] = \mathbb{E}_\mathbb{Q}\left[\log\left(\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}\right)\right]$ la fonction $H(\mathbb{Q}|\mathbb{P})$ est appelée l'entropie de $\mathbb{Q}$ par rapport à $\mathbb{P}$.

4. (a) Montrer que $\varphi$ est convexe et minorée. En déduire que $H(\mathbb{Q}|\mathbb{P})$ a un sens lorsque $\mathbb{Q} \in \mathcal{M}_1(\mathbb{P})$, et montrer que $H(\mathbb{Q}|\mathbb{P}) \geq 0$.
   (b) Montrer que $\gamma_1(\mathbb{Q}) \geq H(\mathbb{Q}|\mathbb{P})$.
   (c) On pose, pour $Z \in \mathcal{X}$, $\frac{d\mathbb{P}^Z}{d\mathbb{P}} = \frac{e^Z}{\mathbb{E}[e^Z]}$. Montrer que si $\mathbb{Q} \in \mathcal{M}_1(\mathbb{P})$, $\mathbb{Q}$ est absolument continue par rapport à $\mathbb{P}^Z$, et calculer $\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}^Z}$.
   (d) Montrer que $H(\mathbb{Q}|\mathbb{P}) = H(\mathbb{Q}|\mathbb{P}^Z) + \mathbb{E}\left[\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} Z\right] - \log(\mathbb{E}(e^Z))$, puis que $H(\mathbb{Q}|\mathbb{P}) \geq \gamma_1(\mathbb{Q})$. En déduire la représentation suivante de $\rho_\alpha$:
   $$\rho_\alpha(X) = \sup_{\mathbb{Q}\in\mathcal{M}_1(\mathbb{P})} \mathbb{E}_\mathbb{Q}[-X] - \frac{1}{\alpha} H(\mathbb{Q}|\mathbb{P}).$$

QUESTIONS SUR LA PRÉSENTATION DU 8 NOVEMBRE 2023 :

1. Qu'est-ce que le risque opérationnel? Donner un exemple.
2. A-t-on besoin d'un modèle pour gérer le risque d'une option européenne? Justifier votre réponse.

# Partie II (barème indicatif /10 points)

## Exercice 1 (1+1 points)

Soient $\alpha > 0$, $F$ fonction de répartition continue et $F^{-1}(y) = \inf\{x \in \mathbb{R},\ F(x) \geq y\}$, elles vérifient $\forall x \in \mathbb{R}$ et $y \in ]0,1]$: $F(x) \geq y \Leftrightarrow x \geq F^{-1}(y)$.

1. Montrer que $F(F^{-1}(x)) = x$.
2. En supposant que $x^\alpha(1-F(x))$ est à variation lente, montrer que $F$ est dans le domaine d'attraction d'une loi de Fréchet i.e. $\exists\ d_n = 0$ et $c_n = F^{-1}\left(1 - \frac{1}{n}\right)$ avec $F^n(c_n x + d_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \exp(-x^{-\alpha})$.

## Exercice 2 (1+1 points)

Soit la fonction de répartition définie, pour $x < x_F$, par $F(x) = 1 - \exp\left(\dfrac{-\alpha}{x_F - x}\right)$ avec $\alpha > 0$.

1. Déterminer, en justifiant, son domaine d'attraction.
2. Déterminer les coefficients d'échelle et de translation $(c_n, d_n)$ associés à cette distribution.

## Exercice 3 (2+1+1 points)

Soient $(U_i)_{1\leq i\leq n}$ des variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées de loi uniforme sur $[0,1]$ et soient $(V_i)_{1\leq i\leq n}$ des variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées de fonction de survie $\overline{F}(x) = (\lambda/x)^\alpha 1_{x\geq\lambda}$. Pour $X = U, V$ nous définissons la statistique d'ordre $(X_i^{(n)})_{1\leq i\leq n} = \Big(\min_{1\leq i\leq n} X_i = X_1^{(n)} \leq X_2^{(n)} \leq ... \leq X_n^{(n)} \leq \max_{1\leq i\leq n} X_i\Big)$. On introduit $\Gamma_k = E_1 + ... + E_k$ avec $(E_i)_{1\leq i\leq n+1}$ sont des variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées de loi exponentielle $\mathcal{E}(1)$.

1. Montrer que $(U_1^{(n)}, ..., U_n^{(n)})$ est de même loi que $(\Gamma_1/\Gamma_{n+1}, \ldots, \Gamma_n/\Gamma_{n+1})$.
2. Pour une suite $k_n \in \{1, ..., n\}$ avec $\lim_{n\to+\infty} k_n = +\infty$ et $\lim_{n\to+\infty} k_n/n = 0$, on introduit l'estimteur

$$\hat{\alpha}_{k_n,n} = \left(\frac{1}{k_n}\sum_{l=n+1-k_n}^{n} \log(V_l^{(n)}/V_{n+1-k_n}^{(n)})\right)^{-1}$$

.

   a. En distribution, réexprimer cet estimateur en fonction des variables $\Gamma_k$.
   b. Démonter la convergence en probabilité de cet estimateur.

## Exercice 4 (1 point)

Soit l'exemple d'un client qui achète un put à la banque de strike $K$ et de maturité $T$ sur le sous-jacent $S$. Soit $\tau$ le minimum des deux temps de défauts de la banque et de son client. Quel est le flux $C_t$ réellement transmis par la banque à son client au temps $t$.

## Exercice 5 (1 point)

Quelle asymétrie apparait lorsqu'une banque veut couvrir le risque de défaut d'une contrepartie qui n'est pas une banque ?

**Corrigé**

1. Soient $X, Y \in \mathcal{X}$. Si $X \leq Y$ $\mathbb{P}$-p.s., $e^{-\alpha X} \geq e^{-\alpha Y}$ $\mathbb{P}$-p.s. et donc $\rho_\alpha(X) \geq \rho_\alpha(Y)$. Pour $m \in \mathbb{R}$, $\rho_\alpha(X+m) = \frac{1}{\alpha}\log(\mathbb{E}[e^{-\alpha m}e^{-\alpha X}]) = \rho_\alpha(X) - m$. Pour prouver la convexité, il s'agit de montrer que pour $\lambda \in ]0,1[$, $\frac{1}{\alpha}\log(\mathbb{E}[e^{-\alpha\lambda X}e^{-\alpha(1-\lambda)Y}]) \leq \frac{\lambda}{\alpha}\log(\mathbb{E}[e^{-\alpha X}]) + \frac{1-\lambda}{\alpha}\log(\mathbb{E}[e^{-\alpha Y}])$, ou encore
$$\mathbb{E}[e^{-\alpha\lambda X}e^{-\alpha(1-\lambda)Y}] \leq \mathbb{E}[e^{-\alpha X}]^\lambda \mathbb{E}[e^{-\alpha Y}]^{(1-\lambda)},$$
ce qui n'est rien d'autre que l'inégalité de Hölder avec $1/p = \lambda$ et $1/q = 1-\lambda$. Enfin $\rho_\alpha$ n'est pas une mesure de risque cohérente. En effet, Si $X$ suit une loi de Bernoulli de paramètre $1/2$, on a pour $\lambda > 0$, $\rho_\alpha(\lambda X) = \frac{1}{\alpha}\log(\frac{1}{2}(1+e^{-\lambda\alpha})) \sim_{\lambda\to+\infty} \frac{-\log(2)}{\alpha}$, ce qui n'est pas compatible avec un comportement linéaire.

2. (a) Soient $0 < \alpha < \alpha'$. On pose $p = \alpha'/\alpha > 1$. Par l'inégalité de Jensen, $\mathbb{E}[e^{-\alpha X}] \leq \mathbb{E}[e^{-\alpha p X}]^{1/p}$, et par conséquent $\frac{1}{\alpha}\log(\mathbb{E}[e^{-\alpha X}]) \leq \frac{1}{\alpha'}\log(\mathbb{E}[e^{-\alpha' X}])$.
   (b) Pour $X \in \mathcal{X}$, $\rho_\alpha(X) = \sum_{k=0}^\infty (-\alpha)^k \mathbb{E}[X^k]/k!$. Il s'agit d'une série absolument convergente et on a $\rho_\alpha(X) =_{\alpha\to 0} 1 - \alpha\mathbb{E}[X] + O(\alpha^2)$, et par conséquent $\rho_0(X) = \mathbb{E}[-X]$, ce qui est clairement une mesure de risque cohérente.

3. (a) Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{X}^\mathbb{N}$ une suite telle que
$$\begin{cases} X_n \underset{n\to+\infty}{\to} X, p.s. \\ \exists M > 0, \forall n \in \mathbb{N}, \|X_n\|_\infty \leq M. \end{cases}$$
   Par convergence dominée, on a $\mathbb{E}[e^{-\alpha X_n}] \underset{n\to+\infty}{\to} \mathbb{E}[e^{-\alpha X}]$ et donc $\lim_{n\to+\infty}\rho_\alpha(X_n) = \rho_\alpha(X)$.
   (b) En particulier, on a que $\rho_\alpha(X) \leq \liminf_{n\to+\infty}\rho_\alpha(X_n)$. D'après le théorème vu en cours sur la représentation des mesures de risque convexes s.c.i., on en déduit grâce à (a) que
$$\rho_\alpha(X) = \sup_{\mathbb{Q}\in\mathcal{M}_1(\mathbb{P})} \mathbb{E}_\mathbb{Q}[-X] - \gamma_\alpha(\mathbb{Q}),$$
   où $\gamma_\alpha(\mathbb{Q}) = \sup_{X\in\mathcal{X}} \mathbb{E}[-X\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}] - \frac{1}{\alpha}\log\mathbb{E}[e^{-\alpha X}]$. On a $\gamma_\alpha(\mathbb{Q}) = \frac{1}{\alpha}\sup_{X\in\mathcal{X}} \mathbb{E}[-\alpha X\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}] - \log\mathbb{E}[e^{-\alpha X}] = \frac{1}{\alpha}\sup_{X\in\mathcal{X}} \mathbb{E}[-X\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}] - \log\mathbb{E}[e^{-X}] = \frac{1}{\alpha}\gamma_1(\mathbb{Q})$, puisque $\alpha\mathcal{X} = \mathcal{X}$.

4. (a) On a $\varphi'(x) = 1 + \log(x)$ est une fonction croissante et $\varphi$ est donc convexe. De plus $\varphi'(x) < 0$ pour $x < 1/e$ et $\varphi'(x) > 0$ pour $x > 1/e$, ce qui assure que $\varphi$ atteint son minimum en $1/e$, et donc $\varphi(x) \geq \varphi(1/e) = -1/e$. Ainsi, $H(\mathbb{Q}|\mathbb{P}) = \mathbb{E}[\varphi(\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}})]$ a un sens comme espérance d'une variable aléatoire minorée. En outre on a par l'inégalité de Jensen, $H(\mathbb{Q}|\mathbb{P}) = \mathbb{E}[\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}\log(\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}})] \geq \varphi(\mathbb{E}[\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}]) = 0$.
   (b) Pour $n, p \in \mathbb{N}^*$, on pose $X_{n,p} = -\log(\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}})\mathbf{1}_{1/p \leq \frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} \leq n} \in \mathcal{X}$. On a
$$\gamma_1(\mathbb{Q}) \geq \mathbb{E}\left[\log(\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}})\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}\mathbf{1}_{1/p\leq\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}\leq n}\right] - \log\left(\mathbb{E}\left[\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}\mathbf{1}_{1/p\leq\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}\leq n}\right]\right).$$
   Par convergence dominée, il vient en faisant tendre $p \to +\infty$ que $\gamma_1(\mathbb{Q}) \geq \mathbb{E}[\varphi\left(\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}\right)\mathbf{1}_{\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}\leq n}] - \log(\mathbb{E}[\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}\mathbf{1}_{\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}\leq n}])$, puis en faisant tendre $n \to +\infty$, on obtient par convergence monotone que $\gamma_1(\mathbb{Q}) \geq H(\mathbb{Q}|\mathbb{P})$.
   (c) Pour $X \in \mathcal{X}, \mathbb{E}_\mathbb{Q}[X] = \mathbb{E}\left[\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}X\right] = \mathbb{E}\left[\frac{e^Z}{\mathbb{E}[e^Z]}\frac{\mathbb{E}[e^Z]}{e^Z}\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}X\right] = \mathbb{E}_{\mathbb{P}^Z}[\frac{\mathbb{E}[e^Z]}{e^Z}\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}X]$. Donc $\mathbb{Q}$ est absolument continue par rapport à $\mathbb{P}^Z$, et
$$\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}^Z} = \frac{\mathbb{E}[e^Z]}{e^Z}\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}.$$

(d) En utilisant l'égalité de la question précédente,

$$
\begin{aligned}
H(\mathbb{Q}|\mathbb{P}) = \mathbb{E}\left[\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}\log\left(\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}\right)\right] &= \mathbb{E}\left[\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}(Z - \log(\mathbb{E}[e^Z]))\right] + \mathbb{E}\left[\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}\log\left(\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}^Z}\right)\right] \\
&= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[Z] - \log(\mathbb{E}[e^Z]) + \mathbb{E}_{\mathbb{P}^Z}[\varphi(\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}^Z})] \\
&= \mathbb{E}\left[\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}Z\right] - \log(\mathbb{E}[e^Z]) + H(\mathbb{Q}|\mathbb{P}^Z).
\end{aligned}
$$

Comme, $H(\mathbb{Q}|\mathbb{P}^Z) \geq 0$ et que $Z \in \mathcal{X}$ est arbitraire, il vient:

$$
H(\mathbb{Q}|\mathbb{P}) \geq \sup_{Z\in\mathcal{X}} \mathbb{E}\left[\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}Z\right] - \log(\mathbb{E}[e^Z]) = \gamma_1(\mathbb{Q}).
$$