Représentation des mesures de risque

L'objectif de ce paragraphe est de montrer que toute mesure de risque convexe $\rho : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ où $\mathcal{X} = \{F : (\Omega, \mathcal{F}) \to \mathbb{R}$ bornée mesurable$\}$

s'écrit sous la forme suivante :

$$\rho(X) = \sup_{Q \in \mathcal{M}_{1,f}} E_Q(-X) - \alpha(Q) \qquad (*)$$

où $\mathcal{M}_{1,f} = \{\mu$ finiment additive, ≥ 0 t.q $\mu(\Omega) = 1\}$ et $\alpha : \mathcal{M}_{1,f} \to]-\infty, +\infty]$ est une fonction de pénalité t.q $\inf_{Q} \alpha(Q) \in \mathbb{R}$. $(\rho(0) = 0)$

On dira qu'une mesure de risque ρ est <u>représentée</u> par α si on a $(*)$.

Ensuite, nous affinerons progressivement ce résultat dans les cas où nous disposons de plus d'information sur la mesure de risque et obtiendrons des résultats de représentation plus précis.

<u>Théorème</u> Toute mesure de risque convexe $\rho : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ s'écrit

$$X \in \mathcal{X}, \qquad \rho(X) = \max_{Q \in \mathcal{M}_{1,f}} \left(E_Q[-X] - \alpha_{min}(Q) \right)$$

où $\alpha_{min}(Q) = \sup_{X \in \mathcal{A}_\rho} E_Q[-X]$, $Q \in \mathcal{M}_{1,f}$

En outre, α_{min} est la plus petite fonction de pénalité qui représente ρ, i.e: $\rho(X) = \sup_{Q \in \mathcal{M}_{1,f}} E_Q[-X] - \alpha(Q) \Rightarrow \forall Q \in \mathcal{M}_{1,f}, \alpha(Q) \geq \alpha_{min}(Q)$

preuve : $\rho : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ est convexe et est C^0 par rapport à $\| \ \|$ (elle est même lipschitzienne)

Par conséquent $\rho = \rho^{**}$, ie $\rho(X) = \sup\limits_{\mu \in ba(\Omega, \mathcal{F})} \int X d\mu - \rho^*(\mu)$

$$\text{où } \rho^*(\mu) = \sup_{X \in \mathcal{X}} \int X d\mu - \rho(X) \qquad \rho^*(\mu) \geq 0 \text{ (prendre } X=0\text{)}.$$

Nous allons montrer que $\rho^*(\mu) = +\infty$ si $-\mu \notin \mathcal{M}_{1,f}$.

Soit μ t.q $\rho^*(\mu) < +\infty$

Pour cela, on se donne $Y \in \mathcal{X}$ t.q $Y \geq 0$ $\mathcal{X}$ étant un e.v, $\mathcal{X} = \{X+Y, X \in \mathcal{X}\}$

et donc
$$\rho^*(\mu) = \sup_{X \in \mathcal{X}} \int (X+Y) d\mu - \rho(X+Y)$$

$$\overset{\circledast}{=} \int Y d\mu + \sup_{X \in \mathcal{X}} \underbrace{\int X d\mu - \rho(X+Y)}_{\geq -\rho(X)}$$

$X+Y \geq X \Rightarrow \rho(X+Y) \leq \rho(X)$

$$\geq \int Y d\mu + \underbrace{\sup_{X \in \mathcal{X}} \int X d\mu - \rho(X)}_{\rho^*(\mu)}$$

Donc $\int Y d\mu \leq 0$ pour $Y \geq 0$ donc en prenant $Y = \mathbb{1}_A$, il vient que $\forall A \in \mathcal{F}$, $\mu(A) \leq 0$

en prenant $Y = 1$, puisque $\rho(X+1) = \rho(X) - 1$, on a $\overset{\circledast}{\Rightarrow}$ $\rho^*(\mu) = \mu(\Omega) + 1 + \underbrace{\sup \int X d\mu - \rho(X)}_{\rho^*(\mu)}$

ie $\mu(\Omega) = -1$

Ainsi $\rho^*(\mu) < \infty \Rightarrow -\mu \in \mathcal{M}_{1,f}$

Donc
$$\rho(X) = \sup_{-\mu \in \mathcal{M}_{1,f}} \int -X \, d(-\mu) - \rho^*(\mu)$$
$$= \sup_{Q \in \mathcal{M}_{1,f}} E_Q[-X] - \rho^*(-Q)$$

On a :
$$\rho^*(-Q) = \sup_{X \in \mathcal{X}} E_Q[-X] - \rho(X) \geq \sup_{X \in \mathcal{A}_\rho} E_Q[-X] - \overbrace{\rho(X)}^{\leq 0 \text{ sur } \mathcal{A}_\rho}$$
$$\geq \sup_{X \in \mathcal{A}_\rho} E_Q[-X] = \alpha_{min}(Q)$$

Par ailleurs, l'invariance par translation assure que : $\rho(X+\rho(X))=0$ pour $X\in\mathcal{X}$ ie $X+\rho(X)\in\mathcal{A}_\rho$

et donc $\alpha_{min}(Q) \geq E_Q[-(X+\rho(X))] = E_Q(-X)-\rho(X)$, $X\in\mathcal{X}$.

Donc $\alpha_{min}(Q) \geq \rho^*(-Q)$ Ainsi $\boxed{\rho^*(-Q)=\alpha_{min}(Q)}$.

→ Il reste à prouver que si α représente ρ, alors $\alpha(Q)\geq\alpha_{min}(Q)$.

Si α représente ρ, $\rho(X)\geq E_Q[-X]-\alpha(Q)$ pour $X\in\mathcal{X}$, $Q\in\mathcal{M}_{1,f}$

et donc $\alpha(Q)\geq \sup_{X\in\mathcal{X}} E_Q[-X]-\rho(X) = \alpha_{min}(Q)$.

→ Enfin, il reste à montrer que le sup est un max. Pour cela on utilise le théorème de Banach-Alaoglu : $\{\mu\in ba,\ |||\mu|||\leq 1\}$ est faiblement* compact

où $|||\mu||| = \sup_{\|F\|\leq 1} \frac{|\int F d\mu|}{\|F\|} \leq \|\mu\|_{Var}$ donc $\mathcal{M}_{1,f}\subset\{\mu\in ba, |||\mu|||\leq 1\}$

Donc si Q_n est une suite t.q $\rho(X)=\lim_n E_{Q_n}[-X]-\alpha_{min}(Q_n)$

$\exists\varphi(n)$ tq $Q_{\varphi(n)} \xrightarrow{\text{faible}*} Q_\infty$ ie $\forall X\in\mathcal{X}$, $E_{Q_{\varphi(n)}}[-X]\to E_{Q_\infty}[-X]$.

$\alpha_{min}(Q_\infty)=\rho^*(Q)$ étant s.c.i par rapport à la topologie faible*, il vient que

$$\alpha_{min}(Q_\infty)\leq \lim_{n\to\infty}\alpha_{min}(Q_{\varphi(n)})$$

et donc $\rho(X) \leq E_{Q_\infty}[-X]-\alpha_{min}(Q_\infty)$

ce qui prouve que la borne est atteinte par Q_∞. □.

Lorsque la mesure de risque est cohérente (ie elle est en plus homogène), la représentation prend une forme encore plus élémentaire.

<u>Corollaire</u> : Si $\rho:\mathcal{X}\to\mathbb{R}$ est une mesure de risque cohérente, $\alpha_{min}(Q)\in\{0,+\infty\}$ pour $Q\in\mathcal{M}_{1,f}$

On définit $\mathcal{Q}_{max}=\{Q\in\mathcal{M}_{1,f}$ t.q $\alpha_{min}(Q)=0\}$

$\rho(X)=\max_{Q\in\mathcal{Q}_{max}} E_Q[-X]$ et $\mathcal{Q}_{max}$ est le plus grand ensemble $\Sigma\subset\mathcal{M}_{1,f}$ t.q $\rho(X)=\max_{\Sigma} E_Q[-X]$

<u>Preuve</u> : si ρ est cohérente $\rho(\lambda X)=\lambda\rho(X)$ et donc $\forall\lambda>0$ $\{\lambda X,\ X\in\mathcal{X}\}=\mathcal{X}$

$$\alpha^{\rho}_{min}(Q)=\sup_{X\in\mathcal{X}}E_Q[-X]-\rho(X) = \sup_{X\in\mathcal{X}} E_Q[-\lambda X]-\rho(\lambda X)=\lambda\alpha_{min}(Q)$$

ceci $\forall\lambda>0$ Donc $\alpha_{min}(Q)\in\{0,+\infty\}$. Le reste de l'énoncé est évident. □

Nous nous intéressons désormais aux mesures de risque convexes qui peuvent être représentées par une fonction de pénalité sur les mesures de probabilités (σ-additives)

ie $\exists\, \alpha : \mathcal{M}_1 \longmapsto \mathbb{R}_+$ $\qquad \mathcal{M}_1 = \{\mu\ \sigma\text{-additive sur } (\Omega, \mathcal{F}) \text{ tq } \mu(\Omega) = 1,\ \mu \geq 0\}$

t.q

$$\rho(X) = \sup_{Q \in \mathcal{M}_1} \mathbb{E}_Q[-X] - \alpha(Q) \qquad (*)$$

Dans ce cas, l'interprétation heuristique de la représentation de ρ est claire : les probabilités Q décrivent comment va évoluer le marché dans le futur. Certaines évolutions étant plus "réaliste" que d'autres, on les pondère à travers la fonction de pénalité α. Si on est "certain" que les évolutions futures suivent la loi Q_0, on sera tenté de prendre $\begin{cases} \alpha(Q_0) = 0 \\ \alpha(Q) = +\infty \text{ pour } Q \neq Q_0 \end{cases}$

Le fait que l'on puisse représenter ρ avec uniquement des mesures de proba (et non des mesures finiment additive de masse 1) est lié à des propriétés de continuité de la mesure de risque, ce que nous allons voir.

<u>Proposition</u> : Soit ρ une mesure de risque convexe qui est C^0 par en dessous,

ie si $\begin{cases} X_n(\omega) \xrightarrow[n\to\infty]{} X(\omega) & \forall \omega \in \Omega \\ X_n(\omega) \leq X_{n+1}(\omega) \end{cases} \Rightarrow \rho(X_n) \underset{n\to\infty}{\searrow} \rho(X)$

Alors si $\alpha : \mathcal{M}_{1,f} \to \mathbb{R}$ représente ρ, α ne charge que les mesures de probabilités, ie

$$\alpha(Q) < \infty \Rightarrow Q \text{ est } \sigma\text{-additive.}$$

<u>Preuve</u> Une mesure $Q \in \mathcal{M}_{1,f}$ est σ-additive ssi $Q(A_n) \nearrow 1$ pour toute suite $(A_n) \in \mathcal{F}^{\mathbb{N}}$ tq $A_n \subset A_{n+1}$, $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \Omega$

[Preuve $\Rightarrow$ évident
(à faire en Exo) $\Leftarrow$ Soit $B_1, \dots, B_n, \dots$ disjoints on veut mq $Q(\bigcup_{i\in\mathbb{N}^*} B_i) = \sum_{i\in\mathbb{N}^*} Q(B_i)$
On pose $A_0 = \Omega \setminus \bigcup_{i\in\mathbb{N}^*} B_i$, $A_i = A_{i-1} \cup B_i$ $i \geq 1$ Par hyp $Q(A_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 1 = Q(A_0) + Q(\bigcup B_i)$
et $Q(A_n) = Q(A_0) + Q(B_1) + \dots + Q(B_n)$ Donc $\sum Q(B_i) = Q(\bigcup B_i)$ $\square$.

On suppose $\alpha(Q) < \infty$. On se donne (A_n) suite crois_te de $\mathcal{F}$ t.q $\cup A_n = \Omega$

Soit $\lambda > 0$ $\quad \rho(\lambda \mathbb{1}_{A_n}) \geq \mathbb{E}_Q[-\lambda \mathbb{1}_{A_n}] - \alpha(Q) = -\lambda Q(A_n) - \alpha(Q)$

$$\text{Donc } Q(A_n) \geq -\frac{\rho(\lambda \mathbb{1}_{A_n})}{\lambda} - \frac{\alpha(Q)}{\lambda}$$

Comme $A_n \subset A_{n+1}$, $\lambda \mathbb{1}_{A_n} \leq \lambda \mathbb{1}_{A_{n+1}}$ et $\lambda \mathbb{1}_{A_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \lambda$, donc par hypothèse sur ρ,

$$\rho(\lambda \mathbb{1}_{A_n}) \xrightarrow[n\to\infty]{} \rho(\lambda) = -\lambda$$

et donc $\lim_{n\to\infty} Q(A_n) \geq 1 - \frac{\alpha(Q)}{\lambda}$ $\quad$ et ceci $\forall \lambda > 0$ donc $\lim_n Q(A_n) \geq 1$

or $Q(A_n) \leq 1$, et donc $\lim_n Q(A_n) = 1$ $\square$

Rq la réciproque de cette proposition est fausse: la mesure du pire événement $\rho(X) = \sup_{Q \in \mathcal{M}_1} \mathbb{E}_Q[-X]$ satisfait la représentation $(\alpha \equiv 0)$ mais si $A_n \nearrow \Omega$, $\rho(\mathbb{1}_{A_n}) = 0 \not\xrightarrow[n\to\infty]{} \rho(1) = -1$

Proposition : Si ρ est une mesure de risque représentée par une fonction de pénalité α sur les mesures de proba (ie $\circledast$), alors ρ est C^0 par au-dessus, ie:

$$\text{si } \forall \omega \in \Omega \begin{cases} X_n(\omega) \to X(\omega) \\ X_{n+1}(\omega) \leq X_n(\omega) \end{cases} \implies \rho(X_n) \nearrow_{n\to\infty} \rho(X)$$

Preuve Soit $\varepsilon > 0$. Puisque $\rho(X) = \sup_{Q \in \mathcal{M}_1} \mathbb{E}_Q[-X] - \alpha(Q)$, il existe

$$Q_X \in \mathcal{M}_1 \text{ t.q } \quad \mathbb{E}_{Q_X}[-X] - \alpha(Q_X) \geq \rho(X) - \varepsilon$$

$X(\omega) \leq X_n \leq X_0(\omega)$ et X_0, X sont bornées donc $\|X_n\| \leq \max(\|X_0\|, \|X\|)$

Par convergence dominée, il vient que $\mathbb{E}_{Q_X}[-X_n] \to \mathbb{E}_{Q_X}[-X]$

et par conséquent $\rho(X_n) \geq \mathbb{E}_{Q_X}[-X_n] - \alpha(Q_X) \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathbb{E}_{Q_X}[-X] - \alpha(Q_X) \geq \rho(X) - \varepsilon$

Donc $\lim_{n\to\infty} \rho(X_n) \geq \rho(X) - \varepsilon$ $\quad$ Par ailleurs $\rho(X_n) \leq \rho(X)$ et donc $\lim_n \rho(X_n) = \rho(X)$ $\square$

suite croissante

Ainsi, nous avons montré les implications suivantes :

ρ est C^0 par en dessous $\Rightarrow$ ρ est représentée par une fonction de pénalité concentrée sur les mesures de proba

$\Downarrow$

ρ est C^0 par au-dessus.

<u>Nota</u> : On peut mq ρ C^0 par au-dessus ssi $\forall X_n$ tq $\|X_n\| \leq \Omega$ et $X_n(\omega) \to X(\omega)$, $\rho(X) \leq \liminf_n \rho(X_n)$.

Mesures de risque convexes sur L^∞

Jusqu'ici, nous avons considéré des mesures de risque pour des fonctions bornées mesurables sur $(\Omega, \mathcal{F})$ sans spécifier aucune probabilité sur $(\Omega, \mathcal{F})$. Désormais, nous allons considérer un espace de proba $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ où $\mathbb{P}$ est une proba de référence. Typiquement en finance, $\mathbb{P}$ sera la probabilité historique qui décrit les évolutions des actifs risqués. On s'intéresse alors aux mesures de risque t.q $\quad \rho(X) = \rho(Y) \quad$ si $\quad X = Y$ $\mathbb{P}$p.s. $\qquad (*)$

On note $\mathcal{M}_{1,f}(\mathbb{P}) = \{ \mathbb{Q}$ mesure ≥ 0 finie t. additive t.q $\mathbb{Q} \ll \mathbb{P} \}$

$\mathcal{M}_1(\mathbb{P}) = \{ \mathbb{Q}$ mesure de proba t.q $\mathbb{Q} \ll \mathbb{P} \}$

$\mathbb{Q}$ est absolument C^0 par rapport à $\mathbb{P}$ ($\mathbb{Q} \ll \mathbb{P}$) si $\mathbb{P}(A) = 0 \Rightarrow \mathbb{Q}(A) = 0$.

<u>Lemme</u> Si $\rho : \{X : (\Omega, \mathcal{F}) \to \mathbb{R}$ bornée mesurable$\} \to \mathbb{R}$ est une mesure de risque convexe représentée par $\alpha : \mathcal{M}_{1,f} \to \mathbb{R}_+$ satisfaisant $(*)$

alors $\alpha(Q) = +\infty$ pour tout $Q \in \mathcal{M}_{1,f} \setminus \mathcal{M}_{1,f}(\mathbb{P})$.

<u>Preuve</u> : Soit $Q \in \mathcal{M}_{1,f}$ une mesure finiment additive qui n'est pas abs C° par rapport à $\mathbb{P}$.

$$\exists A \in \mathcal{F}, \quad Q(A) > 0 \text{ et } \mathbb{P}(A) = 0$$

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, Comme $0 = \lambda \mathbb{1}_A$ $\mathbb{P}$-p.s, $\underset{0}{\underset{\shortparallel}{\rho(0)}} = \rho(\lambda \mathbb{1}_A)$

Donc $\lambda \mathbb{1}_A \in \mathcal{A}_\rho$.

Ainsi $\alpha(Q) \geq \alpha_{min}(Q) = \sup_{X \in \mathcal{A}_\rho} \mathbb{E}_Q[-X] \geq \sup_{\lambda \in \mathbb{R}} \underbrace{\mathbb{E}_Q[-\lambda \mathbb{1}_A]}_{-\lambda Q(A)} = +\infty$ ∎

<u>Corollaire</u> : Si ρ est une mesure de risque convexe, continue par en dessous et satisfaisant $(*)$, alors $\rho(X) = \max_{Q \in \mathcal{M}_1(\mathbb{P})} \mathbb{E}_Q[-X] - \alpha_{min}(Q)$

<u>Preuve</u> : D'après le thm de représentation des mesures de risque,
$\rho(X) = \max_{\mathcal{M}_{1,f}} \mathbb{E}_Q[-X] - \alpha_{min}(Q)$, et $\alpha_{min}(Q) = +\infty$ si $Q \notin \mathcal{M}_1$ par prop précédente et si $Q \not\ll \mathbb{P}$.

∎

De façon générale, il faut une hypothèse supplémentaire pour pouvoir représenter ρ uniquement sur $\mathcal{M}_1(\mathbb{P})$, l'ensemble des proba $Q \ll \mathbb{P}$.

On considère désormais une mesure de risque convexe qui satisfait $\rho(X) = \rho(Y)$ si $X = Y$ $\mathbb{P}$ p.s. si bien que l'on peut voir ρ comme une fonction de $L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \to \mathbb{R}$ (espace quotient)

Le théorème suivant caractérise les mesures de risque qui peuvent être représentées par une fonction de pénalité $\alpha : \mathcal{M}_1(\mathbb{P}) \to \mathbb{R}_+$.

Théorème : Soit $\rho : L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \to \mathbb{R}$ une mesure de risque convexe

les conditions suivantes sont équivalentes. On pose $\alpha_{min}(\mathbb{Q}) = \sup_{X \in \mathcal{A}_\rho} \mathbb{E}_\mathbb{Q}[-X]$

a. ρ est semi continue inférieurement pour la topologie faible* $\sigma(L^\infty, L^1)$

b. $\rho(X) = \sup_{\mathbb{Q} \in \mathcal{M}_1(\mathbb{P})} \mathbb{E}_\mathbb{Q}[-X] - \alpha_{min}(\mathbb{Q}) \quad , X \in L^\infty.$

c. ρ est C^0 par au-dessus ie $\begin{cases} X_n(\omega) \to X(\omega) \ \mathbb{P}\text{-p.s} \\ \mathbb{P}(X_n \geq X_{n+1}) = 1 \end{cases} \Rightarrow \rho(X_n) \nearrow \rho(X)$

d. ρ satisfait la propriété de Fatou, ie $\forall (X_n) \in (L^\infty)^\mathbb{N}$, $\underset{\|X_n\|_\infty \leq M}{X_n \to X} \ \mathbb{P}\text{-p.s}$ $\Rightarrow \rho(X) \leq \liminf_n \rho(X_n)$

Dans ce cas, on a comme précédemment que α_{min} est la plus petite fonction de pénalité t.q $\rho(X) = \sup_{\mathbb{Q} \in \mathcal{M}_1(\mathbb{P})} \mathbb{E}_\mathbb{Q}[-X] - \alpha(\mathbb{Q})$.

Csq ρ AVaR est sci pour la topo faible et est C^0 par au dessus au sens de c, puisque l'on a b.

Preuve.

a⇒b : La preuve est similaire à celle faite pour les fct bornées.

Par hypothèse ρ est cvx et sci, donc $\rho = \rho^{**}$, ie

$$\rho(X) = \sup_{X' \in L^1} \mathbb{E}[XX'] - \rho^*(X')$$

où $\rho^*(X') = \sup_{X \in L^\infty} \mathbb{E}[XX'] - \rho(X) \qquad \rho^*(X') \geq 0$ (prendre $X=0$)

Si $\rho^*(X') < \infty$, nous allons mq $X' \leq 0$ et $\mathbb{E}(X') = -1$

en effet, soit $Y \in L^\infty$, $Y \geq 0 \qquad L^\infty = \{X + Y, X \in L^\infty\}$

et $\rho^*(X') = \sup_{X \in L^\infty} \mathbb{E}[(X+Y)X'] - \underbrace{\rho(X+Y)}_{\leq \rho(X)}$

$\geq \mathbb{E}(YX') + \sup_{X \in L^\infty} \mathbb{E}(XX') - \rho(X) = \mathbb{E}(YX') + \rho^*(X')$

Donc $\forall Y \geq 0$, $\mathbb{E}(YX') \leq 0$ et donc $X' \leq 0$ $\mathbb{P}$-p.s.

en outre, en prenant $Y = m \in \mathbb{R}_+$, on a $\rho^*(X') = m\,\mathbb{E}(X') + m + \rho^*(X')$
puisque $\rho(X+m) = \rho(X) - m$

et nécessairement, $\mathbb{E}(X') = -1$

Ainsi, $\rho(X) = \sup_{\substack{X'\in L^1 \text{ t.q } X'\leq 0 \\ \mathbb{E}(X')=-1}} \mathbb{E}(XX') - \rho^*(X') = \sup_{\substack{X'\in L^1 \text{ t.q } X'\geq 0 \\ \mathbb{E}(X')=1}} \mathbb{E}[-XX'] - \rho^*(-X')$ 5

Or, (par le thm de Radon-Nikodym: si μ signée $\mu \ll \nu$, $\exists!\, h\in L^1(\nu)$ t.q $\mu(A)=\int_A h\,d\nu$; ν mesure σ-finie $(\exists\, A_n \nearrow \cup A_n = \Omega$ et $\nu(A_n)<\infty)$) $Q\in \mathcal{M}_1(\mathbb{P}) \iff \exists X' \in L^1(\mathbb{P})$ t.q $\frac{dQ}{d\mathbb{P}} = X'$.

et ainsi $\rho(X) = \sup_{Q\in\mathcal{M}_1(\mathbb{P})} \mathbb{E}_Q[-X] - \rho^*(Q)$

où $\rho^*(Q) = \sup_{X\in L^\infty} \mathbb{E}_Q[-X] - \rho(X) = \sup_{X\in\mathcal{A}_\rho} \mathbb{E}_Q[-X] = \alpha_{\min}(Q)$

(car $\rho^*(-X') = \sup_{X\in L^\infty} \mathbb{E}[-XX'] - \rho(X) = \sup_{X\in L^\infty} \mathbb{E}_Q[-X] - \rho(X)$)

in preuve que pour les fct bornées.

b⇒c : se démontre comme pour la proposition p13, la convergence simple étant remplacée par la convergence p.s.

On prend $\varepsilon>0$ et $Q_X\in\mathcal{M}_1(\mathbb{P})$, t.q $\mathbb{E}_{Q_X}[-X] - \alpha_{\min}(Q_X) \geq \rho(X) - \varepsilon$

$X\leq X_n \leq X_0 \Rightarrow \|X_n\|_\infty \leq \max(\|X_0\|_\infty, \|X\|_\infty)$ et par cv dominée $\mathbb{E}_{Q_X}[-X_n] - \alpha(Q_X) \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathbb{E}_{Q_X}[-X] - \alpha(Q_X) \geq \rho(X) - \varepsilon$

Or $\rho(X_n) \nearrow$ et $\rho(X_n) \geq \mathbb{E}_{Q_X}[-X_n] - \alpha(Q_X)$ Donc $\lim_n \rho(X_n) \geq \rho(X) - \varepsilon$, $\forall \varepsilon>0$.

c⇒d : Soit $(X_n)\in (L^\infty)^{\mathbb{N}}$ t.q $X_n \to X$ $\mathbb{P}$.p.s. et $\exists M>0$, $\|X_n\|_\infty \leq M$.

On pose $Y_n = \sup_{k\geq n} X_k$ $\quad Y_n \geq Y_{n+1}$ et $Y_n \to X$ $\mathbb{P}$.p.s.

Donc par hypothèse $\rho(Y_n) \to \rho(X)$

Or $\forall k\geq n$, $Y_n \geq X_k$ et donc $\rho(Y_n) \leq \rho(X_k)$. Ainsi $\rho(Y_n) \leq \inf_{k\geq n} \rho(X_k)$

et $\rho(X) \leq \lim_{n\to\infty} \inf_{k\geq n} \rho(X_k)$.

d⇒a : La fonction $\rho : L^\infty \to \mathbb{R}$ est s.c.i pour la topologie faible $\sigma(L^\infty, L^1)$ si $\forall c\in\mathbb{R}$, $\{X, \rho(X) > c\}$ ouvert pour $\sigma(L^\infty, L^1)$ ce qui équivaut à $\forall c\in\mathbb{R}$, $\{X, \rho(X)\leq c\}$ fermé pour $\sigma(L^\infty, L^1)$

$\{X, \rho(X)\leq c\}$ est un ensemble convexe et par le théorème de Krein-Smulian,

il est fermé ssi $\{X\in L^\infty, \rho(X)\leq c\} \cap \{X\in L^\infty, |||X||| \leq r\}$ est fermé où $|||X||| = \sup_{X'\neq 0} \frac{\mathbb{E}[XX']}{\|X'\|_1}$

laisser de côté

clairement $|\mathbb{E}[XX']| \leq \mathbb{E}[\|X\|_\infty |X'|] = \|X\|_\infty \|X'\|_1$ ie $|||X||| \leq \|X\|_\infty$

mais par ailleurs, $\forall A \in \mathcal{F}$, $\mathbb{1}_A \in L^1$ et $\dfrac{\mathbb{E}[XX']}{\mathbb{E}(X')} = \mathbb{E}(X \mid X \in A)$.

et donc $|||X||| \geq \|X\|_\infty - \varepsilon \ \forall \varepsilon > 0$

prendre $A = \{\omega \text{ tq } X(\omega) > \|X\|_\infty - \varepsilon\}$

ou $\{\omega \text{ tq } X(\omega) < -\|X\|_\infty + \varepsilon\}$

II $\boxed{\text{Donc } |||X||| = \|X\|_\infty}$.

Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite dans $\{X \in L^\infty, \rho(X) \leq c\} \cap \{X \in L^\infty, \|X\|_\infty \leq r\}$ convergeant vers X pour la topologie $\sigma(L^\infty, L^1)$.

on utilise le résultat dédié à L^1/L^∞

Par le thm de Krein-Smulian, il suffit de mq $\forall r > 0$, $\{X, \rho(X) \leq c\} \cap \{X \in L^\infty, \|X\|_\infty \leq r\}$ est fermé dans L^1.

On se donne une suite (X_n) dans cet ensemble t.q $X_n \xrightarrow{L^1} X_\infty$ Quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer que $X_n \xrightarrow{p.s} X_\infty$ Par hypothèse,

$$\rho(X_\infty) \leq \liminf_{n \to \infty} \rho(X_n) \leq c$$

et on a aussi clairement $\|X_\infty\|_\infty \leq r$ puisque $\|X_n\|_\infty \leq r$ et $X_n \to X_\infty$ p.s.

Donc $X_\infty \in \{X, \rho(X) \leq c\} \cap \{X \in L^\infty, \|X\| \leq r\}$ ie cet ensemble est bien fermé dans L^1. □

Exemples de mesures de risque sur L^∞:

× L'analogue de la mesure du pire événement est $\rho(X) = -\operatorname{essinf} X$

où $\operatorname{essinf} X = \sup\{m \in \mathbb{R}, \mathbb{P}(X \geq m) = 1\}$

il est facile de voir que $\rho(X) = \sup_{Q \in \mathcal{M}_1(\mathbb{P})} \mathbb{E}_Q[-X]$

en effet : × si $Q \ll \mathbb{P}$, $\mathbb{P}(X \geq m) = 1 \Rightarrow Q(X \geq m) = 1 \Rightarrow \mathbb{E}_Q[-X] \leq -m$ et donc $\sup_{Q \in \mathcal{M}_1(\mathbb{P})} \mathbb{E}_Q[-X] \leq \rho(X)$

× Pour mq $\rho(X) \leq \sup_{Q \in \mathcal{M}_1(\mathbb{P})} \mathbb{E}_Q[-X]$, on se donne $\varepsilon > 0$ $\quad p = \mathbb{P}(X < \operatorname{essinf} X + \varepsilon) > 0$

On considère pour $\eta \in (0,1)$, $Z^\eta = \dfrac{1 - \eta(1-p)}{p} \mathbb{1}_{\{X < \operatorname{essinf} X + \varepsilon\}} + \eta \mathbb{1}_{\{X \geq \operatorname{essinf} X + \varepsilon\}}$

$\mathbb{E}(Z^\eta) = 1 - \eta(1-p) + \eta(1-p) = 1$ $\quad \dfrac{dQ^\eta}{d\mathbb{P}} = Z^\eta$ définit une proba $\ll \mathbb{P}$

$$\mathbb{E}_{Q^\eta}(-X) = \mathbb{E}(-Z^\eta X) = \frac{1 - \eta(1-p)}{p} \mathbb{E}\Big[\underbrace{-X \mathbb{1}_{\{X < \operatorname{essinf} X + \varepsilon\}}}_{\geq -\operatorname{essinf} - \varepsilon}\Big] + \eta \mathbb{E}\big[\mathbb{1}_{\{X \geq \dots\}}(-X)\big]$$

$$\geq (1 - \eta(1-p))(\underbrace{-\operatorname{essinf} X}_{\rho(X)} - \varepsilon) + \eta \mathbb{E}(\ ) \quad | \cdot | \leq \|X\|_\infty$$

$\xrightarrow{\eta \to 0}$ $\sup_\eta \mathbb{E}_{Q^\eta}(-X) \geq \rho(X) - \varepsilon$

$$\frac{dQ^\varepsilon}{dP} = \frac{1}{p} \mathbb{1}_{\{X < \text{ess inf} X + \varepsilon\}}$$ définit une mesure de proba $Q^\varepsilon \ll P$.

et $$\mathbb{E}_{Q^\varepsilon}(-X) = \frac{1}{p} \mathbb{E}\left(-X \mathbb{1}_{\{X < \text{ess inf} X + \varepsilon\}}\right) \geq -\text{ess inf} X - \varepsilon = \rho(X) - \varepsilon$$

et ceci $\forall \varepsilon > 0$ $\square$.

× la $VaR_\lambda(X) := \inf\{m \in \mathbb{R},\ \mathbb{P}(m + X < 0) \leq \lambda\}$ est bien évidemment une mesure sur L^∞ mais elle n'est pas convexe.

. Mesures de risque invariantes en loi

On s'intéresse désormais aux mesures de risque qui sont telles que

$$\rho(X) = \rho(Y) \quad \text{si } X \overset{\text{loi}}{=} Y. \ (\text{sous } \mathbb{P})$$

Cette propriété est assez naturelle puisqu'elle consiste à associer le même risque à deux positions qui ont le même profil de risque. Clairement, la VaR_λ et $AVaR_\lambda$ sont des mesures invariantes en loi. Nous allons obtenir des résultats de représentation plus précis pour les mesures de risque convexes invariantes en loi qui vont faire apparaître l'AVaR comme brique élémentaire de toute mesure de risque.

[Rq On dit que $\mathcal{L}(X) \leq \mathcal{L}(Y)$ si $\forall f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \nearrow$ bornée, $\mathbb{E}(f(X)) \leq \mathbb{E}(f(Y))$

$\iff \forall x \in \mathbb{R} \ \mathbb{P}(X \leq x) \geq \mathbb{P}(Y \leq x)$ (*)

On peut vérifier que $\mathcal{L}(X) \leq \mathcal{L}(Y) \Rightarrow \rho(Y) \leq \rho(X)$

On le vérifie ici ds le cas où F_X et F_Y les fct de répartition respectives sont inversibles,

On pose $U = F_X(X) \sim \mathcal{U}([0,1])$. $\quad \rho(Y) = \rho(F_Y^{-1}(U))$

et $F_Y^{-1} \geq F_X^{-1}$ par (*)].

Nous allons utiliser de façon intensive le lemme suivant. Nous avons besoin tout au long de ce paragraphe de l'hypothèse technique suivante : $\exists U \in L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ t.q $U \sim \mathcal{U}([0,1])$ sous $\mathbb{P}$ que nous supposerons valable.

Lemme : Soit $X \in L^\infty$, $Y \in L^1$ on note $q_X(\lambda) = q_X^+(\lambda)$ et $q_Y(\lambda) = q_Y^+(\lambda)$

(en fait n'importe quel quantile d'ordre λ)

$$\text{Alors } \sup_{\tilde{X} \overset{\text{loi}}{=} X} \mathbb{E}(\tilde{X} Y) = \int_0^1 q_X(\lambda) q_Y(\lambda)\, d\lambda = \sup_{\tilde{Y} \overset{\text{loi}}{=} Y} \mathbb{E}(X \tilde{Y}).$$

Preuve : Nous nous contentons de prouver ce résultat pour $X, Y \geq 0$ t.q leurs fonctions de répartitions sont inversibles sur $\mathbb{R}_+$ ie $F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$ $\quad F_X(x) \leq \lambda \iff x \leq q_X(\lambda)$

$\sim F_Y(y) \leq \lambda \iff y \leq q_Y(\lambda)$.

c'est le cas si X, Y a densité > 0 sur un intervalle.

Dans ce cas $\mathbb{E}(XY) \overset{\text{Fubini}}{=} \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \mathbb{E}[\mathbb{1}_{x \leq X} \mathbb{1}_{y \leq Y}]\, dx dy$

$$\leq \int_0^\infty \int_0^\infty \underbrace{\mathbb{P}(x\leq X)\wedge \mathbb{P}(y\leq Y)}_{= \int_0^1 \mathbb{1}_{\{\bar{F}_X(x)\geq \lambda\}} \mathbb{1}_{\{\bar{F}_Y(y)\geq\lambda\}}\, d\lambda} dx\, dy$$

corriger

$$\overset{\text{Fubini}}{=} \int_0^1 \underbrace{\left(\int_0^\infty\int_0^\infty \mathbb{1}_{\{\bar{F}_X(x)\geq\lambda\}} \mathbb{1}_{\{\bar{F}_Y(y)\geq\lambda\}}\, dx\, dy\right)}_{=\underbrace{\int_0^\infty \mathbb{1}_{\bar{F}_X(x)\geq\lambda}\, dx}_{\bar{F}_X^{-1}(\lambda) = q_X(\lambda)} \underbrace{\int_0^\infty \mathbb{1}_{\bar{F}_Y(y)\geq\lambda}\, dy}_{q_Y(\lambda)}} d\lambda ,$$

$$= \int_0^1 q_X(\lambda)\, q_Y(\lambda)\, d\lambda .$$

Cette borne est atteinte en prenant $U_X = F_X(X) \sim \mathcal{U}([0,1])$

$$\mathbb{E}\left(q_X(U_X)\, q_Y(U_X)\right) = \int_0^1 q_X(\lambda)\, q_Y(\lambda)\, d\lambda . \qquad \square$$

Pour les mesures convexes invariantes en loi, nous avons un résultat de représentation plus précis.

<u>Théorème</u> : Soit $\rho : L^\infty \to \mathbb{R}$ une mesure de risque convexe et invariante en loi qui admet la représentation : $\rho(X) = \sup_{Q\in\mathcal{M}_1(P)} \mathbb{E}_Q[-X] - \alpha_{min}(Q)$, $X\in L^\infty$.

(ρ est s.c.i. r. à $\sigma(L^\infty, L^1)$ ou ρ admet la propriété de Fatou.)

hypothèse superflue en fait car une mesure convexe invariante en loi satisfait automatiquement la propriété de Fatou (Jouini/Schachermayer/Touzi)

Alors, $$\rho(X) = \sup_{Q\in\mathcal{M}_1(P)} \int_0^1 q_{-X}(\lambda)\, q_{\frac{dQ}{dP}}(\lambda)\, d\lambda - \alpha_{min}(Q)$$

où $$\alpha_{min}(Q) = \sup_{X\in\mathcal{A}_\rho} \int_0^1 q_{-X}(\lambda)\, q_{\frac{dQ}{dP}}(\lambda)\, d\lambda = \sup_{X\in L^\infty}\left[\int_0^1 q_{-X}(\lambda)\, q_{\frac{dQ}{dP}}(\lambda)\, d\lambda - \rho(X)\right]$$

× <u>Preuve</u> $\alpha_{min}(Q) = \sup_{X\in\mathcal{A}_\rho} \mathbb{E}_Q[-X]$ On note $X' = \frac{dQ}{dP} \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$

$$= \sup_{X\in\mathcal{A}_\rho} \mathbb{E}(-XX') = \sup_{X\in\mathcal{A}_\rho} \sup_{\tilde{X}\overset{loi}{=}X} \mathbb{E}\left[-\tilde{X}X'\right] = \sup_{X\in\mathcal{A}_\rho} \int_0^1 q_{-X}(\lambda)\, \underbrace{q_{X'}(\lambda)}_{\text{ne dépend que de la loi de } X'}\, d\lambda$$ par le lemme précédent.

Ainsi si Q et Q' sont deux probas t.q. $\frac{dQ}{dP} \overset{loi}{=} \frac{dQ'}{dP}$, $\alpha_{min}(Q) = \alpha_{min}(Q')$.

On a déjà vu que $\alpha_{min}(Q) = \sup_{X \in L^\infty} \left[\mathbb{E}_Q[-X] - \rho(X)\right]$, ce qui donne par le même argument la seconde formule : $\alpha_{min}(Q) = \sup_{X \in L^\infty} \int_0^1 q_{-X}(\lambda) q_{X'}(\lambda) d\lambda - \rho(X)$

Ainsi, $\rho(X) = \sup_{Q \in \mathcal{M}_1(\mathbb{P})} \mathbb{E}_Q[-X] - \alpha_{min}(Q)$ si $Q \in \mathcal{M}_1(\mathbb{P})$

$$= \sup_{Q \in \mathcal{M}_1(\mathbb{P})} \sup_{\underbrace{\frac{d\tilde{Q}}{d\mathbb{P}}}_{\tilde{X}'} \overset{loi}{=} \underbrace{\frac{dQ}{d\mathbb{P}}}_{X'}} \mathbb{E}_{\tilde{Q}}[-X] - \alpha_{min}(Q)$$

$$= \sup_{Q \in \mathcal{M}_1(\mathbb{P})} \sup_{\tilde{X}' \overset{loi}{=} \frac{dQ}{d\mathbb{P}} = X'} \mathbb{E}[-X\tilde{X}'] - \alpha_{min}(Q)$$

$$= \sup_{Q \in \mathcal{M}_1(\mathbb{P})} \left[\int_0^1 q_{-X}(\lambda) q_{X'}(\lambda) d\lambda - \alpha_{min}(Q)\right]$$

$X' = \frac{dQ}{d\mathbb{P}}$

Nota : Avec cette preuve, on voit facilement que ρ est invariante en loi ssi $\alpha(Q)$ est "invariante en loi" i.e $\alpha(Q) = \alpha(\hat{Q})$ pour $\frac{dQ}{d\mathbb{P}} \overset{L}{=} \frac{d\hat{Q}}{d\mathbb{P}}$

<u>Corollaire</u> Si ρ est une mesure de risque convexe invariante en loi,

$$\rho(X) = \sup_{\mu \in \underbrace{\mathcal{M}_1(]0,1])}_{\text{mesures de proba sur }]0,1]}} \left(\int_{]0,1]} AVaR_\lambda(X) \mu(d\lambda) - \beta_{min}(\mu) \right)$$

où $$\beta_{min}(\mu) = \sup_{X \in \mathcal{A}_\rho} \int_{]0,1]} AVaR_\lambda(X) \mu(d\lambda)$$

En particulier, si ρ est cohérente, $\rho(X) = \sup_{\substack{\mu \in \mathcal{M}_1(]0,1]) \\ \beta_{min}(\mu) < \infty}} \int_{]0,1]} AVaR_\lambda(X) \mu(d\lambda)$

on fait porter le $-$ sur X' et pas X.

Preuve : On remarque que $\sup_{\tilde{X} \overset{loi}{=} X} \mathbb{E}[-\tilde{X} X'] = \sup_{\tilde{X} \overset{loi}{=} X} \mathbb{E}[\tilde{X}(-X')]$

$$= \int_0^1 q_X(\lambda)\, q_{-X'}(\lambda)\, d\lambda .$$

Ainsi, pour $Q \in \mathcal{M}_1(\mathbb{P})$, $X' = \frac{dQ}{d\mathbb{P}}$ on a

$$\int_0^1 q_X^+(\lambda)\, q_{-X'}^+(\lambda)\, d\lambda = \int_0^1 VaR_\lambda(X) \underbrace{-q^+_{-X'}(\lambda)\, d\lambda}$$

fonction décroissante et ≥ 0 car $-X' \leq 0$

elle est également C^0 à droite et limitée à gauche.

idée : on définit ν sur les cubes $]a,b]$ $0 \leq a < b \leq 1$ qui s'étend sur la tribu engendrée par ces intervalles, $\mathcal{B}(]0,1])$... $\nu(]a,b]) = -q_X^+(b) + q_X^+(a)$

$\rightsquigarrow \exists\, \nu_Q$ mesure sur $(0,1]$ t.q. $-q^+_{-X'}(\lambda) = \nu(]\lambda, 1])$ $\forall \lambda \in]0,1[$

(cf thm 5.4 p54 du Revuz)

$$= \int_0^1 VaR_\lambda(X)\, \nu_Q(]\lambda, 1])\, d\lambda$$

$$= \int_0^1 \int_0^1 VaR_\lambda(X)\, \mathbb{1}_{x > \lambda}\, \nu_Q(dx)\, d\lambda$$

$$\overset{\text{Fubini}}{=} \int_0^1 \underbrace{\int_0^x VaR_\lambda(X)\, d\lambda}_{AVaR_x(X) \times x}\, \nu_Q(dx) = \int_0^1 AVaR_x(X)\, x\, \nu_Q(dx)$$

$$= \int_{]0,1]} AVaR_x(X)\, \mu_Q(dx)$$

On pose $\mu_Q(dx) = x\, \nu_Q(dx)$

On a $\int_{]0,1]} x\, \nu_Q(dx) = \int_0^1 \int_0^1 \mathbb{1}_{u<x}\, \nu_Q(dx)\, du$

$$= \int_0^1 \nu_Q(]u, 1])\, du = -\int_0^1 q^+_{-X'}(u)\, du$$

$$= -\mathbb{E}(-X') = 1.$$

$q^+_{-X'}(U) \overset{loi}{=} -X'$ si $U \sim \mathcal{U}([0,1])$

si bien que $\mu_Q \in \mathcal{M}_1(]0,1])$.

Ainsi $\alpha_{min}(Q) = \sup_{X \in \mathcal{A}_\rho} \int_0^1 q_{-X}(\lambda)\, q_{X'}(\lambda)\, d\lambda = \sup_{X \in \mathcal{A}_\rho} \int_0^1 AVaR_\lambda(X)\, \mu_Q(d\lambda) = \beta_{min}(\mu_Q)$

et $$\boxed{\rho(X) = \sup_{Q \in \mathcal{M}_1(\mathbb{P})} \int_0^1 AVaR_\lambda(X)\, \mu_Q(d\lambda) - \beta_{min}(\mu_Q)}.$$

$$\leq \sup_{\mu \in \mathcal{M}(]0,1])} \int_0^1 AVaR_\lambda(X)\, \mu(d\lambda) - \beta_{min}(\mu).$$

Réciproquement, si $\mu \in \mathcal{M}(]0,1])$, on pose $\nu(dx) = \frac{\mu(dx)}{x}$ et pour $\lambda \in]0,1[$,

$-q(\lambda) = \nu(]\lambda, 1])$

$\triangleright$ On a par le calcul précédent $\int_{]0,1]} AVaR_\lambda(X)\mu(d\lambda) = \int_0^1 q_X^+(\lambda) q(\lambda) d\lambda$.

Soit $U \in L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ Uniforme sur $]0,1[$.

$$\mathbb{E}(q(U)) = \int_0^1 \nu(]u, 1]) du = \int_0^1 \int_0^1 \mathbb{1}_{x > u} \frac{\mu(dx)}{x} du$$

$$= \mu(]0,1]) = 1$$

$q_{-X'}(\lambda) = q(\lambda)$ ← quantile de $q(U)$.

En prenant $\frac{dQ}{dP} = q(U) \overset{\text{?}}{=} X'$, on a $\alpha_{min}(Q) = \sup_{X \in \mathcal{A}_\rho} \int_0^1 q_X(\lambda) q_{-X'}(\lambda) d\lambda = \sup_{X \in \mathcal{A}_\rho} \int_0^1 q_X(\lambda) q(\lambda) d\lambda = \sup_{X \in \mathcal{A}_\rho} \int AVaR_\lambda(X) \mu(d\lambda)$

$$\rho(X) \geq \sup_{\tilde{X} \overset{\text{loi}}{\sim} X} \mathbb{E}_Q[-\tilde{X}] - \alpha_{min}(Q) \geq \mathbb{E}(q_{-X}(U) q(U)) - \alpha_{min}(Q)$$

$\rho(X) = \rho(\tilde{X})$ si X suivant la loi

$$= \int_0^1 q_{-X}(\lambda) q(\lambda) d\lambda - \sup_{X \in \mathcal{A}_\rho} \int AVaR_\lambda(X) \mu(d\lambda)$$

$$= \int_{]0,1]} AVaR_\lambda(X) \mu(d\lambda) - \sup_{X \in \mathcal{A}_\rho} \int \text{———}$$

et ceci $\forall \mu \in \mathcal{M}(]0,1])$.

Donc $\rho(X) \geq \sup_{\mu \in \mathcal{M}(]0,1])} \int AVaR_\lambda(X) \mu(d\lambda) - \sup \int \text{———}$

D'où l'égalité $\square$.

Ce théorème montre le rôle important de l'AVaR : toute mesure de risque convexe invariante en loi peut être vue comme un supremum de moyennes pondérées sur les quantiles de l'AVaR et pénalisées.

Nous admettrons également le résultat suivant :

Théorème : $AVaR_\lambda$ est la plus petite mesure de risque convexe invariante en loi qui domine VaR_λ.