Chapitre 1

Mesures de risque

Version du 13/12/2006.

Ce chapitre s'inspire fortement de l'ouvrage [2].

1.1 Introduction

1.1.1 Le cadre réglementaire : Bâle II

Voir cours.

1.1.2 Pas de risque dans un marché complet

Voir cours.

1.1.3 Que faire dans un marché incomplet

Voir cours.

1.2 Mesures de risque

Soit $(\Omega, \mathcal{F})$ un espace mesurable. Soit X une fonction mesurable à valeurs réelles définie sur Ω. Pour un scénario $\omega \in \Omega$, la position $X(\omega)$ s'interprète comme une **perte** (si $X(\omega) < 0$, alors $-X(\omega)$ s'interprète comme un gain).

On note L^∞ l'ensemble des positions X telles que $\|X\|_\infty = \sup_{\omega\in\Omega} |X(\omega)|$ est fini. Soit ρ une fonction définie sur $\mathcal{X} \subset L^\infty$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Pour une position X, $\rho(X)$ s'interprète comme le montant des fonds propres exigés associé à cette position.

Exemple 1.2.1. On peut considérer :
- $\rho_{max}(X) = \sup_{\omega\in\Omega} X(\omega)$,
- $\rho(X) = \sup_{\mathbb{P}\in\mathcal{P}} \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X]$, où $\mathcal{P}$ est un ensemble de probabilités sur $(\Omega, \mathcal{F})$,
- "Value at risk" : $\mathrm{VaR}_\alpha(X)$ le quantile d'ordre α de X pour une probabilité $\mathbb{P}$ sur $(\Omega, \mathcal{F})$ donnée.

$\Diamond$

Définition 1.2.2. *On dit que ρ est une mesure de risque monétaire si :*
- *ρ est croissante : $X \geq Y \Rightarrow \rho(X) \geq \rho(Y)$.*
- *invariante par translation : $\rho(X + m) = \rho(X) + m$ pour tout $m \in \mathbb{R}$.*

Lemme 1.2.3. *Toute mesure de risque monétaire vérifie : $|\rho(X) - \rho(Y)| \leq \|X - Y\|_\infty$.*

Démonstration. $X \leq Y + \|X-Y\|_\infty \Rightarrow \rho(X) \leq \rho(Y) + \|X-Y\|_\infty$. □

Définition 1.2.4. *On dit que ρ est convexe si pour tout $\theta \in [0,1]$ $\rho(\theta X + (1-\theta)Y) \leq \theta\rho(X) + (1-\theta)\rho(Y)$.*

Définition 1.2.5. *On dit que ρ est positivement homogène si $\rho(\lambda X) = \lambda\rho(X)$ pour tout $\lambda \geq 0$. Une mesure de risque monétaire convexe positivement homogène est dite cohérente.*

Lemme 1.2.6. *Si ρ est une mesure de risque monétaire positivement homogène, alors elle est convexe si et seulement si elle est sous additive ($\rho(X+Y) \leq \rho(X) + \rho(Y)$).*

Démonstration. Élémentaire. □

1.3 Exemples

La mesure de risque ρ_{max} est cohérente. C'est la mesure de risque cohérente la plus conservatrice (si η est une mesure de risque cohérente alors $\eta(X) \leq \rho_{max}(X)$).

La mesure de risque $\rho(X) = \sup_{\mathrm{P}\in\mathcal{P}} \mathbb{E}_{\mathrm{P}}[X]$, où $\mathcal{P}$ est un ensemble de probabilités sur $(\Omega, \mathcal{F})$, est cohérente.

La mesure de risque $\mathrm{VaR}_\alpha(X)$ est une mesure de risque monétaire positivement homogène. En général elle n'est pas convexe (et donc elle n'est pas en général sous-additive).

Exercice 1.3.1. Soit $\mathcal{X}$ un espace gaussien (i.e. pour tout $n \geq 1$, $X_1, \ldots, X_n \in \mathcal{X}$, alors $(X_1, \ldots, X_n)$ est un vecteur gaussien). Montrer que VaR_α est une mesure de risque cohérente si $\alpha \geq 1/2$. ♦

1.4 Positions acceptables

Une position X est acceptable si $\rho(X) \leq 0$ (elle ne nécessite pas de fond propre). On pose $\mathcal{A}_\rho = \{X \in \mathcal{X}; \rho(X) \leq 0\}$.

Proposition 1.4.1. *Soit ρ une mesure de risque monétaire.*

1. *$\mathcal{A}_\rho \neq \emptyset$; $\sup\{m \in \mathbb{R}; m \in \mathcal{A}_\rho\} < \infty$; si $X \in \mathcal{A}_\rho$ alors $Y \leq X$ implique $Y \in \mathcal{A}_\rho$.*
2. *$\{\lambda \in [0,1]; \lambda X + (1-\lambda)Y \in \mathcal{A}_\rho\}$ est un fermé de $[0,1]$ (éventuellement vide).*
3. *$\rho(X) = \inf\{m \in \mathbb{R}; X - m \in \mathcal{A}_\rho\}$ ($\rho(X)$ est le plus petit capital m tel que $X - m$ soit acceptable).*
4. *ρ convexe implique $\mathcal{A}_\rho$ convexe.*
5. *ρ positivement homogène implique $\mathcal{A}_\rho$ est un cône positif.*
6. *ρ cohérente implique $\mathcal{A}_\rho$ est un cône positif convexe.*

Démonstration. Voir cours. □

On peut définir une mesure de risque à partir d'un ensemble de positions acceptables. Soit $\mathcal{A} \subset \mathcal{X}$. On pose pour $X \in \mathcal{X}$: $\rho_{\mathcal{A}}(X) = \inf\{m \in \mathbb{R}; X - m \in \mathcal{A}\}$.

Lemme 1.4.2. *On a $\rho_{\mathcal{A}_\rho} = \rho$.*

Démonstration. Évident. □

Remarquons que

$$X \in \mathcal{A} \Rightarrow \rho_{\mathcal{A}}(X) \leq 0. \tag{1.1}$$

Proposition 1.4.3. *Supposons que $\mathcal{A}$ satisfait 1. de la proposition 1.4.1. Alors on a :*

1. *$\rho_{\mathcal{A}}$ est une mesure de risque monétaire.*
2. *$\mathcal{A}$ est convexe implique $\rho_{\mathcal{A}}$ est convexe.*

3. *$\mathcal{A}$ est un cône positif implique $\rho_{\mathcal{A}}$ est positivement homogène.*
4. *$\mathcal{A}$ est un cône convexe positif implique $\rho_{\mathcal{A}}$ est cohérente.*
5. *$\mathcal{A} \subset \mathcal{A}_{\rho_{\mathcal{A}}}$ avec égalité si 2. de la proposition 1.4.1 est vérifié.*

Démonstration. Voir cours. □

Exemple 1.4.4. On a
- $\mathcal{A}_{\rho_{max}} = \{X; X \leq 0\}$.
- $\mathcal{A}_{\mathrm{VaR}_\alpha} = \{X; \mathbb{P}(X \leq 0) \geq \alpha\}$.
- Soit $\mathcal{P}$ une famille de probabilités sur $(\Omega, \mathcal{F})$ et $c : \mathcal{P} \to \mathbb{R}$ telle que $\inf_{\mathrm{P} \in \mathcal{P}} c(\mathrm{P}) > -\infty$. Soit $\mathcal{A} = \{X; \mathbb{E}_{\mathrm{P}}[X] \leq c(\mathrm{P})\}$, alors $\rho_{\mathcal{A}}$ est une mesure de risque monétaire convexe, et on a $\rho_{\mathcal{A}}(X) = \sup_{\mathrm{P} \in \mathcal{P}}(\mathbb{E}_{\mathrm{P}}[X] - c(\mathrm{P}))$. La mesure de risque est cohérente si $c(\mathrm{P}) = 0$ pour tout $\mathrm{P} \in \mathcal{P}$.

◊

1.5 Représentation des mesures de risque

1.5.1 Mesures sur $(\Omega, \mathcal{F})$

On note $\mathcal{M}_{1,f}$ l'ensemble des mesures sur $(\Omega, \mathcal{F})$ positives finiment additives de masse totale 1 et $\mathcal{M}_1$ le sous ensemble de $\mathcal{M}_{1,f}$ des mesures qui sont σ-additives. L'ensemble $\mathcal{M}_1$ est l'ensemble des probabilités sur $(\Omega, \mathcal{F})$.

En général $\mathcal{M}_{1,f}$ n'est pas égal à $\mathcal{M}_1$.

Soit $F = \sum_{i \in I} \alpha_i \mathbf{1}_{A_i}$ où I est fini et $\alpha_i \in \mathbb{R}$ et $A_i \in \mathcal{F}$ pour $i \in I$. Pour $\mu \in \mathcal{M}_{1,f}$, on pose $\mu(F) = \sum_{i \in I} \alpha_i \mu(A_i)$. Remarquons que $\mu(F)$ ne dépend pas du choix de I fini et de α_i et A_i pour $i \in I$. On a $|\mu(F)| \leq \|F\|_\infty$. L'application $F \to \mu(F)$ est linéaire, continue et définie sur l'ensemble des fonctions prenant un nombre fini de valeurs différentes. Il existe une unique extension linéaire continue de μ sur L^∞. Ceci permet de définir "l'espérance" par rapport à une mesure positive finiment additive de masse totale 1. Elle sera noté $\mathbb{E}_\mu$ (comme l'espérance usuelle).

1.5.2 Formule de représentation

Théorème 1.5.1. *Soit J définie sur $\mathcal{X} \subset L^\infty$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ telle que J est croissante ($X \leq Y \Rightarrow J(X) \leq J(Y)$), concave, positivement homogène et invariante par translation. Alors il existe $\mathcal{P}_f \subset \mathcal{M}_{1,f}$ tel que $J(X) = \inf_{\mathrm{Q} \in \mathcal{P}_f} \mathbb{E}_{\mathrm{Q}}[X]$. De plus $\mathcal{P}_f$ peut être choisi convexe et tel que l'infimum soit atteint.*

Démonstration. Voir cours. □

Corollaire 1.5.2. *Soit ρ une mesure cohérente. Alors il existe $\mathcal{P}_f \subset \mathcal{M}_{1,f}$ tel que*

$$\rho(X) = \sup_{\mathrm{Q} \in \mathcal{P}_f} \mathbb{E}_{\mathrm{Q}}[X].$$

De plus $\mathcal{P}_f$ peut être choisi convexe et tel que le supremum soit atteint.

Démonstration. Appliquer le théorème 1.5.1 avec $J(X) = -\rho(-X)$. □

On admet le résultat délicat suivant.

Théorème 1.5.3. *Soit ρ une mesure de risque monétaire convexe. Alors il existe une fonction de pénalité c_{min} définie sur $\mathcal{M}_{1,f}$ à valeurs dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ telle que*

$$\rho(X) = \max_{\mathrm{Q} \in \mathcal{M}_{1,f}} \left[\mathbb{E}_{\mathrm{Q}}[X] - c_{min}(Q)\right],$$

et $c_{min}(Q) = \sup_{X \in \mathcal{A}_\rho} \mathbb{E}_{\mathrm{Q}}[X]$ pour $\mathrm{Q} \in \mathcal{M}_{1,f}$.

Remarque 1.5.4. Toute fonction de pénalité c telle que $\rho(X) = \max_{Q\in\mathcal{M}_{1,f}} [\mathbb{E}_Q[X] - c(Q)]$ vérifie $c(Q) \geq c_{min}(Q)$. $\Diamond$

Corollaire 1.5.5. *Pour une mesure de risque cohérente, c_{min} prend ses valeurs dans $\{0, \infty\}$.*

Démonstration. Soit $\lambda > 0$. On a

$$c_{min}(\mathrm{Q}) = \sup_{X\in\mathcal{A}_\rho} \mathbb{E}_\mathrm{Q}[X] = \sup_{\lambda X\in\mathcal{A}_\rho} \mathbb{E}_\mathrm{Q}[\lambda X] = \lambda c_{min}(\mathrm{Q}).$$

$\square$

Proposition 1.5.6. *Soit $(\rho_i, i \in I)$ est une famille de mesures de risque monétaires convexes de fonction de pénalité respective c_i. Si $\sup_{i\in I} \rho_i(0) < \infty$, alors $\rho(X) = \sup_{i\in I} \rho_i(X)$ définit une mesure de risque monétaire convexe avec fonction de pénalité $c(\mathrm{Q}) = \inf_{i\in I} c_i(\mathrm{Q})$.*

Démonstration. Élémentaire. $\square$

1.5.3 Passer des mesures finiment additives aux mesures σ-additives

Le lemme suivant est admis.

Lemme 1.5.7. *Soit ρ une mesure de risque monétaire convexe.*

1. *On suppose $\rho(X) = \sup_{\mathrm{P}\in\mathcal{M}_1}[\mathbb{E}_\mathrm{P}[X] - c(\mathrm{P})]$. Si $X_n \uparrow X$ (i.e. $X_n \to X$ et $X_n \leq X_{n+1}$ pour $n \geq 1$), alors on a $\rho(X_n) \uparrow \rho(X)$.*
2. *Si pour tout $X_n \downarrow X$ on a $\rho(X_n) \downarrow \rho(X)$ alors toute fonction de pénalité associée à ρ vérifie $c(\mathrm{Q}) < \infty \Rightarrow \mathrm{Q} \in \mathcal{M}_1$.*

Soit $\mathbb{P}$ une probabilité définie sur $(\Omega, \mathcal{F})$. On dit qu'une probabilité P est absolument continue par rapport à $\mathbb{P}$ si et seulement si $\mathbb{P}(A) = 0$ implique $\mathrm{P}(A) = 0$. (Ceci est équivalent à dire qu'il existe $Z \in L^1(\mathbb{P})$, tel que $Z \geq 0$ $\mathbb{E}_\mathbb{P}[Z] = 1$ et pour tout $X \in L^\infty$, $\mathbb{E}_\mathrm{P}[X] = \mathbb{E}_\mathbb{P}[ZX]$. La variable Z est la dérivée de Radon-Nikodym de P par rapport à $\mathbb{P}$, on la note $Z = \dfrac{d\mathrm{P}}{d\mathbb{P}}$.)

Lemme 1.5.8. *Supposons que $X = Y$ $\mathbb{P}$-p.s. implique $\rho(X) = \rho(Y)$. Alors, on a $c(\mathrm{P}) = \infty$ pour toute probabilité P qui n'est pas absolument continue par rapport à $\mathbb{P}$.*

Démonstration. Supposons que la probabilité P ne soit pas absolument continue par rapport à $\mathbb{P}$. Il existe $A \in \mathcal{F}$ tel que $\mathbb{P}(A) = 0$ et $\mathrm{P}(A) > 0$. Soit $X \in \mathcal{A}_\rho$. On considère $X_n = X + n\mathbf{1}_A$. On a $\rho(X_n) = \rho(X)$ et donc $c(\mathrm{P}) \geq c_{min}(\mathrm{P}) \geq \mathbb{E}_\mathrm{P}[X] + n\mathrm{P}(A)$. $\square$

Les théorèmes suivants sont admis. Soit $\mathcal{M}_1(\mathbb{P})$ l'ensemble des probabilités absolument continues par rapport à $\mathbb{P}$.

Théorème 1.5.9. *Soit ρ une mesure de risque monétaire convexe définie sur $\mathcal{X} = L^\infty(\mathbb{P})$ (i.e. $X = Y$ $\mathbb{P}$-p.s. implique $\rho(X) = \rho(Y)$). Les assertions suivantes sont équivalentes.*

1. *ρ peut être représenté par une fonction de pénalité sur $\mathcal{M}_1(\mathbb{P})$.*
2. *ρ peut être représenté par la restriction de la fonction de pénalité minimale sur $\mathcal{M}_1(\mathbb{P})$: $\rho(X) = \sup_{\mathrm{P}\in\mathcal{M}_1(\mathbb{P})}[\mathbb{E}_\mathrm{P}[X] - c_{min}(\mathrm{P})]$.*
3. *ρ est continue par dessous : si $X_n \uparrow X$, alors on a $\rho(X_n) \uparrow \rho(X)$.*
4. *ρ a la propriété de Fatou : si $X_n \to X$ $\mathbb{P}$-p.s. et si la suite $(X_n, n \geq 1)$ est bornée, alors $\rho(X) \leq \liminf_{n\to\infty} \rho(X_n)$.*
5. *$\mathcal{A}_\rho$ est faiblement-* fermé dans $L^\infty(\mathbb{P})$: si $X_n \in \mathcal{A}_\rho \subset L^\infty(\mathbb{P})$, pour tout $n \geq 1$ et $X \in L^\infty(\mathbb{P})$ tel que pour tout $Y \in L^1(\mathbb{P})$ on a $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[X_nY] = \mathbb{E}[XY]$, alors $X \in \mathcal{A}_\rho$.*

Théorème 1.5.10. *Une mesure de risque monétaire cohérente, ρ, définie sur $\mathcal{X} = L^\infty(\mathbb{P})$ peut être représentée par $\rho(X) = \sup_{\mathrm{P}\in\mathcal{P}} \mathbb{E}_{\mathrm{P}}[X]$ avec $\mathcal{P} \subset \mathcal{M}_1(\mathbb{P})$ si et seulement si les conditions équivalentes du théorème précédent sont satisfaites. On peut remplacer $\mathcal{P}$ par l'ensemble maximal $\mathcal{P}_{max} = \{\mathrm{P} \in \mathcal{M}_1(\mathbb{P}); c_{min}(\mathrm{P}) = 0\}$.*

Une mesure de risque monétaire cohérente, ρ, est pertinente (i.e. $\rho(\mathbf{1}_A) > \rho(0)$ pour tout A tel que $\mathbb{P}(A) > 0$) si et seulement si pour tout $\mathrm{P} \in \mathcal{P}_{max}$ on a $\mathbb{P}$ est absolument continue par rapport à P.

Exemple 1.5.11. On pose $\mathcal{P}_\lambda = \left\{\mathrm{P} \in \mathcal{M}_1(\mathbb{P}); \frac{d\mathrm{P}}{d\mathbb{P}} \leq \frac{1}{\lambda}\right\}$ pour $\lambda \in]0,1[$. Les mesures de risques suivantes définies sur $L^\infty(\mathbb{P})$ sont cohérentes :

- "Average Var" : $\mathrm{AVaR}_\alpha(X) = \sup\{\mathbb{E}_{\mathrm{P}}[X]; \mathrm{P} \in \mathcal{P}_{1-\alpha}\}$.
- "Worst conditional expectation" : $WCE_\alpha(X) = \sup\{\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X|A]; A \in \mathcal{F}, \quad \mathbb{P}(A) \geq 1-\alpha\}$.

$\diamondsuit$

1.6 Retour sur la VaR_α

On a vu que la VaR_α est une mesure de risque monétaire positivement homogène qui n'est en général pas convexe. On cherche une mesure de risque monétaire convexe ou cohérente la "plus" proche de VaR_α. On note $\mathbb{E}$ pour $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}$. Soit $X \in L^\infty(\mathbb{P})$. On note F sa fonction de répartition et F^{-1} l'inverse généralisé continu à gauche de F (voir paragraphe 1.7).

Proposition 1.6.1. *Soit $\alpha \in]0,1[$. On a*

$$\mathrm{VaR}_\alpha(X) = \min\{\rho(X); \quad \rho \textit{ cohérente continue par dessous telle que } \rho \geq \mathrm{VaR}_\alpha\};$$

Démonstration. Soit $x = \mathrm{VaR}_\alpha(X) = F^{-1}(\alpha)$. On a $\mathbb{P}(X \leq x) = F(F^{-1}(\alpha)) \geq \alpha$. Soit A tel que $\mathbb{P}(A) > 1-\alpha$. On a $\mathbb{P}(A, X \leq x) > 0$. On définit $\mathrm{P}_A(\cdot) = \mathbb{P}(\cdot|A, X \leq x)$. On a $\mathbb{E}_{\mathrm{P}_A}[X] \leq x$.

D'autre part ρ définie par $\rho(Y) = \sup_{\mathrm{P}\in\mathcal{P}} \mathbb{E}_{\mathrm{P}}[X]$, où $\mathcal{P} = \{\mathrm{P}_A; \mathbb{P}(A) > 1-\alpha\}$ est cohérente. On a $\rho(X) \leq x$.

On vérifie que $\rho \geq \mathrm{VaR}_\alpha$. Soit $\varepsilon > 0$ et $Y \in L^\infty(\mathbb{P})$. On pose $A = \{Y \geq \mathrm{VaR}_\alpha(Y) - \varepsilon\}$ de sorte que $\mathbb{P}(A) > 1-\alpha$. On a $\rho(Y) \geq \mathbb{E}_{\mathrm{P}_A}[Y] \geq \mathrm{VaR}_\alpha(Y) - \varepsilon$. Le choix de ε étant arbitraire, on a $\rho(Y) \geq \mathrm{VaR}_\alpha(Y)$.

$\square$

On définit la valeur en risque moyenne ("Average Value At Risk")

$$\mathrm{AVaR}_\alpha(X) = \frac{1}{1-\alpha}\int_\alpha^1 \mathrm{VaR}_r(X)\, dr = \frac{1}{1-\alpha}\int_\alpha^1 F^{-1}(r)\, dr.$$

La valeur en risque moyenne est parfois appelée valeur en risque conditionnelle ("Conditional Value at Risk") ou perte moyenne ("Expected shortfall").

Proposition 1.6.2. *On note $x = \mathrm{VaR}_\alpha(X) = F^{-1}(\alpha)$, $z^+ = \max(z, 0)$. On a*

$$\begin{aligned}
\mathrm{AVaR}_\alpha(X) &= \frac{1}{1-\alpha}\mathbb{E}[(X-x)^+] + x \\
&= \frac{1}{1-\alpha}\mathbb{E}[(X-y)^+] + y \textit{ pour tout } y \textit{ t.q. } F(y) = \alpha \textit{ si } \{z; F(z) = \alpha\} \neq \emptyset \textit{ (i.e. } F(x) = \alpha) \\
&= \frac{1}{1-\alpha}\inf_{s\in\mathbb{R}}\left(\mathbb{E}[(X-s)^+] + (1-\alpha)s\right).
\end{aligned}$$

Démonstration. Soit U une variable aléatoire de loi uniforme. On rappelle que $F^{-1}(U)$ a même loi que X. On a

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[(X-s)^+]+(1-\alpha)s &= \mathbb{E}[(F^{-1}(U)-s)^+]+(1-\alpha)s \\ &= \int_0^1 (F^{-1}(r)-s)\mathbf{1}_{\{F^{-1}(r)>s\}}\,dr+(1-\alpha)s \\ &= \int_0^1 (F^{-1}(r)-s)\mathbf{1}_{\{r>F(s)\}}\,dr+(1-\alpha)s \\ &= \int_\alpha^1 F^{-1}(r)\,dr+\int_{F(s)}^\alpha F^{-1}(r)\,dr - s\int_{F(s)}^1 dr + s\int_\alpha^1 dr \\ &= \int_\alpha^1 F^{-1}(r)\,dr+\int_{F(s)}^\alpha (F^{-1}(r)-s)\,dr,\end{aligned}$$

où l'on a utilisé $\{F^{-1}(r)>s\}=\{r>F(s)\}$ pour la troisième égalité. On pose $I=\int_{F(s)}^\alpha (F^{-1}(r)-s)\,dr$.

- Si $\alpha>F(s)$, on a $r>F(s)$ (i.e. $F^{-1}(r)>s$) pour $r\in]F(s),\alpha[$ et donc $I>0$.
- Si $\alpha\leq F(s)$, on a $r\leq F(s)$ (i.e. $F^{-1}(r)\leq s$) pour $r\in]\alpha,F(s)[$ et donc $I\geq 0$.
- Si $s=F^{-1}(\alpha)$, on a $F(s)\geq\alpha$ et pour tout $r\in[\alpha,F(s)]$, $F^{-1}(r)=s$, soit $I=0$.

On en déduit que $\inf_{s\in\mathbb{R}}\left(\mathbb{E}[(X-s)^+]+(1-\alpha)s\right)$ est atteint pour $s=F^{-1}(\alpha)$. Pour tout y tel que $F(y)=\alpha$ le minimum est également atteint.

□

Théorème 1.6.3. *Soit $\alpha\in(0,1)$. AVaR_α est une mesure de risque cohérente. Elle coïncide avec la définition de l'exemple 1.5.11 : $\mathrm{AVaR}_\alpha=\sup\{\mathbb{E}_{\mathrm{P}}[X];\mathrm{P}\in\mathcal{P}_{1-\alpha}\}$, où $\mathcal{P}_\lambda=\left\{\mathrm{P}\in\mathcal{M}_1(\mathbb{P});\frac{d\mathrm{P}}{d\mathbb{P}}\leq\frac{1}{\lambda}\right\}$.*

Démonstration. Soit $\frac{1}{1-\alpha}\geq Z\geq 0$ tel que $\mathbb{E}[Z]=1$. On montre dans un premier temps que $\mathrm{AVaR}_\alpha(X)\geq\mathbb{E}_{\mathrm{P}}[X]$ où $d\mathrm{P}/d\mathbb{P}=Z$. On a, avec $x=F^{-1}(\alpha)$,

$$\begin{aligned}\mathrm{AVaR}_\alpha(X)-\mathbb{E}_{\mathrm{P}}[X] &= \frac{1}{1-\alpha}\left[\mathbb{E}[(X-x)\mathbf{1}_{\{X\geq x\}}]+(1-\alpha)x-(1-\alpha)\mathbb{E}[ZX]\right] \\ &= \frac{1}{1-\alpha}\mathbb{E}\left[(X-x)\mathbf{1}_{\{X\geq x\}}+(x-X)(1-\alpha)Z\right] \\ &= \frac{1}{1-\alpha}\mathbb{E}\left[(X-x)(\mathbf{1}_{\{X\geq x\}}-(1-\alpha)Z)\right]. \qquad (1.2)\end{aligned}$$

Comme $(X-x)(\mathbf{1}_{\{X\geq x\}}-(1-\alpha)Z)\geq 0$, on en déduit que $\mathrm{AVaR}_\alpha(X)\geq\mathbb{E}_{\mathrm{P}}[X]$.

On montre maintenant l'égalité. Si $\mathbb{P}(X=x)=0$, on a $\mathbb{P}(X>x)=1-\alpha$. Si $\mathbb{P}(X=x)>0$, on a $\mathbb{P}(X\leq x)>\alpha\geq\mathbb{P}(X<x)$ et

$$1-\alpha-\mathbb{P}(X=x)\leq\mathbb{P}(X>x)<1-\alpha.$$

On en déduit qu'il existe $c\in[0,1]$ tel que $\mathbb{P}(X>x)+c\mathbb{P}(X=x)=1-\alpha$. On pose $Z_*=\frac{1}{1-\alpha}\mathbf{1}_{\{X>x\}}+\frac{c}{1-\alpha}\mathbf{1}_{\{X=x\}}$ de sorte que $0\leq Z_*\leq\frac{1}{1-\alpha}$ et $\mathbb{E}[Z_*]=1$. On a, en utilisant (1.2), que $\mathrm{AVaR}_\alpha(X)-\mathbb{E}[Z_*X]=0$. Ceci assure que $\mathrm{AVaR}_\alpha(X)=\sup\{\mathbb{E}_{\mathrm{P}}[X];\mathrm{P}\in\mathcal{P}_{1-\alpha}\}$.

Cette dernière expression assure que AVaR_α est une mesure de risque cohérente. □

Remarque 1.6.4. On peut montrer que AVaR_α est continue par dessus ($X_n\downarrow X\Rightarrow\mathrm{AVaR}_\alpha(X_n)\downarrow\mathrm{AVaR}_\alpha(X)$). ♢

On rappelle la définition de la mesure de risque de la "pire espérance conditionnelle" WCE_α ("Worst conditional expectation"), voir exemple 1.5.11) :

$$WCE_\alpha(X) = \sup\{\mathbb{E}[X|A]; A \in \mathcal{F} \quad \mathbb{P}(A) \geq 1-\alpha\}.$$

Proposition 1.6.5. *On a*

$$\mathrm{AVaR}_\alpha(X) \geq WCE_\alpha(X) \geq \mathbb{E}[X|X \geq \mathrm{VaR}_\alpha(X)] \geq \mathrm{VaR}_\alpha(X).$$

Les deux premières inégalités sont des égalités si $\mathbb{P}(X \geq \mathrm{VaR}_\alpha(X)) = 1-\alpha$.

Démonstration. La mesure $WCE_\alpha(X)$ est le supremum de $\mathbb{E}_{\mathrm{P}}[X]$ pour P tel que $\frac{d\mathrm{P}}{d\mathbb{P}} = \frac{1}{\mathbb{P}(A)}\mathbf{1}_A \leq \frac{1}{1-\alpha}$. On en déduit la première inégalité.

Soit $x = F^{-1}(\alpha) = \mathrm{VaR}_\alpha(X)$. Soit $\varepsilon > 0$. On a $\mathbb{P}(X \geq x-\varepsilon) > 1-\alpha$ et donc $WCE_\alpha(X) \geq \mathbb{E}[X|X \geq \mathrm{VaR}_\alpha(X)-\varepsilon]$. On obtient la deuxième inégalité en faisant tendre ε vers 0. La dernière inégalité est évidente.

De plus on a en utilisant la proposition 1.6.2

$$\mathrm{AVaR}_\alpha(X) = \frac{1}{1-\alpha}\mathbb{E}[X\mathbf{1}_{\{X\geq x\}}] + \frac{1}{1-\alpha}x[(1-\alpha) - \mathbb{P}(X \geq x)].$$

Si $\mathbb{P}(X \geq x) = 1-\alpha$, on en déduit que les deux premières inégalités du théorème sont des égalités. □

Définition 1.6.6. *On dit que* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *est sans atome si pour tout* $A \in \mathcal{F}$ *tel que* $\mathbb{P}(A) > 0$ *il existe* $B \in \mathcal{F}$ *tel que* $B \subset A$ *et* $0 < \mathbb{P}(B) < \mathbb{P}(A)$.

On admet le résultat suivant.

Proposition 1.6.7. *Si* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *est sans atome, alors* $\mathrm{AVaR}_\alpha = WCE_\alpha$.

Définition 1.6.8. *On dit qu'une mesure de risque est invariante pour la loi si dès que* X *et* Y *ont même loi alors* $\rho(X) = \rho(Y)$.

Exercice 1.6.9. Montrer que en général la mesure de risque VaR n'est pas convexe ni continue par dessus. Montrer qu'elle est continue par dessous. ♦

On admet le résultat suivant.

Proposition 1.6.10. *On suppose* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *est sans atome.* AVaR_α *est la plus petite mesure de risque convexe, invariante pour la loi et continue par dessous qui domine* VaR_α.

1.7 Rappels sur les fonctions de répartition et les quantiles

Définition 1.1. *Soit* X *une variable aléatoire réelle. On appelle fonction de répartition de* X *la fonction* $F : \mathbb{R} \to [0,1]$ *définie par*

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) = \mathbb{P}(X \leq x).$$

Le proposition suivante regroupe des propriétés classiques de la fonction de répartition que nous ne démontrerons pas.

Proposition 1.2. *La fonction de répartition F d'une variable aléatoire réelle X est croissante, continue à droite et vérifie*

$$\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0 \quad et \quad \lim_{x\to+\infty} F(x) = 1.$$

Ensuite, la fonction de répartition caractérise la loi : si X et Y sont deux variables aléatoires réelles qui ont même fonction de répartition, alors

$$\forall f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ mesurable bornée }, \mathbb{E}[f(X)] = \mathbb{E}[f(Y)].$$

Enfin, une suite $(X_n, n \in \mathbb{N}^*)$ de variables aléatoires réelles converge en loi vers X si et seulement si, pour tout point de continuité $x \in \mathbb{R}$ de la fonction de répartition F de X, on a

$$F_n(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} F(x),$$

où F_n désigne la fonction de répartition de X_n.

Soit $x \in \mathbb{R}$ et $(X_n, n \in \mathbb{N}^*)$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes et de même loi. D'après la loi forte des grands nombres, on a p.s.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \mathbf{1}_{\{X_k \leq x\}} = \mathbb{P}(X_1 \leq x).$$

Le théorème suivant assure en fait que cette convergence est uniforme en x.

Théorème 1.3 (Glivenko-Cantelli)**.** *Soit $(X_n, n \in \mathbb{N}^*)$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes et de même loi. On a p.s.*

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}} |F_n(x) - \mathbb{P}(X_1 \leq x)| = 0,$$

où F_n, définie par

$$F_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \mathbf{1}_{\{X_k \leq x\}} = \frac{1}{n} \text{Card } \{k \in \{1, \ldots, n\} : X_k \leq x\},$$

est la fonction de répartition empirique de l'échantillon $X_1, \ldots, X_n$.

Pour la démonstration de ce résultat, nous renvoyons par exemple à [1].

Définition 1.4.

- *Soit X une variable aléatoire réelle de fonction de répartition F. Pour $p \in]0, 1]$, on appelle quantile ou fractile d'ordre p de X le nombre* $\boxed{x_p = \inf\{x \in \mathbb{R},\ F(x) \geq p\}}$ *où par convention* $\inf \emptyset = +\infty$.
- *L'application continue à gauche $p \in]0, 1[\to x_p \in \mathbb{R}$ s'appelle l'inverse généralisé de F. On la note F^{-1} : $\forall p \in]0, 1[,\ F^{-1}(p) = x_p$.*

Le résultat suivant est à la base de la méthode d'inversion de la fonction de répartition destinée à simuler des variables aléatoires réelles de fonction de répartition F.

Proposition 1.5. *Soit F une fonction de répartition et F^{-1} son inverse généralisé. Alors on a pour $p \in]0, 1[$, $F(F^{1-}(p) \geq p$ et l'équivalence*

$$F(x) \geq p \Leftrightarrow x \geq F^{-1}(p). \tag{1.3}$$

En outre, si F est continue, alors

$$\forall p \in]0, 1[,\ F(F^{-1}(p)) = p. \tag{1.4}$$

Soit X une variable aléatoire réelle de fonction de répartition F et U est une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0, 1]$. Alors, la variable $F^{-1}(U)$ a même loi que X. Et si F est continue, alors $F(X)$ suit la loi uniforme sur $[0, 1]$.

Si la fonction F est inversible de $\mathbb{R}$ dans $]0,1[$, alors elle est continue sur $\mathbb{R}$ et l'égalité (1.4) entraîne que l'inverse généralisé et l'inverse coïncident. L'intérêt de l'inverse généralisé est qu'il reste défini même lorsque F n'est pas inversible soit parce que cette fonction est discontinue soit parce qu'elle est constante sur des intervalles non vides.

Démonstration. Soit $p \in]0,1[$. Nous allons d'abord vérifier (1.3). Par définition de $x_p = F^{-1}(p)$, il est clair que si $F(x) \geq p$ alors $x \geq F^{-1}(p)$. En outre, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $y_n \leq F^{-1}(p) + \frac{1}{n}$ tel que $F(y_n) \geq p$. Par croissance de F, on a $F\left(F^{-1}(p) + \frac{1}{n}\right) \geq p$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Par continuité à droite de F, on en déduit que

$$\forall p \in]0,1[,\ F(F^{-1}(p)) \geq p. \tag{1.5}$$

Avec la croissance de F, cela implique que si $x \geq F^{-1}(p)$, alors $F(x) \geq p$, ce qui achève la démonstration de (1.3).

L'équivalence (1.3) implique que pour tout $x < F^{-1}(p)$, on a $F(x) < p$. Avec (1.5), on en déduit que si F est continue au point $F^{-1}(p)$ alors $F(F^{-1}(p)) = p$, ce qui entraîne (1.4).

Enfin, si X a pour fonction de répartition F et U est une variable aléatoire uniforme sur $[0,1]$, on a d'après (1.3)

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \mathbb{P}(F^{-1}(U) \leq x) = \mathbb{P}(U \leq F(x)) = F(x).$$

Les variables X et $F^{-1}(U)$ ont même fonction de répartition. Elles ont donc même loi. Par conséquent, $F(X)$ a même loi que $F(F^{-1}(U))$, variable aléatoire qui est égale à U avec probabilité 1 lorsque F est continue d'après (1.4). $\square$

Bibliographie

[1] A. A. Borovkov. *Mathematical statistics.* Gordon and Breach Science Publishers, Amsterdam, 1998.

[2] H. Föllmer and A. Schied. *Stochastic finance. An introduction in discrete time,* volume 27 de *de Gruyter Studies in Mathematics.* 2004.