TD1 : autour du modèle de Cox-Ross-Rubinstein

On s'interesse au modèle de Cox-Ross-Rubinstein. Plus précisemment on suppose que S_n est le prix à l'instant n d'un actif risqué et que, pour tout n entier on a

$$S_{n+1} = S_n T_{n+1}$$

où $(T_n, n \geq 0)$ est une suite de variables aléatoires indépendantes telle que $\mathbf{P}(T_n = 1 + a) = p$ et $\mathbf{P}(T_n = 1 + b) = 1 - p$ où p est un nombre réel tel que $0 < p < 1$. On supposera que $1 + a$ (down) est strictement plus petit que $1 + b$ (up).
On suppose de plus qu'il existe un actif sans risque S_n^0 donné par

$$S_n^0 = (1 + r)^n.$$

On prendra les valeurs suivantes pour les expériences numériques.
- un taux annuel R de 5%
- une valeur initiale de $S0 = 40$
- une valeur d'exercice de $K = 40$
- un nombre de pas de temps égal à 10
- une date d'échéance de 4 mois.

On choisira les paramétres a et b de façon à converger vers le modèle de Black et Scholes. Plus précisément, on pose
- $Dt = T/N$, le pas de temps du modèle,
- $r = \exp(R * Dt) - 1$, le taux de rendement sur la période.

Le choix de $1 + a$ et $1 + b$ est lié à la discrétisation du modèle de Black et Scholes (voir livre). On suppose que la volatilité annuelle du modèle de Black et Scholes vaut $\sigma = 0.2$ par an. On pose
- $1 + a = (1 + r) * \exp\left(-\sigma * \sqrt{Dt}\right)$,
- $1 + b = (1 + r) * \exp\left(+\sigma * \sqrt{Dt}\right)$.

Télécharger ces constantes en Scilab

Couverture dans le modèle de Cox-Ross

1. Proposer une méthode de simulation du vecteur $(S_0, \ldots, S_N)$. On écrira une fonction de `(N,p,a,b,S0)` qui retourne ce vecteur. Correction Scilab.

   Dessiner une trajectoire typique à l'aide de `plot` pour différentes valeurs de p (de 0.1 à 0.9). Rappel : malgré la diversité des trajectoires le prix de l'option ne depend pas de la valeur de p !

2. Rappel : montrer que lorsque $a < r < b$, il existe une probabilité p^* unique telle que, $\mathbf{E}(S_n/(1 + r)^n) = S_0$ donnée par

   $$p^* = \frac{b - r}{b - a}$$

   et que lorsque $p = p^*$, $(S_n/(1 + r)^n, n \geq 0)$ est une martingale sous cette probabilité. Pourquoi doit-on calculer les prix des actifs en utilisant la probabibilité p^* ?

3. Ecrire un algorithme récursif, exploitant la relation (1) –voir le TD2 joint à la fin de ce document–, permettant d'évaluer le prix d'un call de payoff $(S_N - K)_+$ à l'instant n comme une fonction `Prix_rec(n,N,K,p1,p2,a,b,x)`.

   Vérifier que (ou mieux comprendre pourquoi) l'algorithme itératif `Prix_en_zero(N,K,R,a,b,x)` permet d'évaluer (beaucoup plus efficacement) le prix d'un call de payoff $(S_N - K)_+$ à l'instant 0. Correction Scilab.

   En déduire une fonction exprimant le prix à l'instant N si l'actif vaut x à cet instant `Prix(n,N,K,R,a,b,x)`. Correction Scilab.

4. Ecrire une fonction calculant la couverture à l'instant n, sebsant sur la relation (2) du TD2 –voir TD2 joint à la fin de ce document–, si le prix de l'actif vaut x à cet instant en utilisant la fonction `Prix(n,N,K,R,up,down,x)`. Correction Scilab.

5. Simuler une trajectoire $(S_n, n \geq 0)$ et vérifier que la couverture est ainsi parfaite. Correction Scilab. Vérifier que cette couverture fonctionne quelle que soit la valeur de p. On pourra prendre $p = 0.01$ et $p = 0.99$.

Partie théorique (rappel) : Modèle de Cox-Ross-Rubinstein

Exercice 1 Dans le modèle de Cox-Ross-Rubinstein, il y a un seul actif à risque, de prix S_n à l'instant n, $0 \leq n \leq N$, et un actif sans risque de rendement certain r sur une période :

$$S_n^0 = (1+r)^n.$$

On veut modèliser une évolution du cours S_n d'un actif risqué dont les variations relatives des cours entre deux périodes consécutives est soit a, soit b, avec $-1 < a < b$:

$$S_{n+1} = \begin{cases} S_n(1+a) \\ S_n(1+b) \end{cases}$$

Pour cela, on suppose que le cours initial S_0 est donné et que $\Omega = \{1+a, 1+b\}^N$. On définit les variables aléatoires T_n par, pour $n = 1, \ldots, N$, $T_n(\omega) = \omega_n$ lorsque $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_N) \in \Omega$. On a, avec ces notations, $\mathbf{P}(T_1 = x_1, \ldots, T_N = x_N) = \mathbf{P}(x_1, \ldots, x_N)$.
T_n prend donc pour valeur $1+a$ ou $1+b$ et représente les valeurs successives de $T_n = S_n/S_{n-1}$, $n = 1, \ldots, N$ et l'on a $S_n = S_0 \times T_1 \times \cdots T_n$.
On suppose que $\mathbf{P}$ est une probabilité sur Ω qui donne à tous les singletons une probabilité non nulle.
La tribu $\mathcal{F}_n$ sera, pour $n = 1, \ldots, N$, la tribu $\sigma(S_1, \ldots, S_n)$ engendrée par les variables aléatoires S_1,. . .,S_n et $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$.

1. Montrer que le prix actualisé $(\tilde{S}_n)$ est une martingale sous $\mathbf{P}$ si et seulement si $\mathbf{E}(T_{n+1}|\mathcal{F}_n) = 1 + r, \forall n \in \{0, 1, \ldots, N-1\}$.
2. Montrer que, si le marché est viable, r appartient à l'intervalle $]a, b[$.
3. Donner des exemples d'arbitrages possibles si la condition nécessaire de viabilité obtenue n'est pas vérifiée.
4. Pour toute la suite, on suppose que $r \in]a, b[$. On pose $p^* = (b-r)/(b-a)$.
   Montrer que $(\tilde{S}_n)$ est une martingale sous $\mathbf{P}^*$ si et seulement et si les variables aléatoires T_1, T_2, . . ., T_N sont indépendantes équidistribuées, leur loi commune étant donnée par :
   $$\mathbf{P}^*(T_1 = 1+a) = p^* = 1 - \mathbf{P}^*(T_1 = 1+b).$$
5. En déduire que le marché est viable et complet et donner une formule de prix pour un produit optionnel de payoff h sous la forme d'une espérance conditionnelle sous $\mathbf{P}^*$.

On note C_n (rep. P_n) la valeur, à l'instant n, d'un call (resp. put) européen sur une unité d'actif risqué au prix d'exercice K et d'échéance N.

1. Retrouver, à partir des formules de prix sous forme d'espérances conditionnelles, la relation de parité call-put :
   $$C_n - P_n = S_n - K(1+r)^{-(N-n)}.$$

2. Montrer que C_n peut s'écrire sous la forme : $C_n = c(n, S_n)$ où :

$$c(n,x) = \frac{1}{(1+r)^{N-n}} \mathbf{E}^* \left(f(x \times T_{n+1} \times \cdots T_N) \right)$$

avec $f(x) = (x-K)_+$.

3. Montrer que $c(n,x)$ vérifie $C(N,x) = (x-K)_+$ et que, pour $n < N$:

$$c(n,x) = \frac{p^*}{1+r} c\left(n+1, x(1+a)\right) + \frac{1-p^*}{1+r} c\left(n+1, x(1+b)\right) \tag{1}$$

4. Montrer que la stratégie de couverture parfaite d'un call est définie par une quantité d'actif risqué $H_n = \Delta(n, S_{n-1})$ à détenir entre les instants $n-1$ et n, où Δ est donné par :

$$\Delta(n,x) = \frac{c(n, x(1+b)) - c(n, x(1+a))}{x(b-a)}. \tag{2}$$