Couverture en pratique dans le modèle de Black et Scholes

LAPEYRE Bernard, GUYON Julien.

23 avril 2013

Le modèle de Black-Scholes suppose que le vendeur d'une option se couvre en temps continu. En pratique, on ne peut se couvrir qu'à temps discret. La valeur du portefeuille de couverture n'est alors pas égale au prix de l'option. Dans ce TP, on étudie l'influence de la fréquence de couverture sur la différence entre valeur du portefeuille et prix de l'option (appelée erreur de couverture).

Trajectoires dans le modèle de Black et Scholes Dans le modèle de Black et Scholes,

$$S_t = S_0 \exp\left(\sigma B_t + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) t\right),$$

où $(B_t)_{t \geq 0}$ est le mouvement brownien sous la probablilité historique.

On supposera dans la suite que $S_0 = 100$, $\sigma = 0.3$ (volatilité annuelle) et $\mu = 0.05$. Le taux d'intérêt exponentiel annuel vaut $r = 0.05$.

Ces constantes en Scilab.

1. Simuler une suite de variables aléatoires gaussiennes centrées réduites, la trajectoire d'un mouvement brownien et enfin celle de l'actif S.

   Indication Scilab.

2. Tracer des trajectoires avec $\mu = 0$, $\mu = 0.15$, $\mu = 0.5$. Nous avons vu en cours que ces variations **n'ont pas** d'influence sur le prix des options.

   De même, tracer des trajectoires avec $\sigma = 0.05$, $\sigma = 0.2$, $\sigma = 0.6$. Nous avons vu en cours que ces variations **ont** une influence sur le prix des options.

Couverture en temps discret On prend $S_0 = 100$, $\sigma = 0.3$, $\mu = 0.05$ et $r = 0.05$. On vend un call de strike $K = S_0$ et d'échéance $T = 1$ an. On se couvre tous les Δt (typiquement une heure, un jour, une semaine, un mois).

1. Implémenter la formule de Black et Scholes pour le call.

   Indication Scilab.

2. Pour un pas de temps Δt fixé, implémenter une procédure de couverture. On appliquera la formule de couverture de Black et Scholes aux instants $k\Delta t$ et on veillera à constituer un portefeuille autofinancé. A cause de la discrétisation, la valeur de ce portefeuille est différente du prix de l'option.

   Indication Scilab.

3. On s'intéresse maintenant à l'erreur de couverture à maturité, i.e. en $t = T$. C'est la différence entre valeur finale du portefeuille et payoff de l'option. Simuler cette erreur de couverture. Tracer un histogramme et évaluer sa moyenne et son écart-type.

4. Etudier ces quantités lorsque Δt tend vers 0. On étudiera en particulier les écart-types des stratégies qui consistent :
   – à se couvrir juste une fois en $t = 0$,
   – à se couvrir une fois par mois,
   – à se couvrir une fois par semaine,
   – à se couvrir une fois par jour.
   Et si on ne se couvre pas du tout ?

5. Répeter les simulations lorsque $\mu > r$ et $\mu < r$. Que se passe-t-il pour la moyenne ? pour l'écart type ? Montrer que, lorsque $\mu = r$, la moyenne de l'erreur de couverture est nulle.

6. On pourra recommencer cet exercice de couverture, en prenant une combinaison de puts et de calls. En voici quelques exemples :
   – **Bull spread** : constitué de l'achat d'un call de prix d'exercice 90 (abrégé en call 90) et de la vente d'un call 110 de même échéance.
   – **Strangle** : constitué de la vente d'un put 90 et de la vente d'un call 110.
   – **Condor** : constitué de la vente d'un call 90, de l'achat d'un call 95 et d'un call 105 et de la vente d'un call 110.
   – **Put ratio backspread** : constitué de la vente d'un put 110 et de l'achat de 3 puts 90.