# Espaces de Banach

## 1 Normes sur un espace vectoriel

On se donne un ev réel $V$.

**Définition 1.1.** *Une norme est une application définie sur $V$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+$, notée $\|\cdot\|_V$, et satisfaisant les trois propriétés suivantes :*
*(i)* $\|v\|_V = 0 \iff v = 0$,
*(ii)* $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall v \in V$, $\|\lambda v\|_V = |\lambda|\, \|v\|_V$,
*(iii) inégalité triangulaire :* $\forall v, w \in V$, $\|v + w\|_V \leq \|v\|_V + \|w\|_V$.

### Exemples

(a) Soit $[a, b]$ un intervalle de $\mathbb{R}$ et notons $\mathcal{C}^0([a, b])$ l'espace vectoriel constitué des fonctions continues sur $[a, b]$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$. L'application $\|\cdot\|_{\mathcal{C}^0([a,b])}$ qui à $f \in \mathcal{C}^0([a, b])$ associe

$$\|f\|_{\mathcal{C}^0([a,b])} = \sup_{t \in [a,b]} |f(t)|,$$

définit une norme sur $\mathcal{C}^0([a, b])$.

(b) sur $\mathcal{C}^0([a, b])$, on peut aussi définir une autre norme,

$$\|f\|_R = \int_a^b |f(t)| dt$$

On peut donc avoir plusieurs normes sur le même espace.

# 2 Topologie des espaces vectoriels normés

Soit $V$ un ev normé.

## 2.1 Quelques rappels

**Définition 2.1** (ouvert).

$$\textit{Un ensemble } \mathcal{O} \subset V \textit{ est ouvert dans } V \textit{ si } \forall x \in \mathcal{O}, \exists \epsilon \textit{ tel que } B(x,\epsilon) \subset \mathcal{O}$$

*avec* $B(x,\epsilon) = \{y \in V; \|x-y\|_V < \epsilon\}$ *boule ouverte de centre* $x$ *et de rayon* $\epsilon$.

**Définition 2.2** (fermé).

$$\textit{Un ensemble } \mathcal{F} \subset V \textit{ est fermé dans } V \textit{ si } V \setminus \mathcal{F} \textit{ est ouvert dans } V$$

**Définition 2.3** (convergence). *Soit* $u_n$ *une suite de* $V$. *On dit que* $u_n$ *converge vers* $l \in V$ *si*

$$\forall \epsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geq N \quad \|u_n - l\|_V \leq \epsilon$$

**Définition 2.4** (continuité d'une fonction). *Soient* $V$ *et* $W$ *deux espaces vectoriels munis respectivement des normes* $\| \ \|_V$ *et* $\| \ \|_W$, *et* $f$ *une fonction de* $V$ *dans* $W$. *Les propositions suivantes sont équivalentes :*

- $f$ *est continue de* $V$ *dans* $W$ *;*
- $\forall v_0 \in V, \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall v \in V, \|v - v_0\|_V \leq \delta \implies \|f(v) - f(v_0)\|_W \leq \epsilon$ *;*
- *pour tout* $v \in V$, *pour toute suite* $v_n$ *convergeant vers* $v$ *dans* $V$, $f(v_n)$ *converge vers* $f(v)$ *dans* $W$ *;*
- *Pour tout fermé* $O_W$ *de* $W$, *l'image réciproque de* $O_W$ *par* $f$, $f^{-1}(O_W)$, *est un fermé de* $V$ *;*
- *Pour tout fermé* $F_W$ *de* $W$, *l'image réciproque de* $F_W$ *par* $f$, $f^{-1}(F_W)$, *est un fermé de* $V$.

**Définition 2.5.** *Soit* $\mathcal{F}$ *un fermé de* $V$. *Si une suite* $x_n \in \mathcal{F}$ *converge vers* $l$, *alors* $l \in \mathcal{F}$.

## 2.2 Equivalence de normes

**Définition 2.6.** *Soit $\|.\|_{V,1}$ et $\|.\|_{V,2}$ deux normes sur $V$. On dit que ces deux normes sont équivalentes s'il existe $c_1$ et $c_2$ strictement positives telles que*

$$\forall v \in V, \qquad c_1 \|v\|_{V,2} \leq \|v\|_{V,1} \leq c_2 \|v\|_{V,2}.$$

**Exemple d'application :** si $\|.\|_{V,1}$ et $\|v\|_{V,2}$ sont deux normes équivalentes sur $V$, on a l'équivalence : $u_n$ converge vers $l$ suivant $\|.\|_{V,1}$ $<=>$ $u_n$ converge vers $l$ suivant $\|.\|_{V,2}$.

**Proposition 2.7.** *Si $V$ est de dimension finie, alors toutes les normes sont équivalentes.*

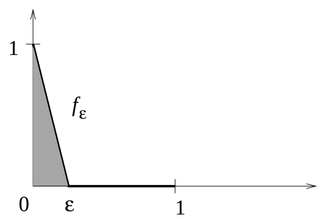
**Contre-exemple en dimension infinie :** pour $V = \mathcal{C}^0([0,1])$, on a deux normes,

$$\|f\|_{\mathcal{C}^0([0,1])} = \sup_{t\in[0,1]} |f(t)|, \quad \text{et} \quad \|f\|_R = \int_0^1 |f(t)| dt$$

Ces normes ne sont pas équivalentes : $\|f\|_R \leq \|f\|_{C^0}$, mais on n'a pas d'inégalité dans l'autre sens. En effet, s'il existe $c$ tel que $\|f\|_{C^0} \leq c\|f\|_R$, alors, avec $f = f_\epsilon$ (voir dessin ci-dessous),

$$1 \leq c\epsilon/2$$

pour tout $\epsilon$, ce qui est faux.



### 2.3 Compacité

**Définition 2.8.** *Un ensemble $A \subset V$ est compact si de toute suite d'élements de $A$, on peut extraire une sous-suite convergente vers un élément de $A$.*

**Proposition 2.9.** *Si $A$ est compact, alors $A$ est fermé borné.*

**Proposition 2.10.** *Si $V$ est de dimension finie, alors $A$ est compact si et seulement si $A$ est fermé borné.*

### 2.4 Continuité de la norme

**Proposition 2.11.** *Soit $V$ un ev normé. La norme sur $V$ est une application continue, autrement dit la fonction*

$$\phi : v \in V \mapsto \|v\|_V \in \mathbb{R}$$

*est continue.*

En effet on a $|\phi(v) - \phi(w)| \leq \|w - v\|_V$ et $\phi$ est lipschitzienne donc continue.

## 3 Espaces complets

Soit $V$ un espace vectoriel normé, de norme $\|\cdot\|_V$.

### 3.1 Suites de Cauchy

**Définition 3.1.** *Soit $u_n$ une suite de $V$. On dit qu'$u_n$ est une suite de Cauchy si*

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \geq 0, \quad \forall n \geq N,\ \forall p \geq 0, \quad \|u_{n+p} - u_n\|_V \leq \varepsilon.$$

**Proposition 3.2.** *Toute suite convergente est de Cauchy.*

## 3.2 Espaces de Banach

**Définition 3.3** (espace complet). *Un $\mathbb{R}$-ev $V$ est dit complet pour la norme $\|\cdot\|_V$ si toute suite de Cauchy (pour cette norme) est convergente (pour cette norme). Un tel espace est aussi appelé espace de* ***Banach****.*

**Proposition 3.4.** *Tout espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ normé de dimension finie est complet.*

**Proposition 3.5.** *L'espace de fonctions $C^0([0,1])$, muni de la norme $C^0$, est un espace de Banach.*

**Contre-exemple :** l'espace de fonctions $C^0([0,1])$ muni de la norme $\|.\|_R$, n'est pas complet (voir le poly).

## 3.3 Séries normalement convergentes

**Définition 3.6.** *Soit $u_n$ une suite de $V$. On dit que la série de terme général $u_n$ est normalement convergente dans $\mathbb{R}$ si la série $\sum_{n\geq 0} \|u_n\|_V$ est convergente.*

**Théorème 3.7.** *Soit $V$ un espace de Banach. Si la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ est normalement convergente dans $\mathbb{R}$, alors elle est convergente dans $V$.*

*Réciproquement, soit $V$ un espace vectoriel normé. On suppose que $V$ est tel que, si $\sum_{n\geq 0} u_n$ est normalement convergente dans $\mathbb{R}$, alors elle est convergente dans $V$. Dans ce cas $V$ est complet.*

## 3.4 Théorème du point fixe de Picard

**Définition 3.8** (application contractante). *Soit $A$ une application de $V$ dans $V$. On dit que $A$ est contractante s'il existe un réel $\alpha$* ***strictement inférieur à 1*** *tel que*

$$\forall u, w \in V \quad \|A(u) - A(w)\|_V \leq \alpha \|u - w\|_V$$

**Théorème 3.9** (point fixe de Picard). *Soit $V$ un espace de Banach et $A$ une application contractante de $V$ dans $V$. Alors, l'équation*

$$A(u) = u$$

*admet une solution unique $u_* \in V$. Cette solution est appelée* point fixe *de $A$.*

# 4 Application : théorème de Cauchy-Lipschitz

**Définition 4.1.** *Soit $d$ un entier, $u_0 \in \mathbb{R}^d$ et $f$ une fonction définie sur $\mathbb{R}^d$ à valeurs dans $\mathbb{R}^d$. On appelle problème de Cauchy le problème suivant : trouver $u : [0, \infty) \to \mathbb{R}^d$, de classe $C^1$, telle que*

$$\frac{du}{dt} = f(u(t)) \text{ sur } t > 0 \text{ et } u(0) = u_0$$

**Définition 4.2.** *Soit $V$ un espace vectoriel normé, et $f$ une application de $V$ dans $V$. On dit que $f$ est lipschitzienne sur $V$ s'il existe une constante $L > 0$ telle que*

$$\forall u_1, u_2 \in V \quad \|f(u_1) - f(u_2)\|_V \leq L\|u_1 - u_2\|_V$$

**Théorème 4.3** (Cauchy-Lipschitz)**.** *On considère le problème de Cauchy avec $f$ lipschitzienne. Alors le problème de Cauchy admet une unique solution $u \in C^1([0, \infty), \mathbb{R}^d)$.*

# 5 Dualité

## 5.1 Applications linéaires continues

Dans cette section, $V$ et $W$ désignent deux $\mathbb{R}$-ev normés.

**Proposition 5.1.** *Soit $A$ une application linéaire de $V$ dans $W$. Les propositions suivantes sont équivalentes :*

*(1) $A$ est continue.*

*(2) $A$ est continue en $0$.*

*(3) Il existe une constante $c < \infty$ telle que*

$$\forall u \in V, \qquad \|Au\|_W \leq c\,\|u\|_V.$$

**Définition 5.2.** *L'espace vectoriel des applications linéaires continues de $V$ dans $W$ est noté $\mathcal{L}(V, W)$.*

**Proposition 5.3.** *L'application*

$$\begin{array}{rcl} \|\cdot\|_{\mathcal{L}(V,W)} : \mathcal{L}(V,W) & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ A & \longmapsto & \|A\|_{\mathcal{L}(V,W)} = \sup_{\substack{u\in V\\ u\neq 0}} \frac{\|Au\|_W}{\|u\|_V} \end{array}$$

*est une norme sur* $\mathcal{L}(V,W)$.

**Théorème 5.4.** *Soit* $V$ *un espace vectoriel normé et* $W$ *un espace de Banach. Alors,* $\mathcal{L}(V,W)$ *équipé de la norme* $\|\cdot\|_{\mathcal{L}(V,W)}$ *est un espace de Banach.*

**Remarque 5.5.** $V$ *n'a pas besoin d'être complet, c'est l'espace d'arrivée qui compte.*

**Exemple**

- Sur $C^1([0,1]$, l'application $f \to \max(\sup|f|, \sup|f'|)$ est une norme, notée $\|\cdot\|_{C^1}$ (plus généralement, $f \in C^k \to \max(\sup|f|, \sup|f'|, \ldots, \sup|f^{(k)}|)$ est une norme sur $C^k$).

- Sur $C^1([0,1])$, l'application $f \to \|f\|_{C^0}$ est une autre norme, qui n'est pas équivalente à la norme $\|\cdot\|_{C^1}$.

- L'application qui à $f \in C^1([0,1])$ associe $f' \in C^0([0,1])$ est linéaire continue (avec ces espaces respectivement équipés de $\|\cdot\|_{C^1}$ et $\|\cdot\|_{C^0}$).

## 5.2 Espace dual

Un cas particulier important d'applications linéaires continues entre $\mathbb{R}$-ev normés est celui où l'espace d'arrivée est $W = \mathbb{R}$.

**Définition 5.6.** *Soit* $V$ *un* $\mathbb{R}$*-ev normé.* $\mathcal{L}(V,\mathbb{R})$ *est appelé* espace dual *de* $V$ *et est noté* $V'$*. Un élément* $A \in V'$ *est appelé* forme linéaire continue *et son action sur un élément* $v \in V$ *est notée à l'aide du crochet de dualité* $\langle\cdot\,,\cdot\rangle_{V',V}$ *de sorte que*

$$\langle A, v\rangle_{V',V} = Av \in \mathbb{R}.$$

$V'$ *est équipé de la norme*

$$\|A\|_{V'} = \sup_{\substack{u\in V\\ u\neq 0}} \frac{\langle A, u\rangle_{V',V}}{\|u\|_V}.$$

**Exemple**

Soit $c \in [0,1]$. L'application qui à $f \in C^0([0,1])$ associe $f(c)$ est une forme linéaire continue pour la norme $C^0$.

## 5.3 Formes bilinéaires continues

**Définition 5.7.** *Soient $V$ et $W$ deux $\mathbb{R}$-ev. Une forme bilinéaire sur $V \times W$ est une application $a : V \times W \to \mathbb{R}$ telle que*

- *$\forall v \in V$, l'application $a(v, \cdot) : W \to \mathbb{R}$ est linéaire ;*
- *$\forall w \in W$, l'application $a(\cdot, w) : V \to \mathbb{R}$ est linéaire ;*

*L'espace des formes bilinéaires sur $V \times W$ est noté $(V \times W)'$.*

**Définition 5.8.** *Soient $V$ et $W$ deux $\mathbb{R}$-ev. Une forme bilinéaire $a : V \times W \to \mathbb{R}$ est continue sur $V \times W$ s'il existe une constante $c < \infty$ telle que*

$$\forall (v,w) \in V \times W, |a(v,w)| \leq c\|v\|_V \|w\|_W$$

*On note* $\|a\|_{(V\times W)'} = \sup\limits_{(v,w)\in V\times W} \dfrac{a(v,w)}{\|v\|_V \|w\|_W}$.