Méthodes de Monte-Carlo en finance

Examen du mardi 24 janvier 2017 8h30-11h30

Partie I : Annulation du biais d'une suite d'estimateur

On se donne une variable aléatoire Y à valeurs dans $\mathbf{R}$ de carré intégrable.

1. On suppose, tout d'abord, que l'on sait simuler exactement la variable aléatoire Y. Pour un ϵ réel positif, montrer que le nombre $N(\epsilon)$ de tirages aléatoires de Y indépendants permettant d'obtenir (avec une grande probabilité) une approximation de $\mathbf{E}(Y)$ avec une erreur d'environ ϵ croit comme Cte$/\epsilon^2$.

On suppose maintenant que l'on ne sait pas simuler exactement Y mais seulement qu'il existe une suite de variables aléatoires de carré intégrable $(Y_n, n \geq 0)$ facilement simulables [1] telles que

$$\lim_{n \to +\infty} \mathbf{E}\left((Y_n - Y)^2\right) = 0. \tag{1}$$

2. Montrer que le biais $b_n = \mathbf{E}(Y) - \mathbf{E}(Y_n)$ tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$. Vérifier que $\lim_{n\to+\infty} \mathbf{E}((Y_n - Y)Y) = 0$. En déduire que $\lim_{n\to+\infty} \mathbf{E}(Y_n^2) = \mathbf{E}(Y^2)$ et en conclure que $\lim_{n\to+\infty} \text{Var}(Y_n) = \text{Var}(Y)$.
3. On se place dans un cas où l'on a une estimation a priori du biais du type $|b_n| \leq \frac{C}{n^\alpha}$, avec $\alpha > 0$. On choisit un $n > 0$ et le nombre de tirage N, $(Y_n^1, \ldots, Y_n^N)$, selon la loi de Y_n. On approxime $\mathbf{E}(Y)$ par $\bar{Y}^{n,N} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^N Y_n^i$. Montrer que, pour N grand, avec une probabilité proche de 1, on a
$$|\bar{Y}^{n,N} - \mathbf{E}(Y)| \leq R(n,N) := \frac{C}{n^\alpha} + 2\frac{K}{\sqrt{N}}.$$
4. On prend comme mesure de l'erreur $R(n,N)$ et l'on suppose que le coût de N tirages selon la loi de Y_n est donné par Coût$(n,N) = C_1 nN$. On s'impose une contrainte sur le coût total du calcul C_{total}. On s'intéresse à l'erreur minimale $R(n,N)$ que l'on peut obtenir sous la contrainte de coût Coût$(n,N) = C_{\text{total}}$, définie par :
$$\text{Error}(C_{\text{total}}) = \min_{n,N,\text{Cost}(n,N)=C_{\text{total}}} R(n,N)$$
Montrer que Error$(C_{\text{total}}) = \text{Cte} \times C_{\text{total}}^{-\frac{\alpha}{2\alpha+1}}$. En déduire que le coût minimal nécessaire pour obtenir une précision ϵ croît comme Cte$\times \epsilon^{-\frac{2\alpha+1}{\alpha}}$. En comparant avec le résultat de la question 1, expliquer en quoi la présence du biais dégrade la performance de l'algorithme de simulation.

Comment se débarasser du biais ? Nous allons voir que l'on peut construire, à partir de la suite $(Y_n, n \geq 0)$ une variable aléatoire simulable et sans biais $\tilde{Y}$ (c'est-à-dire telle que $\mathbf{E}() = \mathbf{E}(Y)$) au prix toutefois d'une augmentation de la variance.

On considère, pour cela, une variable aléatoire τ à valeurs dans $\mathbf{N}^*$ *indépendant* de la suite $(Y_n, n \geq 0)$ dont la loi est donnée par

$$\mathbf{P}(\tau = n) = p_n, \text{ avec } p_n > 0 \text{ pour tout } n \geq 1. \tag{2}$$

On note $\Delta Y_n = Y_n - Y_{n-1}$, pour $n \geq 1$ (lorsque $n = 1$, on pose $Y_0 = 0$). On définit $\tilde{Y}$ par

$$\tilde{Y} = \frac{\Delta Y_\tau}{p_\tau} = \sum_{n\geq 1} \frac{\Delta Y_n}{p_n} \mathbf{1}_{\{\tau = n\}}.$$

1. C'est le cas lorsque l'on discrétise une équation différentielle stochastique.

5. Montrer que, sous l'hypothèse (2), $\mathbf{E}(|\tilde{Y}|) = \sum_{n\geq 1}\mathbf{E}(|\Delta Y_n|)$. En déduire que lorsque $\mathbf{E}(|\tilde{Y}|) < +\infty$, on a $\mathbf{E}(\tilde{Y}|Y_n, n\geq 1) = Y$ et $\mathbf{E}(\tilde{Y}) = \mathbf{E}(Y)$.
6. Donner un exemple de suite *déterministe* $(\Delta Y_n, n \geq 1)$ où $Y = \sum_{n\geq 1}\Delta Y_n$ converge mais où $\mathbf{E}(|\tilde{Y}|) = +\infty$, pour tout choix de p vérifiant l'hypothèse (2).
7. Montrer que l'on a
$$\mathbf{E}(\tilde{Y}^2) = \sum_{n\geq 1}\frac{\mathbf{E}\left((\Delta Y_n)^2\right)}{p_n},$$
et que lorsque $\mathbf{E}(\tilde{Y}^2) < +\infty$, $\mathrm{Var}(\tilde{Y}) \geq \mathrm{Var}(Y)$.
8. On cherche à approximer $\mathbf{E}(Y)$ où $Y = f(X_T)$ et $Y_n = f(X_T^{(n)})$ où X une solution d'une EDS et $X^{(n)}$ son approximation par un schéma d'Euler de pas $h_n = 1/2^n$. Montrer (en supposant les coefficients de l'EDS et f aussi réguliers que souhaité) que $\mathbf{E}\left(\left|f(X_T^{(n)}) - f(X_T)\right|^2\right) \leq C\rho^n$, ρ étant un réel positif inférieur à 1 que l'on précisera. En déduire que $\mathbf{E}((\Delta Y_n)^2) \leq 4C\rho^n$.
Par ailleurs le coût d'une simulation de Y_n est donné par $\mathrm{Cte}\times 2^n$. Montrer que, si l'on néglige le temps de simulation de τ, le coût moyen d'une simulation de $\tilde{Y}$ est proportionnel à $\sum_{n\geq 1} p_n 2^n$.
9. On suppose que, comme dans l'exemple précédent, $\mathbf{E}\left((\Delta Y_n)^2\right) \leq C\rho^n$, avec $\rho < 1$ et que le coût d'une simulation de Y_n est donné par par $c\alpha^n$ avec $\alpha > 1$.
On suppose enfin que la loi de τ est une loi géométrique [2] de paramètre q avec $0 < q < 1$ (on note $q' = 1 - q$). Vérifier que, si $q' > \rho$, $\mathbf{E}((\tilde{Y})^2) < +\infty$ et que :
$$\mathbf{E}(\tilde{Y}^2) \leq \frac{C\rho q'}{q(q'-\rho)}.$$
Par ailleurs, montrer que le coût moyen d'une simulation de $\tilde{Y}$, $C_{\text{moy}} = \mathbf{E}(c\alpha^\tau)$, est fini lorsque $\alpha q' < 1$ et qu'il alors égal à $c\alpha q/(1-\alpha q')$.
En supposant [3] que la performance de la simulation est mesurée par le produit $\mathbf{E}(C_{\text{moy}}) \times \mathbf{E}((\tilde{Y})^2)$ montrer que l'on doit avoir $\rho\alpha < 1$ pour espérer obtenir une méthode efficace et que, dans ce cas, le meilleur choix de q' est $q' = \sqrt{\rho/\alpha}$.

Partie II : Théorème de Wong-Zakai

Sur l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, on se donne un mouvement brownien $(W_t)_{t\geq 0}$ de dimension d. Pour un horizon $T \in]0, +\infty[$ et un nombre $N \in \mathbf{N}^*$ de pas, on considère la grille uniforme $(t_k = \frac{kT}{N})_{0\leq k\leq N}$. Pour discrétiser la solution de l'EDS

$$dX_t = \sigma(X_t)dW_t + b(X_t)dt,\ X_0 = x_0 \tag{3}$$

où $x_0 \in \mathbf{R}^n$, $\sigma : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^{n\times d}$ et $b : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ sont supposées lipschitziennes, on peut être tenté d'approcher la trajectoire brownienne par interpolation linéaire sur chaque intervalle $[t_k, t_{k+1}]$ en posant $W_t^N = W_{t_k} + \frac{W_{t_{k+1}} - W_{t_k}}{t_{k+1} - t_k}(t - t_k)$ puis de résoudre

$$dX_t^N = \sigma(X_t^N)dW_t^N + b(X_t^N)dt,\ X_0^N = x_0. \tag{4}$$

1. Vérifier que pour tout $k \in \{0, \ldots, N-1\}$, $(X_t^N)_{t\in[t_k, t_{k+1}]}$ satisfait une équation différentielle ordinaire et en déduire que (4) admet une unique solution.

2. i.e. pour tout $n \geq 1$, $p_n = q(1-q)^n$.
3. Voir, pour des élèments de justification, *Glynn P.W., Whit W., 1992, The asymptotic efficiency of simulation estimators, Oper. Res. 40(3) :505-520.*

On se place d'abord en dimension $n = d = 1$.

2. On suppose en outre que $\sigma : \mathbf{R} \to \mathbf{R}_+^*$ est C^1 et $b \equiv 0$ et on pose $\varphi(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{dy}{\sigma(y)}$.
   (a) Vérifier que pour tout $k \in \{0, \dots, N\}$, $\varphi(X_{t_k}^N) = W_{t_k}$ et en déduire que X_T^N ne dépend pas de N. On note Y_T cette valeur.
   (b) Dans le cas $\sigma(x) \equiv x$, calculer φ et vérifier que $Y_T \neq X_T$. En déduire que le procédé d'approximation ne converge pas vers la solution de (3).
   (c) Calculer $(\varphi^{-1})'$ et $(\varphi^{-1})''$. En déduire que $(Y_t = \varphi^{-1}(W_t))_{t \in [0,T]}$ est solution de l'EDS $dY_t = \sigma(Y_t)dW_t + \frac{1}{2}\sigma\sigma'(Y_t)dt,\ Y_0 = x_0$.
3. On suppose que le processus d'Itô $(Y_t)_{t \in [0,T]}$ est solution de l'EDS au sens de Stratonovitch

$$dY_t = \sigma(Y_t) \circ dW_t + b(Y_t)dt,\ Y_0 = x_0 \tag{5}$$

   où, pour un processus d'Itô $(H_s)_{s \in [0,T]}$ et $t \in [0, T]$, on définit l'intégrale de Stratonovitch $\int_0^t H_s \circ dW_s$ comme la limite en probabilité lorsque $n \to \infty$ de $\sum_{k=0}^{N-1} \frac{H_{t_{k+1}} + H_{t_k}}{2}(W_{t_{k+1} \wedge t} - W_{t_k \wedge t})$. La fonction $\sigma : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ est supposée C^2 avec $\sigma\sigma'$ lipschitzienne.
   (a) Quelle est la limite en probabilité de $\sum_{k=0}^{N-1} H_{t_k}(W_{t_{k+1}\wedge t} - W_{t_k \wedge t})$? En déduire que $\int_0^t H_s \circ dW_s = \int_0^t H_s dW_s + \frac{1}{2}\langle H, W\rangle_t$.
   (b) En déduire la partie intégrale d'Itô par rapport à dW_t de la décomposition de $\sigma(Y_t)$ comme processus d'Itô puis $d\langle \sigma(X), W\rangle_t$.
   (c) Conclure que $(Y_t)_{t \in [0,T]}$ est solution de l'EDS au sens d'Itô

$$dY_t = \sigma(Y_t)dW_t + \left(b + \frac{\sigma\sigma'}{2}\right)(Y_t)dt,\ Y_0 = x_0. \tag{6}$$

4. On suppose que σ est C^2 avec σ, σ' et σ'' bornées et que b est C^1 avec b et b' bornées. L'objectif de cette question est de montrer que sous cette hypothèse

$$\exists C < \infty,\ \forall N \in \mathbf{N}^*,\ \max_{0 \le k \le N} \mathbf{E}\left[|X_{t_k}^N - Y_{t_k}|^2\right] \le \frac{C}{N}. \tag{7}$$

   (a) Écrire le schéma d'Euler $(Y_{t_k}^N)_{0 \le k \le N}$ appliqué à (6) et préciser son erreur forte.
   (b) Vérifier que pour $t \in [t_k, t_{k+1}]$, $dX_t^N = f_k(X_t^N)dt$ avec $f_k(x) = \sigma(x)\frac{W_{t_{k+1}} - W_{t_k}}{t_{k+1} - t_k} + b(x)$.
   (c) En déduire que pour $r \in [t_k, t_{k+1}]$,

$$\sigma\sigma'(X_r^N) = \sigma\sigma'(X_{t_k}^N) + \int_{t_k}^{r} f_k(\sigma\sigma')'(X_u^N)du$$

   et que pour $t \in [t_k, t_{k+1}]$,

$$X_t^N = X_{t_k}^N + f_k(X_{t_k}^N)(t - t_k) + \int_{t_k}^{t}\int_{t_k}^{s} f_k f_k'(X_r^N)drds.$$

   (d) Conclure que pour $k \in \{0, \dots, N-1\}$,

$$X_{t_{k+1}}^N = X_{t_k}^N + \sigma(X_{t_k}^N)(W_{t_{k+1}} - W_{t_k}) + \left(b + \frac{\sigma\sigma'}{2}\right)(X_{t_k}^N)\frac{T}{N} + R_{k+1}^{N,1} + R_{k+1}^{N,2},$$

avec $R^{N,1}_{k+1} = \frac{\sigma\sigma'}{2}(X^N_{t_k})((W_{t_{k+1}} - W_{t_k})^2 - (t_{k+1} - t_k))$ et

$$R^{N,2}_{k+1} = \int_{t_k}^{t_{k+1}} (t_{k+1} - r)\left(\frac{W_{t_{k+1}} - W_{t_k}}{t_{k+1} - t_k}(b\sigma' + \sigma b')(X^N_r) + bb'(X^N_r)\right) dr$$
$$+ \int_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{(t_{k+1} - u)^2 (W_{t_{k+1}} - W_{t_k})^2}{2(t_{k+1} - t_k)^2} \left(\frac{W_{t_{k+1}} - W_{t_k}}{t_{k+1} - t_k}\sigma(\sigma\sigma')'(X^N_u) + b(\sigma\sigma')'(X^N_u)\right) du$$

(e) Que valent $\mathbf{E}\left[\left(W_{t_{k+1}} - W_{t_k}\right)^2\right]$, $\mathbf{E}\left[\left(W_{t_{k+1}} - W_{t_k}\right)^4\right]$ et $\mathbf{E}\left[\left(W_{t_{k+1}} - W_{t_k}\right)^6\right]$?

(f) Que vaut $\mathbf{E}[R^{N,1}_{j+1} R^{N,1}_{k+1}]$ pour $j < k$? En déduire que $\forall \ell \in \{0, \dots, N-1\}$,

$$\mathbf{E}\left[\left(\sum_{k=0}^{\ell} R^{N,1}_{k+1}\right)^2\right] \leq \|\sigma\sigma'\|^2_\infty \frac{(\ell+1)T^2}{2N^2} \leq \frac{\|\sigma\sigma'\|^2_\infty T^2}{2N}.$$

(g) Vérifier que pour $k \in \{0, \dots, N-1\}$, $\mathbf{E}\left[(R^{N,2}_{k+1})^2\right]$ est majoré par

$$\|b\sigma' + \sigma b'\|^2_\infty \frac{T^3}{N^3} + \|bb'\|^2_\infty \frac{T^4}{N^4} + \|\sigma(\sigma\sigma')'\|^2_\infty \frac{5T^3}{3N^3} + \|b(\sigma\sigma')'\|^2_\infty \frac{T^4}{3N^4}.$$

(h) En déduire l'existence d'une constante $C_R < \infty$ telle que

$$\forall N \in \mathbf{N}^*,\ \forall \ell \in \{0, \dots, N-1\},\ \mathbf{E}\left[\left(\sum_{k=0}^{\ell}(R^{N,1}_{k+1} + R^{N,2}_{k+1})\right)^2\right] \leq \frac{C_R}{N}.$$

On pose $e(t) = \sum_{\ell=0}^{N-1} \mathbf{E}\left[(X^N_{t_\ell} - Y^N_{t_\ell})^2\right] 1_{[t_\ell, t_{\ell+1}[}(t) + \mathbf{E}\left[(X^N_T - Y^N_T)^2\right] 1_{\{t=T\}}$ et $\tilde{b} = b + \frac{\sigma\sigma'}{2}$.

(i) Montrer que pour $\ell \in \{1, \dots, N\}$,

$$\mathbf{E}\left[(X^N_{t_\ell} - Y^N_{t_\ell})^2\right] \leq \frac{3T}{N}\sum_{k=0}^{\ell-1} \mathbf{E}\left[(\sigma(X^N_{t_k}) - \sigma(Y^N_{t_k}))^2 + T(\tilde{b}(X^N_{t_k}) - \tilde{b}(Y^N_{t_k}))^2\right] + \frac{3C_R}{N}.$$

(j) En déduire que $\forall t \in [0, T],\ e(t) \leq \frac{3C_R}{N} + 3(\|\sigma'\|^2_\infty + T\|\tilde{b}'\|^2_\infty)\int_0^t e(s)ds$ puis que

$$\max_{0 \leq k \leq N} \mathbf{E}\left[|X^N_{t_k} - Y^N_{t_k}|^2\right] \leq \frac{3C_R}{N} e^{3(\|\sigma'\|^2_\infty + T\|\tilde{b}'\|^2_\infty)T}.$$

(k) Conclure que (7) est vraie.

On se place désormais en dimension quelconque et on suppose toujours σ bornée ainsi que ses dérivées jusqu'à l'ordre 2 et $b : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ C^1 bornée ainsi que ses dérivées d'ordre 1. Pour $j \in \{1, \dots, d\}$ et $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n$, on note $\sigma_j(x)$ la j-ème colonne de la matrice $\sigma(x)$ et $\partial\sigma_j(x)$ la matrice dont le terme d'indices $i, l \in \{1, \dots, n\}$ vaut $(\partial\sigma_j(x))_{il} = \frac{\partial \sigma_{ij}(x)}{\partial x_l}$.

5. Donner la forme Itô de l'EDS (5).
6. Vérifier que pour $j, m \in \{1, \dots, d\}$ avec $j \neq m$, et $(H_{t_k})_{0 \leq k \leq N-1}$ une suite de variables aléatoires bornées par une constante C et adaptée à la filtration du mouvement brownien $(W_t)_{t \geq 0}$, pour tout $\ell \in \{0, \dots, N-1\}$, $\mathbf{E}\left[\left(\sum_{k=0}^{\ell}(H_{t_k}(W^j_{t_{k+1}} - W^j_{t_k})(W^m_{t_{k+1}} - W^m_{t_k})\right)^2\right] \leq \frac{(\ell+1)C^2T^2}{N^2}$.
7. En déduire comment montrer que (7) reste vraie.

Méthodes de Monte-Carlo en finance

Examen du mardi 26 janvier 2016 8h30-11h30

Partie 1 : Une méthode de Monte-Carlo adaptative

On considère une fonction f, mesurable et bornée, de $\mathbf{R}^p$ dans $\mathbf{R}$ et X une variable aléatoire à valeur dans $\mathbf{R}^p$.

On s'intéresse à un cas où l'on sait représenter $\mathbf{E}\left(f(X)\right)$ sous la forme

$$\mathbf{E}\left(f(X)\right) = \mathbf{E}\left(H(f;\lambda,U)\right), \tag{8}$$

où $\lambda \in \mathbf{R}^n$, U est une variable aléatoire à valeur dans $[0,1]^d$ suivant une loi uniforme et où, pour tout $\lambda \in \mathbf{R}^n$, $H(f;\lambda,U)$ est une variable aléatoire de carré intégrable qui prend des valeurs réelles. La question 2 montrer que cela est généralement possible.

Le but de ce problème est de montrer que l'on peut, dans ce cas, faire varier λ au cours des tirages tout en conservant les propriétés de convergence d'un algorithme de type Monte-Carlo.

1. On note ϕ la fonction de répartition d'une gaussienne centrée réduite et ϕ^{-1} son inverse. On suppose que X est une variable aléatoire réelle de loi gaussienne centrée réduite.

   Montrer que, si $\lambda \in \mathbf{R}$, H définie par :

   $$H(f;\lambda,U) = e^{-\lambda G - \frac{\lambda^2}{2}} f\left(G+\lambda\right), \text{ où } G = \phi^{-1}(U)$$

   permet de satisfaire la condition (8).

2. Soit X une variable aléatoire à valeur dans $\mathbf{R}^p$, de loi arbitraire, que l'on peut obtenir par une méthode de simulation : cela signifie qu'il existe une fonction ψ de $[0,1]^d$ dans $\mathbf{R}^p$ telle que, si $U = (U_1,\ldots,U_d)$ suit une loi uniforme sur $[0,1]^d$, la loi de $\psi(U)$ est identique à celle de X.

   On pose, pour $i = 1,\ldots,d$, $G_i = \phi^{-1}(U_i)$ et l'on considère $\lambda = (\lambda_1,\ldots,\lambda_d) \in \mathbf{R}^d$. Proposer à partir de $(G_1+\lambda_1,\ldots,G_d+\lambda_d)$ un choix de variable aléatoire $H(f;\lambda,U)$ qui permet de satisfaire l'égalité (8).

3. On considère une suite $(U^n, n \geq 1)$ de variables aléatoires indépendantes uniformément distribuées sur $[0,1]^d$. On note $\mathcal{F}_n = \sigma\left(U^k, 1 \leq k \leq n\right)$.

   Soit λ un vecteur fixé, comment peut on utiliser $H(f;\lambda,U)$ pour estimer $\mathbf{E}\left(f(X)\right)$? Comment peut-on estimer l'erreur commise sur cette estimation ?

   Quel est le critère pertinent pour choisir λ ?

On suppose que λ n'est plus constant mais évolue au fils du temps et est donné par une suite $(\lambda_n, n \geq 0)$ de variables aléatoires $\mathcal{F}_n$-mesurable (λ_0 est supposée constante). On suppose que

$$\begin{array}{l}\text{pour tout } \lambda \in \mathbf{R}^p, s^2(\lambda) = \mathrm{Var}(H(f;\lambda,U)) < +\infty, \\ \text{et } s^2(\lambda) \text{ est une fonction continue de } \mathbf{R}^d \text{ dans } \mathbf{R}.\end{array} \tag{9}$$

4. On pose

   $$M_n = \sum_{i=0}^{n-1} \left[H(f;\lambda_i,U_{i+1}) - \mathbf{E}(f(X))\right].$$

   Montrer que, si H est *uniformément bornée* [4], $(M_n, n \geq 0)$ est une $\mathcal{F}_n$-martingale dont le crochet $\langle M \rangle_n$ s'exprime sous la forme $\langle M \rangle_n = \sum_{i=0}^{n-1} s^2(\lambda_i)$.

4. i.e., il existe K réel positif tel que pour tout λ et u, $|H(f;\lambda,u)| \leq K < +\infty$

5. Plus généralement montrer que, sous l'hypothèse (9), $(M_n, n \geq 0)$ est une martingale localement dans L^2 de crochet toujours donné par $\langle M \rangle_n = \sum_{i=0}^{n-1} s^2(\lambda_i)$ (on pourra utiliser la famille de temps d'arrêt $\tau_A = \inf\{n \geq 0, |\lambda_n| > A\}$ et vérifier que $(M_{t\wedge\tau_A}, n \geq 0)$ est une martingale bornée dans L^2).
6. En utilisant la loi forte de grand nombre pour les martingales localement dans L^2, montrer que si

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sum_{i=0}^{n-1} s^2(\lambda_i)}{n} = c, \tag{10}$$

où c est une constante strictement positive, alors

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} H(f; \lambda_i, U_{i+1}) = \mathbf{E}(f(X)).$$

Interpréter ce résultat en terme de méthode de Monte-Carlo. Vérifier que, si λ_n converge presque sûrement vers λ^* tel que $s^2(\lambda^*) > 0$, le résultat de cette question est vrai.
7. Quelle hypothèse faudrait-t'il ajouter à (10) pour obtenir un théorème central limite dans la méthode précédente (ne pas chercher à la vérifier) ? Enoncer le résultat que l'on obtiendrait alors.

Partie 2 : Schéma d'Euler avec acceptation de Metropolis-Hastings

Sur l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, on se donne un mouvement brownien $(W_t)_{t\geq 0}$ de dimension n et un vecteur aléatoire X_0 à valeurs dans $\mathbf{R}^n$ indépendants. Ce problème est consacré à la simulation de l'Équation Différentielle Stochastique

$$X_t = X_0 + W_t - \int_0^t \nabla V(X_s) ds$$

où $V : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ une fonction régulière telle que $\int_{\mathbf{R}^n} e^{-2V(x)} dx = 1$. On suppose en particulier que V est C^2 et que ∇V et $\nabla^2 V$ sont lipschitziennes et bornées.
Dans la seconde partie, on montrera que si X_0 possède la densité $e^{-2V(x)}$ par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbf{R}^n$, alors pour tout $t > 0$, X_t possède également la densité $e^{-2V(x)}$. La première partie est consacrée à l'analyse de la convergence forte du schéma d'Euler où, à chaque pas, la nouvelle position est acceptée ou rejetée suivant la règle de Metropolis-Hastings, ce qui permet d'obtenir une dynamique qui préserve la densité invariante $e^{-2V(x)}$.

Schéma d'Euler On suppose que $X_0 = x_0$ où $x_0 \in \mathbf{R}^n$ est déterministe.

1. Écrire le schéma d'Euler $(\bar{X}_{t_k})_{0\leq k\leq N}$ sur la grille $(t_k = \frac{kT}{N})_{0\leq k\leq N}$ où $T \in]0, +\infty[$ est l'horizon de simulation et $N \in \mathbb{N}^*$ le nombre de pas de temps.
2. Quelle est la vitesse forte de ce schéma pour l'EDS considérée ?
3. Quelle est la loi de $\bar{X}_{t_1}$? Donner sa densité que l'on notera $x_1 \to q(x_0, x_1)$.
4. Exprimer à l'aide de

$$\beta(x_0, x_1) = 2V(x_0) + \frac{1}{2t_1}|x_1 - x_0 + \nabla V(x_0)t_1|^2 - 2V(x_1) - \frac{1}{2t_1}|x_0 - x_1 + \nabla V(x_1)t_1|^2$$

le taux d'acceptation $\alpha(x_0, x_1)$ de l'algorithme de Metropolis-Hastings avec noyau de proposition de densité $q(x_0, x_1)$ et densité cible $e^{-2V(.)}$.

5. Montrer que

$$\exists C<\infty,\ \forall N\in\mathbb{N}^*,\ \forall x_0\in\mathbf{R}^n,\ \mathbf{E}(|\bar{X}_{t_1}-x_0|^5)\leq CN^{-5/2}.$$

6. Remarquer que $x\mapsto|\nabla V(x)|^2$ est Lipschitzienne, vérifier que

$$\begin{aligned}2V(x_0)-2V(x_1)&+(x_1-x_0)^t(\nabla V(x_0)+\nabla V(x_1))\\&=\frac{1}{2}\int_0^1(1-u)(x_1-x_0)^t\Big(\nabla^2V(x_1-\frac{u}{2}(x_1-x_0))\\&\qquad\qquad-\nabla^2V(x_0+\frac{u}{2}(x_1-x_0))\Big)(x_1-x_0)du,\end{aligned}$$

et en déduire que

$$\exists C<\infty,\ \forall N\in\mathbf{N}^*,\ \forall x_0,x_1\in\mathbf{R}^n,\ |\beta(x_0,x_1)|\leq C(|x_1-x_0|^3+|x_1-x_0|/N).$$

En remarquant que $\forall x\in\mathbf{R},\ (1-e^x)^+\leq\max(-x,0)\leq|x|$, conclure que

$$\exists C<\infty,\ \forall N\in\mathbf{N}^*,\ \forall x_0,x_1\in\mathbf{R}^n,\ 1-\alpha(x_0,x_1)\leq C(|x_1-x_0|^3+|x_1-x_0|/N).$$

7. Si U est variable uniforme sur $[0,1]$ indépendante de $(W_t)_{t\geq 0}$ et $\hat{X}_{t_1}=x_0 1_{\{U>\alpha(x_0,\bar{X}_{t_1})\}}+\bar{X}_{t_1}1_{\{U\leq\alpha(x_0,\bar{X}_{t_1})\}}$, montrer que

$$\exists C<\infty,\ \forall N\in\mathbb{N}^*,\ \forall x_0\in\mathbf{R}^n,\ \mathbf{E}\left(|\bar{X}_{t_1}-\hat{X}_{t_1}|^2\right)\leq CN^{-5/2}.$$

8. Soit maintenant $\bar{Y}_{t_1}=y_0+W_{t_1}-\nabla V(y_0)t_1$ où $y_0\in\mathbf{R}^n$. On pose

$$f(x_0,y_0)=\mathbf{E}\left(|\hat{X}_{t_1}-\bar{Y}_{t_1}|^2\right).$$

En décomposant sur les événements $\{U\leq\alpha(x_0,\bar{X}_{t_1})\}$ et $\{U>\alpha(x_0,\bar{X}_{t_1})\}$, montrer que

$$|\hat{X}_{t_1}-\bar{Y}_{t_1}|^2\leq(1+1_{\{U>\alpha(x_0,\bar{X}_{t_1})\}})|\bar{X}_{t_1}-\bar{Y}_{t_1}|^2+2|\hat{X}_{t_1}-\bar{X}_{t_1}|^2$$

et en déduire que

$$\exists\mathcal{C}<\infty,\ \forall N\in\mathbb{N}^*,\ \forall x_0,y_0\in\mathbf{R}^n,\ f(x_0,y_0)\leq(1+\mathcal{C}/N)|x_0-y_0|^2+\mathcal{C}N^{-5/2}.$$

On introduit le schéma d'Euler avec acceptation de Metropolis-Hastings défini par $\hat{X}_0=x_0$ et la relation de récurrence

$$\forall k\in\{0,\ldots,N-1\},\ \begin{cases}\tilde{X}_{t_{k+1}}=\hat{X}_{t_k}+W_{t_{k+1}}-W_{t_k}-\nabla V(\hat{X}_{t_k})t_1\\ \hat{X}_{t_{k+1}}=\hat{X}_{t_k}1_{\{U_{k+1}>\alpha(\hat{X}_{t_k},\tilde{X}_{t_{k+1}})\}}+\tilde{X}_{t_{k+1}}1_{\{U_{k+1}\leq\alpha(\hat{X}_{t_k},\tilde{X}_{t_{k+1}})\}}\end{cases}$$

où $(U_k)_{1\leq k\leq N}$ est une suite indépendante de $(W_t)_{t\geq 0}$ de variables aléatoires indépendantes et uniformes sur $[0,1]$. L'intérêt de l'acceptation de Metropolis-Hastings est d'assurer que la densité $e^{-2V(x)}$ est invariante.

9. Montrer que pour $k\in\{0,\ldots,N-1\}$, $\mathbf{E}\left(|\hat{X}_{t_{k+1}}-\bar{X}_{t_{k+1}}|^2\right)=\mathbf{E}\left(f(\hat{X}_{t_k},\bar{X}_{t_k})\right)$ et en déduire que

$$\forall k\in\{1,\ldots,N\},\ \mathbf{E}\left(|\hat{X}_{t_k}-\bar{X}_{t_k}|^2\right)\leq\mathcal{C}N^{-5/2}\sum_{j=0}^{k-1}(1+\mathcal{C}/N)^j.$$

Conclure que

$$\exists C<\infty,\ \forall N\in\mathbb{N}^*,\ \sup_{k\in\{0,\ldots,N\}}\mathbf{E}(|\hat{X}_{t_k}-X_{t_k}|^2)\leq CN^{-3/2}.$$

Densité invariante de l'EDS

10. Que peut-on dire de $(Z_s = X_s - X_0)_{s\in[0,t]}$ sous la probabilité $\mathbb{Q}$ de densité $\mathcal{E}_t = e^{\int_0^t \nabla V(X_s).dW_s - \frac{1}{2}\int_0^t |\nabla V(X_s)|^2 ds}$ par rapport à $\mathbb{P}$?
11. Pour $\varphi : \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ mesurable bornée, vérifier que
$$\mathbf{E}(\varphi(X_0, X_t)) = \mathbf{E}^{\mathbb{Q}}\left(\varphi(X_0, X_0 + Z_t)e^{-\int_0^t \nabla V(X_0+Z_s).dZ_s - \frac{1}{2}\int_0^t |\nabla V(X_0+Z_s)|^2 ds}\right)$$
et en déduire que
$$\mathbf{E}(\varphi(X_0, X_t)) = \mathbf{E}\left(\varphi(X_0, X_0 + W_t)e^{V(X_0)-V(X_0+W_t)+\frac{1}{2}\int_0^t (\Delta V - |\nabla V|^2)(X_0+W_s)ds}\right).$$
12. Soit $(B_s)_{s\in[0,t]}$ un mouvement brownien indépendant de $(W_s)_{s\geq 0}$ et de X_0. Pour $0 \leq r \leq s \leq t$, calculer $\mathrm{Cov}(B_r - \frac{r}{t}(B_t - W_t), B_s - \frac{s}{t}(B_t - W_t))$. En déduire que $(\beta_s = B_s - \frac{s}{t}(B_t - W_t))_{s\in[0,t]}$ est un mouvement brownien indépendant de X_0 tel que $\beta_t = W_t$ puis que
$$\mathbf{E}(\varphi(X_0, X_t)) = \mathbf{E}\left(\varphi(X_0, X_0 + W_t)e^{V(X_0)-V(X_0+W_t)}\psi_t(X_0, X_0 + W_t)\right)$$
où $\psi_t(x, y) = \mathbf{E}\left(e^{\frac{1}{2}\int_0^t (\Delta V - |\nabla V|^2)(\frac{t-s}{t}x + \frac{s}{t}y + B_s - \frac{s}{t}B_t)ds}\right)$.

On supose désormais que X_0 possède la densité $e^{-2V(x)}$.

13. Montrer que
$$\mathbf{E}(\varphi(X_0, X_t)) = (2\pi t)^{-n/2}\int_{\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n} \varphi(x, y)e^{-V(x)-V(y)-\frac{|x-y|^2}{2t}}\psi_t(x, y)dxdy.$$
14. En remarquant que $(B_s)_{s\in[0,t]}$ a même loi que $(B_{t-s} - B_t)_{s\in[0,t]}$, vérifier que $(B_s - \frac{s}{t}B_t)_{s\in[0,t]}$ a même loi que $(B_{t-s} - \frac{t-s}{t}B_t)_{s\in[0,t]}$. Conclure que $\psi_t(x, y) = \psi_t(y, x)$.
15. En déduire que $\mathbf{E}(\varphi(X_0, X_t)) = \mathbf{E}(\varphi(X_t, X_0))$ et conclure que X_t possède la densité $e^{-2V(x)}$.

Méthodes de Monte-Carlo en finance

Examen du mardi 3 février 2015 8h30-11h30

Partie 1 : Méthode de biaisage d'un tirage uniforme par une loi β

Le cas de la dimension 1. On note U une variable aléatoire de loi uniforme sur l'intervalle $[0,1]$. On considère la famille de loi $\beta(a,1)$ dont la densité est donnée, pour $a>0$, par :

$$au^{a-1}\mathbf{1}_{\{u\in[0,1]\}}.$$

On note V_a une variable aléatoire de de loi $\beta(a,1)$.

1. Proposer une méthode de simulation selon la loi $\beta(a,1)$. Pour g une fonction bornée, comment peut-on estimer $\mathbf{E}\left(g(V_a)\right)$ à l'aide d'une méthode de Monte-Carlo ? Comment obtenir un ordre de grandeur de l'erreur dans cette méthode ?
2. Vérifier que, si f est une fonction de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ telle que $\mathbf{E}(|f(U)|)<+\infty$, pour tout $a>0$:
$$\mathbf{E}\left(f(U)\right)=\mathbf{E}\left(\frac{f(V_a)}{aV_a^{a-1}}\right).$$
Comment utiliser cette relation pour calculer $\mathbf{E}\left(f(U)\right)$ à l'aide d'une méthode de Monte-Carlo ? Quelle fonction de a doit on alors minimiser pour obtenir une méthode optimale ?
3. On suppose que f est bornée. Montrer que, pour tout $0<a<2$:
$$\sigma_a^2=\text{Var}\left(\frac{f(V_a)}{aV_a^{a-1}}\right)=\mathbf{E}\left(\frac{f^2(U)}{aU^{a-1}}\right)-\mathbf{E}\left(f(U)\right)^2.$$
4. En utilisant le lemme de Fatou, montrer que, si $\mathbf{P}(f(U)\neq 0)>0$, $\lim_{a\to 0^+}\sigma_a^2=+\infty$. Puis que, si f est continue en 0 avec $f(0)\neq 0$, $\lim_{a\to 2^-}\sigma_a^2=+\infty$.
On supposera, dans la suite, que f est bornée, continue en 0 avec $f(0)\neq 0$ (ce qui implique que $\mathbf{P}(f(U)\neq 0)>0$).
5. Montrez que, pour $0<a<2$, σ_a^2 admet des dérivées d'ordre 1 et 2 par rapport à a qui s'écrivent sous la forme :
$$\frac{d\sigma_a^2}{da}=\mathbf{E}\left(f^2(U)g_1(a,U)\right)\ \text{et}\ \frac{d^2\sigma_a^2}{da^2}=\mathbf{E}\left(f^2(U)g_2(a,U)\right),$$
g_1 et g_2 étant des fonctions de $\mathbf{R}^{+*}\times[0,1]$ dans $\mathbf{R}$ que l'on calculera.
6. En déduire que σ_a^2 est une fonction convexe sur l'intervalle $]0,2[$ qui atteint son minimum au point $\hat{a}$ solution unique de l'équation $\psi(a)=0$ où
$$\psi(a)=\mathbf{E}\left(\frac{f^2(U)}{a^2U^{a-1}}\left(1-a|\ln(U)|\right)\right).$$
7. Soit $(U_n,n\geq 1)$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant une loi uniforme sur $[0,1]$. On définit $\psi_n(a)$, pour $a>0$, par
$$\psi_n(a)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n\frac{f^2(U_i)}{a^2U_i^{a-1}}\left(1-a|\ln(U_i)|\right)$$
Vérifier que, pour $a\in]0,2[$, $\psi_n(a)$ converge presque sûrement vers $\psi(a)$ lorsque n tends vers $+\infty$.
8. On pose $\tau=\inf\{k\geq 0,|f(U_k)|>0\}$. Vérifier que $\mathbf{P}(\tau<+\infty)=1$. Montrer que, pour $n\geq\tau$, $\psi_n(a)$ est une fonction continue et croissante de a vérifiant $\psi_n(0^-)=-\infty$ et $\psi_n(+\infty)=+\infty$. En déduire qu'il existe une unique $\hat{a}_n>0$ tel que $\psi_n(a_n)=0$. Proposer un algorithme permettant de calculer a_n et puis (sans preuve) une méthode d'approximation de $\hat{a}$.

Partie 2 : Estimateur parametrix du prix d'une option vanille

Ce problème est consacré à l'estimateur parametrix du prix $\mathbf{E}[f(X_S)]$ d'une option vanille de maturité S déterministe, de fonction de payoff $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, C^∞ à dérivées à croissance polynomiale, portant sur le sous-jacent $(X_t)_{t \leq S}$ dont l'évolution temporelle est donnée par l'EDS

$$\begin{cases} dX_t = \sigma(X_t)dW_t + b(X_t)dt \\ X_0 = x_0 \end{cases} \tag{11}$$

où $(W_t)_{t \geq 0}$ est un mouvement brownien standard de dimension 1, $\sigma, b : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ sont des fonctions C^∞ à dérivées bornées et $\inf_{x \in \mathbf{R}} \sigma(x) > 0$. On pose $\boxed{a(x) = \sigma^2(x)}$.

Représentation Poissonnienne d'une somme d'intégrales multiples Soit $(N_t)_{t \geq 0}$ un processus de Poisson de paramètre λ, de temps de sauts $(T_k)_{k \geq 1}$, indépendant de $(W_t)_{t \geq 0}$ et pour tout $k \in \mathbf{N}$, $\psi_k : [0, S]^k \to \mathbf{R}_+$ une fonction mesurable ($\psi_0 \in \mathbf{R}_+$ est une constante).

1. On pose $T_0 = 0$. Que peut-on dire des variables aléatoires $(\tau_k = T_k - T_{k-1})_{k \geq 1}$?
2. Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Exprimer à l'aide du vecteur $(\tau_1, \ldots, \tau_{n+1})$ la variable aléatoire $1_{\{N_S = n\}} \psi_n(T_1, \ldots, T_n)$. En déduire que
$$\mathbf{E}\left[1_{\{N_S=n\}} \psi_n(T_1, \ldots, T_n)\right] = e^{-\lambda S} \int_{0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \ldots \leq t_n \leq S} \lambda^n \psi_n(t_1, \ldots, t_n) dt_1 \ldots dt_n.$$
3. En déduire, avec la convention $\psi_0(T_1, \ldots, T_0) = \psi_0$, que
$$\begin{aligned} &e^{\lambda S} \mathbf{E}\left[\psi_{N_S}(T_1, \ldots, T_{N_s})\right] \\ &\quad = \psi_0 + \sum_{n \in \mathbf{N}^*} \int_{0 \leq u_n \leq u_{n-1} \leq \ldots \leq u_1 \leq S} \lambda^n \psi_n(S - u_1, \ldots, S - u_n) du_n \ldots du_1. \end{aligned}$$

Méthode parametrix Pour $s \geq 0$ et $x \in \mathbf{R}$, on note X_s^x la solution à l'instant s de l'EDS

$$X_s^x = x + \int_0^s \sigma(X_u^x) dW_u + \int_0^s b(X_u^x) du$$

et $\bar{X}_s^x = x + \sigma(x) W_s + b(x)s$. Pour $\varphi : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ régulière, on note également, $\bar{P}_s \varphi(x) = \mathbf{E}[\varphi(\bar{X}_s^x)]$ et $P_s \varphi(x)$ la solution de l'EDP

$$\begin{cases} \partial_s P_s \varphi(x) = L(P_s \varphi)(x), \ (s, x) \in \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R} \\ P_0 \varphi(x) = \varphi(x), \ x \in \mathbf{R} \end{cases} \quad \text{où } L\psi(x) = \frac{a(x)}{2} \psi''(x) + b(x) \psi'(x).$$

On admet que cette solution est C^∞ avec des dérivées bornées.

4. Soit $t > 0$ et $x \in \mathbf{R}$. Calculer $dP_{t-s} \varphi(X_s^x)$ par la formule d'Itô et en déduire que $P_t \varphi(x) = \mathbf{E}[\varphi(X_t^x)]$.
5. Vérifier que pour $s > 0$, $\bar{X}_s^x$ possède la densité $g_s(x, y) = \frac{1}{\sigma(x)\sqrt{2\pi s}} e^{-\frac{(y-x-b(x)s)^2}{2a(x)s}}$. Calculer $\partial_s \ln(g_s(x, y))$ et en déduire que $\partial_s \bar{P}_s \varphi(x) = \int_{\mathbf{R}} \varphi(y) \bar{\theta}_s(x, y) g_s(x, y) dy$ où
$$\bar{\theta}_s(x, y) = -\frac{1}{2s} + \frac{(y - x - b(x)s)^2}{2a(x)s^2} + \frac{b(x)(y - x - b(x)s)}{a(x)s}.$$

6. Calculer $\partial_y \ln(g_s(x,y))$ et vérifier que

$$\partial^2_{yy} g_s(x,y) = \left(\frac{(y-x-b(x)s)^2}{a^2(x)s^2} - \frac{1}{a(x)s}\right) g_s(x,y).$$

Expliquer, sans détailler les calculs, comment en déduire que $\bar{P}_s L\psi(x) = \int_{\mathbf{R}} \psi(y)\tilde{\theta}_s(x,y)g_s(x,y)dy$ où

$$\tilde{\theta}_s(x,y) = \frac{1}{2}a''(y) - b'(y) + \frac{(y-x-b(x)s)(b-a')(y)}{a(x)s} + \frac{a(y)}{2}\left(\frac{(y-x-b(x)s)^2}{a^2(x)s^2} - \frac{1}{a(x)s}\right).$$

7. Remarquer que pour $t \geq u \geq 0$, $\partial_u(\bar{P}_{t-u}P_u\varphi(x)) = -(\partial_s \bar{P}_s|_{s=t-u})P_u\varphi(x) + \bar{P}_{t-u}LP_u\varphi(x)$ et en déduire que

$$P_t\varphi(x) - \bar{P}_t\varphi(x) = \int_0^t Q_{t-u}P_u\varphi(x)du$$

où $Q_s\psi(x) = \int_{\mathbf{R}} \psi(y)\theta_s(x,y)g_s(x,y)dy$ pour une fonction θ_s que l'on exprimera à l'aide de $\bar{\theta}_s$ et $\tilde{\theta}_s$.

8. Montrer que $(P_t - \bar{P}_t)\varphi(x) = \int_0^t Q_{t-u}\bar{P}_u\varphi(x)du + \int_0^t Q_{t-u}(P_u - \bar{P}_u)\varphi(x)du$.

9. En déduire que pour tout $m \in \mathbf{N}^*$,

$$\mathbf{E}[f(X_S)] = \bar{P}_S f(x_0) + \sum_{n=1}^{m} \int_{0\leq u_n \leq u_{n-1}\leq \ldots \leq u_1 \leq S} Q_{S-u_1}Q_{u_1-u_2}\ldots Q_{u_{n-1}-u_n}\bar{P}_{u_n}f(x_0)du_1\ldots du_n + R_m$$

où

$$R_m = \int_{0\leq u_m \leq u_{m-1}\leq \ldots \leq u_1 \leq S} Q_{S-u_1}Q_{u_1-u_2}\ldots Q_{u_{m-1}-u_m}(P_{u_m} - \bar{P}_{u_m})f(x_0)du_1\ldots du_m.$$

10. En admettant que $\lim_{m\to\infty} R_m = 0$, en déduire à l'aide de la question 3 que

$$\mathbf{E}[f(X_S)] = e^{\lambda S}\mathbf{E}\left[\lambda^{-N_S}Q_{T_1}Q_{T_2-T_1}\ldots Q_{T_{N_S}-T_{N_S-1}}\bar{P}_{S-T_{N_S}}f(x_0)\right],$$

où, par convention, $Q_{T_1}Q_{T_2-T_1}\ldots Q_{T_{N_S}-T_{N_S-1}}\bar{P}_{S-T_{N_S}}f(x_0) = \bar{P}_{S-T_0}f(x_0) = \bar{P}_S f(x_0)$ si $N_S = 0$.

On définit par récurrence

$$\begin{cases} \bar{X}_0 = x_0 \\ \forall k \in \{0,\ldots,N_S-1\},\ \bar{X}_{T_{k+1}} = \bar{X}_{T_k} + \sigma(\bar{X}_{T_k})(W_{T_{k+1}} - W_{T_k}) + b(\bar{X}_{T_k})(T_{k+1}-T_k) \\ \bar{X}_S = \bar{X}_{T_{N_S}} + \sigma(\bar{X}_{T_{N_S}})(W_S - W_{T_{N_S}}) + b(\bar{X}_{T_{N_S}})(S - T_{N_S}) \end{cases}$$

où la seconde étape n'a pas lieu lorsque $N_S = 0$.

11. Quelle est la loi conditionnelle de $W_S - W_{T_{N_S}}$ sachant $(N_t)_{t\leq S}$ et $(W_t)_{t\leq T_{N_S}}$? En déduire que

$$\mathbf{E}\left[f(\bar{X}_S)|(N_t)_{t\leq S},(W_t)_{t\leq T_{N_S}}\right] = \bar{P}_{S-T_{N_s}}f(\bar{X}_{T_{N_s}}),$$

et sur $\{N_S \geq 1\}$,

$$\mathbf{E}\left[f(\bar{X}_S)\theta_{T_{N_S}-T_{N_S-1}}(\bar{X}_{T_{N_S-1}}\bar{X}_{T_{N_S}})|(N_t)_{t\leq S},(W_t)_{t\leq T_{N_S-1}}\right] = Q_{T_{N_S}-T_{N_S-1}}\bar{P}_{S-T_{N_s}}f(\bar{X}_{T_{N_s-1}}).$$

En déduire que sur $\{N_S \geq 1\}$,

$$\mathbf{E}\left[f(\bar{X}_S)\prod_{k=1}^{N_S}\theta_{T_k-T_{k-1}}(\bar{X}_{T_{k-1}},\bar{X}_{T_k})\middle|(N_t)_{t\leq S}\right] = Q_{T_1}Q_{T_2-T_1}\dots Q_{T_{N_S}-T_{N_S-1}}\bar{P}_{S-T_{N_S}}f(x_0).$$

12. Conclure que

$$\mathbf{E}[f(X_S)] = e^{\lambda S}\mathbf{E}\left[\lambda^{-N_S}f(\bar{X}_S)\prod_{k=1}^{N_S}\theta_{T_k-T_{k-1}}(\bar{X}_{T_{k-1}},\bar{X}_{T_k})\right]$$

avec la convention que le produit vaut 1 lorsque $N_S = 0$.

Méthodes de Monte-Carlo en finance

Examen du mardi 11 février 2014 8h30-11h30

On s'intéresse au calcul de $\mathbf{E}[f(X_T)]$ où $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ est une fonction C^4 **lipschitzienne** avec des dérivées à croissance polynomiale et $(X_t)_{t\in[0,T]}$ est la solution de l'EDS

$$\begin{cases} dX_t = \sigma(X_t)dW_t + b(X_t)dt \\ X_0 = x_0 \end{cases} \tag{12}$$

où $(W_t)_{t\geq 0}$ est un mouvement brownien à valeurs $\mathbf{R}^d$, $\sigma : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^{n\times d}$ et $b : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ sont des fonctions C^4 à dérivées bornées et $x_0 \in \mathbf{R}^n$. On note X_T^N l'approximation de X_T obtenue par un schéma de discrétisation comportant N pas de discrétisation et **dont le temps de calcul est proportionnel à** N. On suppose que les ordres de convergence forte et de convergence faible pour la fonction f de ce schéma sont respectivement égaux à $\alpha/2$ et β avec $\alpha, \beta \geq 1$:

$$\exists C < +\infty,\ \forall N \in \mathbb{N}^*,\ \mathbf{E}[|X_T - X_T^N|^2] \leq \frac{C}{N^\alpha} \text{ et } |\mathbf{E}[f(X_T) - f(X_T^N)]| \leq \frac{C}{N^\beta}.$$

Méthode de Monte Carlo multipas

1. Soit Y un estimateur de $\mathbf{E}[f(X_T)]$ de carré intégrable. Montrer la décomposition biais/variance

$$\mathbf{E}[(\mathbf{E}(f(X_T)) - Y)^2] = (\mathbf{E}[f(X_T) - Y])^2 + \mathrm{Var}(Y)$$

   de l'erreur quadratique.

2. On suppose que $Y = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^M f(X_T^{i,N})$ est la moyenne empirique de M copies indépendantes de $f(X_T^N)$.
   (a) Combien de pas N faut-il choisir pour que $(\mathbf{E}[f(X_T) - Y])^2$ soit égal à ε^2 où ε est un niveau de précision donné petit ?
   (b) Vérifier que $\lim_{N\to\infty} \mathbf{E}[(f(X_T) - f(X_T^N))^2] = 0$.
   En déduire que $\lim_{N\to\infty} \mathrm{Var}(f(X_T^N)) = \mathrm{Var}(f(X_T))$. Combien de copies M faut-il choisir pour que $\mathrm{Var}(Y)$ soit égale à ε^2 ?
   (c) Conclure que le temps de calcul nécessaire pour atteindre la précision ε (i.e. une erreur quadratique égale à $2\varepsilon^2$) est proportionnel à $\varepsilon^{-(2+1/\beta)}$?

3. On s'intéresse maintenant à l'estimateur multipas proposé par Giles[5] $Y = \sum_{l=0}^L Y_{l,M_l}$ où les variables Y_{l,M_l} sont indépendantes et
   — Y_{0,M_0} est la moyenne empirique de M_0 copies indépendantes de $f(X_T^1)$,
   — pour $l \in \{1, \ldots, L\}$, Y_{l,M_l} est la moyenne empirique de M_l copies indépendantes de $f(X_T^{2^l}) - f(X_T^{2^{l-1}})$.

   (a) Vérifier que $\mathbf{E}[Y] = \mathbf{E}[f(X_T^{2^L})]$ et en déduire que

$$\exists C > 0, \forall \varepsilon \in]0, 1[,\ L \geq -\frac{\log_2(\varepsilon/C)}{\beta} \Rightarrow |\mathbf{E}[f(X_T) - Y]| \leq \varepsilon.$$

5. M.B. Giles, Multi-level Monte Carlo path simulation, *Operations Research*, 56(3) :607-617, 2008

(b) En remarquant que pour $l \in \mathbf{N}^*$,

$$(f(X_T^{2^l}) - f(X_T^{2^{l-1}}))^2 \leq 2\left((f(X_T^{2^l}) - f(X_T))^2 + (f(X_T) - f(X_T^{2^{l-1}}))^2\right),$$

vérifier que $\sup_{l\in\mathbf{N}^*} 2^{l\alpha}\mathbf{E}[(f(X_T^{2^l}) - f(X_T^{2^{l-1}}))^2] < +\infty$. En déduire

$$\exists \tilde{C} < +\infty \text{ t.q. } \forall L \in \mathbf{N}^*,\ \forall (M_0, \ldots, M_L) \in \mathbf{N}^{*L},\ \text{Var}(Y) \leq \tilde{C} \sum_{l=0}^{L} \frac{1}{M_l 2^{l\alpha}}.$$

On pose $p_l = \frac{\tilde{C}}{\varepsilon^2 M_l 2^{l\alpha}}$ pour $l \in \{0, \ldots, L\}$.

(c) Vérifier que $\sum_{l=0}^{L} p_l \leq 1 \Rightarrow \text{Var}(Y) \leq \varepsilon^2$.
Justifier que le temps de calcul de Y est proportionnel à $\tau = \sum_{l=0}^{L} M_l 2^l$.

Pour approcher la minimisation du temps de calcul sous la contrainte $\text{Var}(Y) \leq \varepsilon^2$, nous allons minimiser τ sous la contrainte $\sum_{l=0}^{L} p_l \leq 1$.

(d) Vérifier que $\tau = \frac{\varepsilon^2}{\tilde{C}}\left(\sum_{l=0}^{L}(M_l 2^{l(1+\alpha)/2})^2 p_l\right)$ et en déduire à l'aide de l'inégalité de Cauchy-Schwarz que

$$\tau \geq \frac{\tilde{C}}{\varepsilon^2}\left(\sum_{l=0}^{L} 2^{l(1-\alpha)/2}\right)^2.$$

Vérifier que $\left(M_l = \frac{\tilde{C}\sum_{k=0}^{L} 2^{k(1-\alpha)/2}}{\varepsilon^2 2^{l(1+\alpha)/2}}\right)_{0\leq l\leq L}$ atteint ce minorant et satisfait la contrainte.

(e) En déduire que le temps de calcul pour atteindre la précision ε est d'ordre $\frac{(\log_2(\varepsilon))^2}{\varepsilon^2}$ si $\alpha = 1$ et $\frac{1}{\varepsilon^2}$ si $\alpha > 1$.

4. Comparer les temps de calcul de l'estimateur monopas et de l'estimateur multipas pour le schéma d'Euler.

Pour $j \in \{1, \ldots, d\}$ et $x \in \mathbf{R}^n$, on note $\sigma_j(x) \in \mathbf{R}^n$ la j-ème colonne de la matrice $\sigma(x)$ et $\partial\sigma_j \in \mathbf{R}^{n\times n}$ la matrice $\left(\frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial x_l}(x)\right)_{il}$.

5. Comparer les temps de calcul des deux estimateurs pour le schéma de Milstein (pour lequel $\beta = 1$). Sous quelle condition peut-on effectivement implémenter le schéma de Milstein ?

Schéma de Giles et Szpruch et transpositions d'accroissements browniens

Pour $j, m \in \{1, \ldots, d\}$, on définit $\theta_{jm}, \eta_{jm} : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ par $\theta_{jm}(x) = \frac{\partial\sigma_j\sigma_m + \partial\sigma_m\sigma_j}{4}(x)$ et $\eta_{jm}(x) = \frac{\partial\sigma_j\sigma_m - \partial\sigma_m\sigma_j}{4}(x)$. On suppose que les fonctions θ_{jm} sont **lipschitziennes**. On pose

$$\hat{X}_t = x_0 + \sigma(x_0)W_t + b(x_0)t + \sum_{j,m=1}^{d} \theta_{jm}(x_0)W_t^j W_t^m$$

$$\tilde{X}_t = \hat{X}_{\frac{t}{2}} + \sigma(\hat{X}_{\frac{t}{2}})(W_t - W_{\frac{t}{2}}) + b(\hat{X}_{\frac{t}{2}})\frac{t}{2} + \sum_{j,m=1}^{d} \theta_{jm}(\hat{X}_{\frac{t}{2}})(W_t^j - W_{\frac{t}{2}}^j)(W_t^m - W_{\frac{t}{2}}^m)$$

6. Vérifier que

$$\exists C < +\infty,\ \forall t \in [0, T],\ \mathbf{E}[|\hat{X}_t - x_0 - \sigma(x_0)W_t|^2] \leq Ct^2 \text{ et } \mathbf{E}[|\hat{X}_t - x_0|^2] \leq Ct.$$

7. Montrer que

$$\mathbf{E}\left[\left|(\theta_{jm}(\hat{X}_{\frac{t}{2}})-\theta_{jm}(x_0))(W^j_t-W^j_{\frac{t}{2}})(W^m_t-W^m_{\frac{t}{2}})\right|^2\right]=\frac{t^2(1+2\times 1_{\{j=m\}})}{4}\times\mathbf{E}\left[\left|\theta_{jm}(\hat{X}_{\frac{t}{2}})-\theta_{jm}(x_0)\right|^2\right].$$

En déduire l'existence d'une constante $C<+\infty$ telle que pour tout $t\in[0,T]$,

$$\mathbf{E}\Bigg[\Bigg|b(\hat{X}_{\frac{t}{2}})\frac{t}{2}+\sum_{j,m=1}^{d}\theta_{jm}(\hat{X}_{\frac{t}{2}})(W^j_t-W^j_{\frac{t}{2}})(W^m_t-W^m_{\frac{t}{2}}) - b(x_0)\frac{t}{2}-\sum_{j,m=1}^{d}\theta_{jm}(x_0)(W^j_t-W^j_{\frac{t}{2}})(W^m_t-W^m_{\frac{t}{2}})\Bigg|^2\Bigg]\leq Ct^3.$$

8. Pour $\varphi:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$ fonction C^1 telle que φ et $\nabla\varphi$ sont Lipschitziennes, en remarquant l'existence d'une variable aléatoire α_t à valeurs dans $[0,1]$ t.q.

$$\varphi(x_0+\sigma(x_0)W_t)-\varphi(x_0)-\nabla\varphi(x_0).\sigma(x_0)W_t=\left(\nabla\varphi(x_0+\sigma(x_0)\alpha_tW_t)-\nabla\varphi(x_0)\right).\sigma(x_0)W_t,$$

montrer

$$\exists C<+\infty,\ \forall t\in[0,T],\ \mathbf{E}[(\varphi(\hat{X}_t)-\varphi(x_0)-\nabla\varphi(x_0).\sigma(x_0)W_t)^2]\leq Ct^2.$$

En déduire l'existence d'une constante $C<+\infty$ telle que pour tout $t\in[0,T]$,

$$\mathbf{E}\left[\left|(\sigma(\hat{X}_{\frac{t}{2}})-\sigma(x_0))(W_t-W_{\frac{t}{2}})-\sum_{j,m=1}^{d}\partial\sigma_j\sigma_m(x_0)W^m_{\frac{t}{2}}(W^j_t-W^j_{\frac{t}{2}})\right|^2\right]\leq Ct^3.$$

9. En utilisant les propriétés de symétrie de θ et η, vérifier que

$$\sum_{j,m=1}^{d}\partial\sigma_j\sigma_m(x_0)W^m_{\frac{t}{2}}(W^j_t-W^j_{\frac{t}{2}})=\sum_{j,m=1}^{d}\theta_{jm}(x_0)\left[W^m_{\frac{t}{2}}(W^j_t-W^j_{\frac{t}{2}})+W^j_{\frac{t}{2}}(W^m_t-W^m_{\frac{t}{2}})\right]+\sum_{j,m=1}^{d}\eta_{jm}(x_0)\left[W^m_{\frac{t}{2}}(W^j_t-W^j_{\frac{t}{2}})-W^j_{\frac{t}{2}}(W^m_t-W^m_{\frac{t}{2}})\right]$$

10. Que vaut $W^j_{\frac{t}{2}}W^m_{\frac{t}{2}}+W^m_{\frac{t}{2}}(W^j_t-W^j_{\frac{t}{2}})+W^j_{\frac{t}{2}}(W^m_t-W^m_{\frac{t}{2}})+(W^j_t-W^j_{\frac{t}{2}})(W^m_t-W^m_{\frac{t}{2}})$?
11. En déduire l'existence d'une constante $C<+\infty$ telle que $\forall t\in[0,T]$,

$$\mathbf{E}\left[\left|\tilde{X}_t-\hat{X}_t-\sum_{j,m=1}^{d}\eta_{jm}(x_0)[W^m_{\frac{t}{2}}(W^j_t-W^j_{\frac{t}{2}})-W^j_{\frac{t}{2}}(W^m_t-W^m_{\frac{t}{2}})]\right|^2\right]\leq Ct^3.$$

On pose

$$\bar{X}_{\frac{t}{2}}=x_0+\sigma(x_0)(W_t-W_{\frac{t}{2}})+b(x_0)\frac{t}{2}+\sum_{j,m=1}^{d}\theta_{jm}(x_0)(W^j_t-W^j_{\frac{t}{2}})(W^m_t-W^m_{\frac{t}{2}})$$

$$\bar{X}_t=\bar{X}_{\frac{t}{2}}+\sigma(\bar{X}_{\frac{t}{2}})W_{\frac{t}{2}}+b(\bar{X}_{\frac{t}{2}})\frac{t}{2}+\sum_{j,m=1}^{d}\theta_{jm}(\bar{X}_{\frac{t}{2}})W^j_{\frac{t}{2}}W^m_{\frac{t}{2}}$$

12. Vérifier que $\bar{X}_t$ a même loi que $\tilde{X}_t$ et montrer sans calcul l'existence d'une constante $C < +\infty$ telle que $\forall t \in [0,T]$,

$$\mathbf{E}\left[\left|\bar{X}_t - \hat{X}_t - \sum_{j,m=1}^{d} \eta_{jm}(x_0)[(W^m_t - W^m_{\frac{t}{2}})W^j_{\frac{t}{2}} - (W^j_t - W^j_{\frac{t}{2}})W^m_{\frac{t}{2}}]\right|^2\right] \leq Ct^3.$$

13. Conclure que

$$\exists C < +\infty,\ \forall t \in [0,T],\ \mathbf{E}\left[\left|\hat{X}_t - \frac{\tilde{X}_t + \bar{X}_t}{2}\right|^2\right] \leq Ct^3.$$

On note maintenant $(\hat{X}^N)$ le schéma défini par $\hat{X}^N_0 = x_0$ et la relation de récurrence : $\forall k \in \{0,\ldots,N-1\}$,

$$\hat{X}^N_{t_{k+1}} = \hat{X}^N_{t_k} + \sigma(\hat{X}^N_{t_k})(W_{t_{k+1}} - W_{t_k}) + b(\hat{X}^N_{t_{k+1}})\frac{T}{N} + \sum_{j,m=1}^{d} \theta_{jm}(\hat{X}^N_{t_k})(W^m_{t_{k+1}} - W^m_{t_k})(W^j_{t_{k+1}} - W^j_{t_k}).$$

Soit $(\bar{X}^{2N})$ le schéma défini comme $(\hat{X}^{2N})$ mais en transposant chaque paire d'accroissements browniens successifs i.e. en remplaçant

$$(W_{\frac{T}{2N}}, W_{\frac{2T}{2N}} - W_{\frac{T}{2N}}, W_{\frac{3T}{2N}} - W_{\frac{2T}{2N}}, W_{\frac{4T}{2N}} - W_{\frac{3T}{2N}}, \ldots, W_{\frac{(2N-1)T}{2N}} - W_{\frac{(2N-2)T}{2N}}, W_{\frac{2NT}{2N}} - W_{\frac{(2N-1)T}{2N}})$$

par $(W_{\frac{2T}{2N}} - W_{\frac{T}{2N}}, W_{\frac{T}{2N}}, W_{\frac{4T}{2N}} - W_{\frac{3T}{2N}}, W_{\frac{3T}{2N}} - W_{\frac{2T}{2N}}, \ldots, W_{\frac{2NT}{2N}} - W_{\frac{(2N-1)T}{2N}}, W_{\frac{(2N-1)T}{2N}} - W_{\frac{(2N-2)T}{2N}})$.

14. Pourquoi peut-on anticiper le résultat prouvé par Giles et Szpruch [6]

$$\exists C < +\infty,\ \forall N \in \mathbf{N}^*,\ \mathbf{E}\left[\left|\hat{X}^N_T - \frac{\hat{X}^{2N}_T + \bar{X}^{2N}_T}{2}\right|^2\right] \leq \frac{C}{N^2}?$$

15. On admet que $\beta = 1$ pour le schéma $\hat{X}^N$. Pourquoi l'estimateur multipas $Y = \sum_{l=0}^{L} Y_{l,M_l}$ de $\mathbf{E}[f(X_T)]$ où les variables Y_{l,M_l} sont indépendantes et
    - Y_{0,M_0} est la moyenne empirique de M_0 copies indépendantes de $f(\hat{X}^1_T)$,
    - pour $l \in \{1,\ldots,L\}$, Y_{l,M_l} est la moyenne empirique de M_l copies indépendantes de $\frac{f(\hat{X}^{2^l}_T)+f(\bar{X}^{2^l}_T)}{2} - f(\hat{X}^{2^{l-1}}_T)$.

    atteint-il la précision ε avec un temps de calcul de l'ordre de ε^{-2} ?

6. M.B. Giles et L. Szpruch, Antithetic multilevel Monte Carlo estimation for multi-dimensional SDEs without Lévy area simulation, to appear in *Ann. Appl. Probab.*

Méthodes de Monte-Carlo en finance

Examen du jeudi 9 février 2012 8h30-11h30

Partie I : Biaisage gaussien “prévisible”

Soit $G = (G_1, G_2, \ldots, G_n)$ un vecteur de gaussiennes, centrées, réduites, indépendantes.

1. Soit ϕ une fonction de $\mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{R}$ bornée. Décrire une méthode de Monte-Carlo permettant de calculer $\mathbf{E}\left(\phi(G_1, \cdots, G_n)\right)$. Comment peut on estimer l'erreur de la méthode proposée ?

On considère n fonctions $\lambda_i(g)$, $i = 1, \ldots, n$, telles que : $\lambda_i(g) = f_i(g_1, \ldots, g_{i-1})$, où les f_i sont des fonctions de $\mathbf{R}^{i-1}$ dans $\mathbf{R}$, supposées régulières et bornées (f_1 et donc λ_1 sont supposées constantes).

On note R_λ la transformation de $\mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{R}^n$ qui associe à g, $g' = R_\lambda(g)$ dont les coordonnées sont calculées par, i croissant de 1 à n,

$$g'_i = g_i + f_i(g'_1, \ldots, g'_{i-1}) = g_i + \lambda_i(g').$$

2. Montrer que R_λ est une transformation bijective de $\mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{R}^n$. On vérifiera que R_λ^{-1} son inverse est donné par $R_\lambda^{-1}(g')_i = g'_i - \lambda_i(g')$.
   Montrer que le déterminant de la matrice jacobienne de R_λ^{-1} est identiquement égal à 1.

On définit la variable aléatoire $M_n^\lambda(G)$ par

$$M_n^\lambda(G) = \exp\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i(G)G_i - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n \lambda_i^2(G)\right)$$

3. Soit $\mathcal{F}_i = \sigma(G_1, \ldots, G_i)$ montrer que, pour $i \leq n$,
   $$\mathbf{E}\left(\exp\left(\lambda_i(G)G_i - \frac{1}{2}\lambda_i^2(G)\right)|\mathcal{F}_{i-1}\right) = 1.$$
   En déduire que $\mathbf{E}(M_n^\lambda(G)) = 1$.
4. Vérifier que l'on définit une nouvelle probabilité $\mathbf{P}^{(\lambda)}$ en posant
   $$\mathbf{P}^{(\lambda)}(A) = \mathbf{E}\left(M_n^\lambda(G)\mathbf{1}_{\{A\}}\right).$$
   et que l'on a ($\mathbf{E}^{(\lambda)}$ désigne l'espérance sous la probabilité $\mathbf{P}^{(\lambda)}$)
   $$\mathbf{E}^{(\lambda)}(X) = \mathbf{E}\left(M_n^\lambda(G)X\right)$$
   pour toute variable aléatoire $\mathbf{P}^{(\lambda)}$-intégrable X.
5. En utilisant le changement de variable $g = R_\lambda^{-1}(g')$, montrer que la loi de G sous $\mathbf{P}^{(\lambda)}$ est identique à celle de $R_\lambda(G)$ sous $\mathbf{P}$. En déduire une méthode de simulation de la loi de G sous $\mathbf{P}^{(\lambda)}$.
6. On note $X^\lambda = \phi(G)/M_n^\lambda(G)$. Vérifier que $\mathbf{E}^{(\lambda)}(X^\lambda) = \mathbf{E}\left(\phi(G)\right)$ et montrer que la variance de X^λ sous $\mathbf{P}^{(\lambda)}$ est donnée par
   $$\mathrm{Var}^{(\lambda)}(X^\lambda) = \mathbf{E}\left(e^{-\sum_{i=1}^n \lambda_i(G)G_i + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n \lambda_i^2(G)}\phi(G)^2\right) - \mathbf{E}\left(\phi(G)\right)^2$$
7. Comment peut on simuler une variable aléatoire dont la loi est celle de $X^\lambda = \phi(G)/M_n^\lambda(G)$ sous $\mathbf{P}^{(\lambda)}$? Quel est l'intérêt de pouvoir représenter $\mathbf{E}\left(\phi(G)\right)$ sous la forme $\mathbf{E}^{(\lambda)}(X^\lambda)$?

8. Pour α un réel donné, on pose $u(\alpha) = \text{Var}^{(\alpha\lambda)}(X^{\alpha\lambda})$. Montrer que u est une fonction différentiable et que :

$$u'(\alpha) = \mathbf{E}\left(\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha\lambda_i(G)^2 - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(G)G_i \right) e^{-\sum_{i=1}^{n} \alpha\lambda_i(G)G_i + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \alpha^2\lambda_i(G)^2} \phi(G)^2 \right).$$

   On notera, en particulier, que $u'(0)$ vaut $-\mathbf{E}\left(\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i(G)G_i\right) \phi(G)^2\right)$.

9. Montrer que u est deux fois différentiable et que u'' peut s'exprimer sous la forme

$$u''(\alpha) = \mathbf{E}\left(\left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2(G) + \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha\lambda_i(G)^2 - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(G)G_i \right)^2 \right\} \times \right.$$
$$\left. \times\, e^{-\sum_{i=1}^{n} \alpha\lambda_i(G)G_i + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \alpha^2\lambda_i(G)^2} \phi(G)^2 \right)$$

10. On suppose dans la fin de ce problème que la fonction $\phi|\lambda|$ est non nulle sur un ensemble de mesure de Lebesgue non nulle. Montrer que u est strictement convexe et que $\lim_{\alpha\to\pm\infty} u(\alpha) = +\infty$.

11. Montrer que si $u'(0) \neq 0$, il existe un α tel que $u(\alpha) < u(0)$, puis que, pour ce α, $\alpha\lambda$ est un choix qui permet de réduire la variance de la méthode de Monte-Carlo.

12. Montrer, en utilisant la stricte convexité de u, que si $u'(0) = 0$, 0 réalise le minimum u. Interpréter ce résultat.

13. On suppose, pour cette question, que λ est un vecteur de fonctions paires (c'est à dire qui vérifie, pour tout g, $\lambda(-g) = \lambda(g)$ non nul et que la fonction ϕ^2 est paire. Montrer que, sous ces hypothèses, λ ne permet pas de réduire la variance.

Partie II : Convergence en loi de l'erreur renormalisée du schéma d'Euler

On s'intéresse à la discrétisation du modèle de Black-Scholes $X_t = e^{\sigma W_t + (\mu - \frac{\sigma^2}{2})t}$ où $(W_t)_{t\in[0,T]}$ est un mouvement brownien réel. On se donne un horizon T et un nombre $N \in \mathbf{N}^*$ de pas de discrétisation. Pour $k \in \{0, \dots, N\}$, on pose également $t_k = \frac{kT}{N}$. Pour une suite réelle $(x_N)_{N\in\mathbf{N}^*}$ et $\alpha \in \mathbf{R}$, on note $x_N = \mathcal{O}(N^\alpha)$ lorsque la suite $(N^{-\alpha}x_N)_{N\in\mathbf{N}^*}$ est bornée.

1. Rappeler l'équation différentielle stochastique satisfaite par $(X_t)_{t\geq 0}$.
2. Écrire le schéma d'Euler $(X^N_{t_k})_{k\in\{0,\dots,N\}}$ associé à cette équation. Donner également le schéma de Milstein $(\tilde{X}^N_{t_k})_{k\in\{0,\dots,N\}}$.
3. Calculer $\mathbf{E}(X^N_T)$ et vérifier que $\mathbf{E}(X^N_T) = \mathbf{E}(X_T) + \mathcal{O}(\frac{1}{N})$. Commenter ce résultat.
4. On pose

$$A^N_k = \frac{X^N_{t_k}}{X_{t_{k+1}}}\left(e^{\sigma(W_{t_{k+1}}-W_{t_k})+(\mu-\frac{\sigma^2}{2})t_1} - 1 - \sigma(W_{t_{k+1}} - W_{t_k}) - \mu t_1\right).$$

   Exprimer A^N_k à l'aide de $(\frac{X^N_{t_k}}{X_{t_k}}, \frac{X^N_{t_{k+1}}}{X_{t_{k+1}}})$ et en déduire que $X_T - X^N_T = X_T \sum_{k=0}^{N-1} A^N_k$.
5. On pose

$$R^N_k = e^{\sigma(W_{t_{k+1}}-W_{t_k})+(\mu-\frac{\sigma^2}{2})t_1} - 1 - \sigma(W_{t_{k+1}} - W_{t_k}) - (\mu - \frac{\sigma^2}{2})t_1 - \frac{\sigma^2}{2}(W_{t_{k+1}} - W_{t_k})^2$$
$$V^N_k = \left(\frac{X_{t_k}}{X_{t_{k+1}}} - 1\right)\left(e^{\sigma(W_{t_{k+1}}-W_{t_k})+(\mu-\frac{\sigma^2}{2})t_1} - 1 - \sigma(W_{t_{k+1}} - W_{t_k}) - \mu t_1\right)$$
$$Z^N_k = \frac{X_T}{X_{t_{k+1}}}\left(e^{\sigma(W_{t_{k+1}}-W_{t_k})+(\mu-\frac{\sigma^2}{2})t_1} - 1 - \sigma(W_{t_{k+1}} - W_{t_k}) - \mu t_1\right)(X^N_{t_k} - X_{t_k}).$$

   Vérifier que $R^N_k + V^N_k + \dfrac{Z^N_k}{X_T} = A^N_k - \dfrac{\sigma^2}{2}((W_{t_{k+1}} - W_{t_k})^2 - t_1)$. En déduire que

$$\sqrt{N}(X_T - X^N_T) = X_T\left(\frac{\sigma^2}{2}S_N + \sqrt{N}\sum_{k=0}^{N-1}(R^N_k + V^N_k)\right) + \sqrt{N}\sum_{k=0}^{N-1} Z^N_k$$

   où $S_N = \sqrt{N}\sum_{k=0}^{N-1}[(W_{t_{k+1}} - W_{t_k})^2 - t_1]$.

On se donne $(G_k)_{k\geq 0}$ suite de variables gaussiennes centrées de variance T indépendantes de $(W_t)_{t\geq 0}$.

6. (a) Montrer que (W_T, S_N) et $(\mathcal{W}_N, \Sigma_N) = \frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{k=0}^{N-1}(G_k, G_k^2 - T)$ ont même loi.
   (b) Montrer que lorsque $N \to \infty$, $(\mathcal{W}_N, \Sigma_N)$ converge en loi vers un couple $(\mathcal{W}, \Sigma)$ dont on précisera la loi.
   (c) Conclure que $\frac{\sigma^2}{2}X_T S_N$ converge en loi vers $\sigma^2\sqrt{\frac{T}{2}}X_T G_0$.

D'après les questions 9 à 11, $\mathbf{E}\left|\sqrt{N}\sum_{k=0}^{N-1}(X_T R^N_k + X_T V^N_k + Z^N_k)\right| = \mathcal{O}(\frac{1}{\sqrt{N}})$.

7. En admettant provisoirement ce résultat, montrer que $\sqrt{N}(X_T - X^N_T)$ converge en loi vers $\sigma^2\sqrt{\frac{T}{2}}X_T G_0$.

Sous des hypothèses de régularité sur $\eta, b : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, Kurtz et Protter[7] ont montré que si X_t est solution de l'équation différentielle stochastique $dX_t = \eta(X_t)dW_t + b(X_t)dt$ et X_t^N désigne son schéma d'Euler en temps continu, alors le processus $(\sqrt{N}(X_t - X_t^N))_{t\geq 0}$ converge en loi vers $(Y_t)_{t\geq 0}$ solution de

$$Y_t = \int_0^t Y_s(\eta'(X_s)dW_s + b'(X_s)ds) + \sqrt{\frac{T}{2}}\int_0^t \eta\eta'(X_s)dB_s$$

où $(B_t)_{t\geq 0}$ est un mouvement brownien indépendant de $(W_t)_{t\geq 0}$.

8. Dans le cas particulier du modèle de Black-Scholes, calculer $d\frac{1}{X_t}$ puis $d\frac{Y_t}{X_t}$. En déduire Y_T et vérifier que la convergence établie à la question 7 est bien une conséquence du résultat général de Kurtz et Protter.
9. (a) Calculer $\mathbf{E}(R_0^N)$ et en déduire que $\mathbf{E}(R_k^N) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{N^2}\right)$.
   Montrer que $R_0^N = \sigma\int_0^{t_1}(X_s - 1 - \sigma W_s)dW_s + \mu\int_0^{t_1}(X_s - 1)ds$. Calculer $\mathbf{E}((X_s - 1 - \sigma W_s)^2)$, vérifier que $\mathbf{E}((X_s - 1 - \sigma W_s)^2) = \mathcal{O}(s^2)$ pour $s \to 0^+$ et en déduire que $\mathbf{E}((R_0^N)^2) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{N^3}\right)$.
   (b) Montrer que $\mathbf{E}\left(\left(\sum_{k=0}^{N-1} R_k^N\right)^2\right) = N(N-1)\mathbf{E}((R_0^N))^2 + N\mathbf{E}((R_0^N)^2)$.
   (c) Conclure que $\mathbf{E}\left|X_T\sqrt{N}\sum_{k=0}^{N-1} R_k^N\right| = \mathcal{O}(\frac{1}{\sqrt{N}})$.

On pose $D_k^N = e^{\sigma(W_{t_{k+1}} - W_{t_k}) + (\mu - \frac{\sigma^2}{2})t_1} - 1 - \sigma(W_{t_{k+1}} - W_{t_k}) - \mu t_1$.

10. (a) Calculer $\mathbf{E}(V_0^N)$ et vérifier que $\mathbf{E}(V_0^N) = \mathcal{O}(\frac{1}{N^2})$.
    (b) Rappeler l'équation différentielle stochastique satisfaite par $\frac{1}{X_t}$ et vérifier que $\mathbf{E}\left(\left(\frac{1}{X_{t_1}} - 1\right)^4\right) = \mathcal{O}(\frac{1}{N^2})$.
    En remarquant que $D_0^N = \int_0^{t_1}(X_s - 1)(\sigma dW_s + \mu ds)$, vérifier que $\mathbf{E}((D_0^N)^4) = \mathcal{O}(\frac{1}{N^4})$. En déduire que $\mathbf{E}((V_0^N)^2) = \mathcal{O}(\frac{1}{N^3})$.
    (c) Conclure que $\mathbf{E}\left|X_T\sqrt{N}\sum_{k=0}^{N-1} V_k^N\right| = \mathcal{O}(\frac{1}{\sqrt{N}})$.
11. (a) Vérifier que $\mathbf{E}((D_k^N)^2) = \mathcal{O}(\frac{1}{N^2})$.
    (b) À l'aide de la vitesse forte, en déduire $\mathbf{E}((Z_k^N)^2) = \mathcal{O}(\frac{1}{N^3})$.
    (c) Pour $0 \leq l < k \leq N-1$, vérifier que

    $$\mathbf{E}(Z_k^N Z_l^N) = \mathbf{E}(X^2_{T-t_{k+1}})\mathbf{E}\left(\frac{X_{t_{k+1}}}{X_{t_k}}D_k^N\right)\mathbf{E}\left((X_{t_k}^N - X_{t_k})\frac{X_{t_k}}{X_{t_{l+1}}}D_l^N(X_{t_l}^N - X_{t_l})\right).$$

    Vérifier que $\mathbf{E}\left(\frac{X_{t_{k+1}}}{X_{t_k}}D_k^N\right) = e^{\mu t_1}\left(e^{(\mu+\sigma^2)t_1} - 1 - (\mu+\sigma^2)t_1\right)$. Remarquer que

    $$\mathbf{E}\left|(X_{t_k}^N - X_{t_k})\frac{X_{t_k}}{X_{t_{l+1}}}D_l^N(X_{t_l}^N - X_{t_l})\right| \leq \sqrt{\mathbf{E}\left(\sup_{t\leq T}(X_t^N - X_t)^4\right)\mathbf{E}(X^2_{t_k - t_{l+1}})\mathbf{E}((D_l^N)^2)}$$

    et en déduire que $\mathbf{E}(Z_k^N Z_l^N) = \mathcal{O}(\frac{1}{N^4})$.
    (d) Conclure que $\mathbf{E}((\sqrt{N}\sum_{k=0}^{N-1} Z_k^N)^2) = \mathcal{O}(\frac{1}{N})$ et que

    $$\mathbf{E}\left|\sqrt{N}\sum_{k=0}^{N-1}(X_T R_k^N + X_T V_k^N + Z_k^N)\right| = \mathcal{O}(\frac{1}{\sqrt{N}}).$$

7. Wong-Zakai corrections, random evolutions, and simulation schemes for SDEs. Stochastic analysis, 331–346, Academic Press, Boston, MA, 1991.

Méthodes de Monte-Carlo en finance

Examen du jeudi 10 février 2011 8h30-11h30

Partie I : Simulation directionnelle et stratification

Soit $G = (G_1, \ldots, G_d)$ un vecteur constitué de d gaussiennes centrées réduites indépendantes et H un fonction continue de $\mathbf{R}^d$ dans $\mathbf{R}$ et on cherche à calculer la probabilité :

$$p = \mathbf{P}\left(H(G) \geq \lambda\right),$$

pour une valeur λ positive donnée.

1. Décrire la méthode de Monte-Carlo habituelle permettant d'estimer p et expliquer comment l'on peut évaluer l'erreur de la méthode.
2. On suppose que l'on cherche à approche une valeur de p de l'ordre de 10^{-10}. Donner une évaluation (grossière) du nombre minimal de tirages n permettant d'évaluer p à 20% près. Lorsque le calcul de H demande un temps de l'ordre d'une seconde, qu'en concluez vous ? (1 an $\approx 3 \times 10^7$ secondes)
3. On écrit le vecteur G sous la forme $G = RA$ où $R = |G|$ et $A = G/|G|$ prend ses valeurs dans la sphère unité de $\mathbf{R}^d$, $S_d = \{x \in \mathbf{R}^d, |x| = 1\}$. Montrer que R^2 suit une loi du χ^2 à d degrés de liberté et que A suit une loi invariante par rotation dont le support est inclu dans S_d (On admettra que cela implique que la loi de A est la loi uniforme sur la sphère).
4. A l'aide du changement de variable polaire généralisé $(g_1, \ldots, g_d) \to (r, \theta_1, \ldots, \theta_{d-1})$

$$\begin{cases} g_1 & = r\cos\theta_1 \\ g_2 & = r\sin\theta_1\cos\theta_2 \\ & \ldots \\ g_{d-1} & = r\sin\theta_1\sin\theta_2\ldots\sin\theta_{d-2}\cos\theta_{d-1} \\ g_d & = r\sin\theta_1\sin\theta_2\ldots\sin\theta_{d-2}\sin\theta_{d-1} \end{cases}$$

   montrer que R et A sont des variables aléatoires indépendantes.
5. On suppose, à partir de maintenant, que pour tout $a \in S_d$ la fonction $r \to H(ra)$ est strictement croissante, que $H(0) = 0$ et $\lim_{r\to+\infty} H(ra) = +\infty$.
   Soit $a \in S_d$, on pose $\phi(a) = \mathbf{P}(H(Ra) \geq \lambda)$. Calculer explicitement $\phi(a)$ en fonction de la fonction de répartition de la loi du χ^2 à d degrés de liberté et de la solution de $H(r^*a) = \lambda$.
6. Soit $(A_i, i \geq 0)$ une suite de variables aléatoires indépendantes et de loi uniforme sur la sphère unité. Montrer que $\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^n \phi(A_i) = p$, au sens de la convergence presque sûre.
7. Montrer que $\mathrm{Var}(\phi(A_1)) \leq \mathrm{Var}\left(\mathbf{1}_{H(G)\geq\lambda}\right)$ et comparer la vitesse de convergence de l'estimateur de la question 1 et celui de la question précédente.
8. Nous allons maintenant réduire la variance de l'estimateur précédent par une technique de stratification.
   On considère les 2^d quadrants définit, pour $\epsilon \in \{-1, +1\}^d$, par :

$$C_\epsilon = \{x \in S_d, \epsilon_1 x_1 \geq 0, \ldots, \epsilon_d x_d \geq 0\}.$$

   Montrer que $\mathbf{P}(A_1 \in C_\epsilon \cap C_{\epsilon'}) = 0$, pour $\epsilon \neq \epsilon'$. En déduire la valeur de $\rho_\epsilon = \mathbf{P}(A_1 \in C_\epsilon)$?

9. On considère l'estimateur I_n stratifié dans les strates $(C_\epsilon, \epsilon \in \{-1,+1\}^d)$:

$$I_n = \sum_{\epsilon \in \{-1,+1\}^d} \frac{\rho_\epsilon}{n_\epsilon} \sum_{k=1}^{n_\epsilon} \phi(A_k^{(\epsilon)}),$$

où $n_\epsilon = n w_\epsilon(n)$ avec $w_\epsilon(n) \geq 0$ et $\sum_{\epsilon \in \{-1,+1\}^d} w_\epsilon(n) = 1$ et où les $(A_k^{(\epsilon)}, k \geq 0)$ sont des suites de variables aléatoires indépendantes suivant une loi uniforme sur C_ϵ, ces suites étant indépendantes entre elles.
Calculer $\mathrm{Var}(I_n)$ en fonction de n et des $(w_\epsilon(n), \epsilon \in \{-1,+1\}^d)$, des $(\rho_\epsilon, \epsilon \in \{-1,+1\}^d)$ et des $(\sigma_\epsilon, \epsilon \in \{-1,+1\}^d)$ où $\sigma_\epsilon^2 = \mathrm{Var}(A_1^{(\epsilon)})$.

10. Montrer l'inégalité :

$$\left(\sum_{i=1}^N \alpha_i a_i\right)^2 \leq \sum_{i=1}^N \alpha_i a_i^2,$$

pour $(\alpha_i, a_i, 1 \leq i \leq N)$ des réels positifs tel que $\sum_{i=1}^N \alpha_i = 1$.
En déduire que $\mathrm{Var}(I_n) \geq \frac{1}{n}\left(\sum_{\epsilon \in \{-1,+1\}^d)} \rho_\epsilon \sigma_\epsilon\right)^2$.
Comment peut on choisir les $(w_\epsilon(n), \epsilon \in \{-1,+1\}^d)$ pour réaliser la borne inférieure précédente ?

11. Proposer une méthode de simulation selon la loi uniforme sur C_ϵ ?

12. On fixe une fois pour toute les w_ϵ (indépendement de n) par :

$$w_\epsilon = \frac{\rho_\epsilon \sigma_\epsilon}{\sum_{\epsilon \in \{-1,+1\}^p} \rho_\epsilon \sigma_\epsilon}.$$

On pose $n_\epsilon = [n w_\epsilon]$. Montrer que, au sens de la convergence presque sûre :

$$\lim_{n \to +\infty} I_n = p.$$

13. Montrer que la limite en loi des variables aléatoires : $\sqrt{n}(I_n - p)$ est une gaussienne centrée de variance $\left(\sum_{\epsilon \in \{-1,+1\}^d)} \rho_\epsilon \sigma_\epsilon\right)^2$.
Comment peut on utiliser ce résultat pour estimer l'erreur commise lorsque l'on estime p à l'aide de I_n ?

Partie II : Discrétisation d'une équation différentielle stochastique à coefficients localement lipschitziens

Pour $(W_t)_{t \in [0,T]}$ un mouvement brownien à valeurs $\mathbf{R}^d$ et $\sigma : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^{n \times d}$ et $b : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$, on s'intéresse à l'EDS

$$dX_t = \sigma(X_t)dW_t + b(X_t)dt, \ t \leq T, \ X_0 = y. \tag{13}$$

On suppose que les fonctions σ et b sont localement lipschitziennes au sens où pour tout $m \in \mathbf{N}^*$ il existe une constante $C_m < +\infty$ telle que

$$\forall x, y \in \mathbf{R}^n \text{ t.q. } |x| \leq m \text{ et } |y| \leq m, \ |\sigma(x) - \sigma(y)| + |b(x) - b(y)| \leq C_m |x - y|.$$

On note

$$\sigma_m(x) = \sigma(P_m x) \ \text{ et } \ b_m(x) = b(P_m x) \ \text{ où } \ P_m x = \tfrac{|x| \wedge m}{|x|} x \tag{14}$$

désigne la projection orthogonale de x sur la boule fermée de rayon m centrée à l'origine. On pose également $t_k = k\Delta t$ avec $\Delta t = \frac{T}{N}$ où $N \in \mathbf{N}^*$ est un nombre de pas de temps.

Absence de convergence faible et dans L^p dans un cas particulier On s'intéresse à l'EDS en dimension $n = d = 1$

$$X_t = W_t - \int_0^t X_s^3 ds. \tag{15}$$

On admet pour l'instant qu'elle possède une unique solution $(X_t)_{t\in[0,T]}$ et que cette solution vérifie $\mathbf{E}\left(\sup_{t\in[0,T]} |X_t|^4\right) < +\infty$.
On note $(\bar{X}_t^N)_{t\in[0,T]}$ le schéma d'Euler en temps continu associé et on pose $A_N = \{|W_{t_1}| \geq \frac{3N}{T},\ \sup_{1\leq k\leq N-1} |W_{t_{k+1}} - W_{t_k}| \leq 1\}$.

1. Vérifier que $\mathbf{P}(A_N) \geq \mathbf{P}(|W_{t_1}| \geq \frac{3N}{T})\mathbf{P}(\sup_{t\in[0,T]} |W_t| \leq \frac{1}{2})$. En remarquant que pour $x > 0$, $\frac{e^{-x^2/2}}{x} = \int_x^\infty (1 + \frac{1}{y^2})e^{-y^2/2}dy$, vérifier que $\int_x^{+\infty} e^{-y^2/2}dy \geq \frac{xe^{-x^2/2}}{1+x^2}$.
   Conclure que $\mathbf{P}(A_N) \geq \mathbf{P}(\sup_{t\in[0,T]} |W_t| \leq \frac{1}{2}) \times \frac{6(NT)^{\frac{3}{2}}}{T^3+9N^3} \times \frac{e^{-\frac{9N^3}{2T^3}}}{\sqrt{2\pi}}$.
2. Vérifier que sur l'événement A_N, si pour $k \geq 1$, $|\bar{X}_{t_k}^N| \geq 1$, alors $|\bar{X}_{t_{k+1}}^N| \geq |\bar{X}_{t_k}^N|^2 \left(\frac{T}{N}|\bar{X}_{t_k}^N| - 2\right)$. En déduire que pour $N \geq \frac{T}{3}$, sur l'événement A_N, $\forall k \in \{1, \ldots, N\}$, $|\bar{X}_{t_k}^N| \geq \left(\frac{3N}{T}\right)^{2^{k-1}}$.
3. Conclure que $\lim_{N\to\infty} \mathbf{E}(|\bar{X}_T^N|) = +\infty$. En déduire $\lim_{N\to\infty} \mathbf{E}(|\bar{X}_T^N - X_T|)$ puis $\lim_{N\to\infty} \mathbf{E}(\sup_{t\in[0,T]} |\bar{X}_t^N - X_t|^p)$ pour $p \geq 1$.
4. En remarquant que la loi de $\bar{X}_T^N$ est symétrique, montrer que pour $K > 0$, $\mathbf{E}\left((\bar{X}_T^N - K)^+\right) \geq \frac{1}{2}\mathbf{E}(|\bar{X}_T^N|) - K$ et en déduire que $\mathbf{E}\left((\bar{X}_T^N - K)^+\right)$ ne converge pas vers $\mathbf{E}\left((X_T - K)^+\right)$ lorsque $N \to \infty$.

Convergence presque sûre du schéma d'Euler On suppose maintenant qu'il existe une solution à l'EDS (13) (voir le paragraphe pour une condition suffisante). On pose $\nu_0 = 0$ et pour $m \in \mathbf{N}^*$, on note $\nu_m = \inf\{t \in [0, T] : |X_t| > m\}$ avec la convention $\inf \emptyset = T$.

5. Écrire le schéma d'Euler en temps continu $(\bar{X}_t^N)_{t\in[0,T]}$ associé à (13).
6. Soit $m \in \mathbf{N}^*$ et $x, y \in \mathbf{R}^n$. Vérifier que $(x - P_m x, P_m y - P_m x) \leq 0$ (*dans le cas où* $|x| > m$*, on pourra vérifier que* $(x - P_m x, P_m x) = m|x - P_m x|$).
   En déduire que $|P_m y - P_m x|^2 \leq (y - x, P_m y - P_m x)$ et conclure que les fonctions σ_m et b_m sont globalement lipschitziennes de constante de Lipschitz C_m.
7. En déduire l'existence d'une unique solution $(X_t^m)_{t\in[0,T]}$ à l'EDS

$$dX_t^m = \sigma_m(X_t^m)dW_t + b_m(X_t^m)dt,\ X_0^m = y. \tag{16}$$

   Décrire l'événement $\{\nu_m = T\}$ à l'aide de la variable aléatoire $\sup_{t\in[0,T]} |X_t|$ et vérifier que sur cet événement $(X_t^m)_{t\in[0,T]}$, $(X_t)_{t\in[0,T]}$ et $(X_t^{m+1})_{t\in[0,T]}$ coincident. Que vaut $\mathbf{P}(\bigcup_{m\in\mathbf{N}^*}\{\nu_m = T\})$? Y-a-t-il unicité pour (13) ?

On note $(\bar{X}_t^{m,N})_{t\in[0,T]}$ le schéma d'Euler correspondant à (16) et $\nu_m^N = \min\{t_k : |\bar{X}_{t_k}^{N,m}| > m\}$.

8. Pour quelles valeurs de γ, la suite $N^\gamma \sup_{t\leq T} |X_t^m - \bar{X}_t^{m,N}|$ converge-t-elle presque sûrement lorsque $N \to \infty$ à m fixé ?
   En déduire que si $\nu_m(\omega) = T$, alors il existe $\mathcal{N}(\omega) < +\infty$ tel que pour $N \geq \mathcal{N}(\omega)$, $\nu_{m+1}^N(\omega) = T$ et $\sup_{t\leq T} |X_t(\omega) - \bar{X}_t^N(\omega)| = \sup_{t\leq T} |X_t^{m+1}(\omega) - \bar{X}_t^{m+1,N}(\omega)|$.
9. Conclure que pour tout $\gamma < \frac{1}{2}$, $N^\gamma \sup_{t\leq T} |X_t - \bar{X}_t^N|$ converge p.s. vers 0 lorsque $N \to \infty$.

Existence pour l'EDS (13) **lorsque la dérive est rentrante** On suppose maintenant que σ est **globalement lipschitzienne** et que la fonction de dérive b est localement lipschitzienne et rentrante au sens où il existe $\beta \in [0, +\infty[$ tel que

$$\forall x \in \mathbf{R}^n, \ (x, b(x)) \leq \beta(|x| + |x|^2). \tag{17}$$

avec (x, y) qui désigne le produit scalaire de x et y dans $\mathbf{R}^n$. On note $(Y_t^m)_{t\in[0,T]}$ l'unique solution de l'EDS

$$dY_t^m = \sigma(Y_t^m)dW_t + b_m(Y_t^m)dt, \ Y_0^m = y.$$

10. Vérifier que toute fonction de dérive globalement lipschitzienne est rentrante. Donner un exemple de fonction de dérive b localement lipschitzienne rentrante mais pas globalement lipschitzienne.
11. Pour $m \in \mathbf{N}^*$, vérifier que la fonction b_m définie dans (14) satisfait (17).
12. Calculer $|Y_u^m|^2$ à l'aide de la formule d'Itô et en déduire que
$$\mathbf{E}\left(\sup_{u\leq t}|Y_u^m|^4\right) \leq 4\Bigg\{|y|^4 + 4\beta^2\mathbf{E}\left(\left(\int_0^t |Y_s^m| + |Y_s^m|^2 ds\right)^2\right) + \mathbf{E}\left(\left(\int_0^t |\sigma(Y_s^m)|^2 ds\right)^2\right) + 16\mathbf{E}\left(\int_0^t |\sigma^*(Y_s^m)Y_s^m|^2 ds\right)\Bigg\}$$
où $|\sigma(x)|^2 = \sum_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq d}} |\sigma_{ij}(x)|^2$.
13. En déduire que $\sup_m \mathbf{E}\left(\sup_{t\in[0,T]} |Y_t^m|^4\right) < +\infty$ puis $\mathbf{P}\left(\bigcup_{m\in\mathbf{N}^*}\{\tau_m = T\}\right) = 1$ où $\tau_m = \inf\{t \in [0,T] : |Y_t^m| > m\}$ (convention $\inf \emptyset = T$)
Conclure à l'existence d'une unique solution $(X_t)_{t\in[0,T]}$ pour (13) et que cette solution vérifie $\mathbf{E}\left(\sup_{t\in[0,T]} |X_t|^4\right) < +\infty$ [8].

C'est l'absence de contrôle des moments du schéma d'Euler qui peut empêcher sa convergence dans L^p et sa convergence faible alors que l'on a convergence presque sûre à la vitesse $N^{-\gamma}$ pour tout $\gamma < 1/2$. Dans un preprint récent, Hutzenthaler, Jentzen et Kloeden ont proposé le schéma explicite suivant :

$$\tilde{X}_{t_{k+1}}^N = \tilde{X}_{t_k}^N + \sigma(\tilde{X}_{t_k}^N)(W_{t_{k+1}} - W_{t_k}) + \frac{b(\tilde{X}_{t_k}^N)\Delta t}{1 + |b(\tilde{X}_{t_k}^N)|\Delta t}.$$

Lorsque la fonction σ est globalement lipschitzienne, la matrice jacobienne de b est à croissance polynomiale et b vérifie la condition

$$\exists \alpha \in (0, +\infty), \ \forall x, y \in \mathbf{R}^n, \ (x - y, b(x) - b(y)) \leq \alpha|x - y|^2$$

qui implique (17) pour le choix $y = 0$, alors ils montrent que ce schéma converge à la vitesse forte $\frac{1}{\sqrt{N}}$ dans tous les espaces L^p. Ce résultat de convergence forte reste valable pour le schéma d'Euler semi-implicite

$$\hat{X}_{t_{k+1}}^N - b(\hat{X}_{t_{k+1}}^N)\Delta t = \hat{X}_{t_k}^N + \sigma(\hat{X}_{t_k}^N)(W_{t_{k+1}} - W_{t_k})$$

sous les mêmes hypothèses.

8. Ce résultat s'applique en particulier à l'EDS (15).

Méthodes de Monte-Carlo en finance

Examen du jeudi 11 février 2010 8h30-11h30

Partie I : Méthode du "carré latin"

Le cas de la dimension 1 On considére un suite de variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur $[0,1]$, $U = (U_i, i \geq 1)$ et une permutation σ tirée uniformement sur l'ensemble des permutations de $\{1,\ldots,N\}$ et indépendante de la suite U. Pour N entier fixé et pour $1 \leq i \leq N$, on pose :

$$Y_i^N = \frac{i - U_i}{N} \text{ et } X_i^N = Y_{\sigma(i)}^N.$$

On considére une fonction mesurable bornée f et l'on cherche à comparer l'estimateur classique :

$$I_0(N) = \frac{1}{N}\left(f(U_1) + \cdots + f(U_N)\right),$$

avec :

$$I_1(N) = \frac{1}{N}\left(f(X_1^N) + \cdots + f(X_N^N)\right)$$

1. Quel est la limite de $I_0(N)$ lorsque N tends vers $+\infty$? Comment peut on estimer l'erreur commise lorsque l'on approxime cette limite par $I_0(N)$?
2. Pour un i fixé,$1 \leq i \leq N$, identifier la loi de X_i^N. En déduire que $\mathbf{E}\left(I_1(N)\right) = \mathbf{E}(f(U_1))$
3. Montrer que $I_1(N) = \frac{1}{N}\left(f(Y_1^N) + \cdots + f(Y_N^N)\right)$, et en déduire que
$$N\text{Var}\left(I_1(N)\right) = \int_0^1 f^2(s)ds - N\sum_{k=1}^N \left(\int_{(k-1)/N}^{k/N} f(s)ds\right)^2,$$
4. Vérifier que $N\text{Var}(I_1(N)) = \dfrac{N}{2}\displaystyle\sum_{i=1}^N \int_{(i-1)/N}^{i/N}\int_{(i-1)/N}^{i/N} (f(s) - f(s'))^2 ds ds'$. Lorsque f est une fonction continue, montrer que $N\text{Var}\left(I_1(N)\right)$ tend vers 0 lorsque N tends vers $+\infty$. Que vaut $N\text{Var}\left(I_0(N)\right)$?
5. Pour f continue, en quel sens $I_1(N)$ convergente t'il vers $\mathbf{E}(f(U))$?
6. Quel estimateur vous parait préférable, $I_0(N)$ ou $I_1(N)$, du point de vue de sa vitesse de convergence en moyenne quadratique ?
   D'un point de vue pratique quels vous paraissent les inconvénients de $I_1(N)$ par rapport à $I_1(N)$?
7. Comment peut-on interpréter l'estimateur $I_0(N)$ en terme de méthode de stratification ?

Le cas de la dimension 2 On considère maintenant le cas bidimensionnel. U désigne un suite de variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur $[0,1]^2$, $U = ((U_i^1, U_i^2), i \geq 1)$ et deux permutations indépendantes σ_1 et σ_2 tirée uniformement sur l'ensemble des permutations de $\{1,\ldots,N\}$ et indépendantes de la suite U. Pour N entier fixé et pour $1 \leq i, j \leq N$, on pose :

$$Y_{i,j}^N = \left(\frac{i - U_i^1}{N}, \frac{j - U_j^2}{N}\right) \text{ et } X_i^N = Y_{\sigma_1(i),\sigma_2(i)}^N.$$

On pose, comme dans la première partie, pour f une fonction bornée de $[0,1]^2$ dans $\mathbf{R}$:

$$I_0(N) = \frac{1}{N}\left(f(U_1) + \cdots + f(U_N)\right) \text{ et } I_1(N) = \frac{1}{N}\left(f(X_1^N) + \cdots + f(X_N^N)\right)$$

1. Montrer que
$$\mathbf{E}\left(f(X_i^N)\right) = \frac{1}{N^2} \sum_{\substack{1\leq k\leq N\\1\leq l\leq N}} \mathbf{E}\left(f(Y_{k,l})\right) = \mathbf{E}\left(f(U_1)\right)$$

2. Montrer que, pour $i \neq j$:
$$\mathbf{E}\left(f(X_i^N)f(X_j^N)\right) = \frac{1}{N^2(N-1)^2} \sum_{\substack{1\leq k_1\neq k_2\leq N\\1\leq l_1\neq l_2\leq N}} \mathbf{E}\left(f(Y_{k_1,l_1})\right)\mathbf{E}\left(f(Y_{k_2,l_2})\right),$$

   puis que :
$$\mathbf{E}\left(f(X_i^N)f(X_j^N)\right) = \frac{1}{N^2(N-1)^2}\Big\{N^4\mathbf{E}(f(U_1))^2 - \sum_{\substack{1\leq k\leq N\\1\leq l_1,l_2\leq N}} \mathbf{E}\left(f(Y_{k,l_1})\right)\mathbf{E}\left(f(Y_{k,l_2})\right)$$
$$- \sum_{\substack{1\leq k_1,k_2\leq N\\1\leq l\leq N}} \mathbf{E}\left(f(Y_{k_1,l})\right)\mathbf{E}\left(f(Y_{k_2,l})\right) + \sum_{\substack{1\leq k\leq N\\1\leq l\leq N}} \mathbf{E}\left(f(Y_{k,l})\right)^2\Big\}.$$

3. En déduire que, pour f continue :
$$\lim_{N\to+\infty}(N-1)\text{Cov}\left(f(X_1^N), f(X_2^N)\right) = 2\mathbf{E}(f(U))^2 - \int_{[0,1]^3} f(x,y)f(x,y')dxdydy'$$
$$- \int_{[0,1]^3} f(x,y)f(x',y)dxdx'dy.$$

4. Montrer que :
$$\text{Var}\left(\mathbf{E}(f(U)|U_1)\right) = \int_{[0,1]^3} f(x,y)f(x,y')dxdydy' - \mathbf{E}\left(f(U)\right)^2,$$
$$\text{Var}\left(\mathbf{E}(f(U)|U_2)\right) = \int_{[0,1]^3} f(x,y)f(x',y)dxdx'dy - \mathbf{E}\left(f(U)\right)^2.$$

5. En déduire que :
$$\lim_{N\to+\infty} N\text{Var}(I_1(N)) = \text{Var}(f(U)) - \text{Var}\left(\mathbf{E}(f(U)|U_1)\right) - \text{Var}\left(\mathbf{E}(f(U)|U_2)\right).$$

6. Quel est l'intérêt d'utiliser $I_1(N)$ plutôt que $I_0(N)$? Quels en sont les inconvénients ?

7. Vérifier que :
$$\text{Var}\left\{f(U) - \mathbf{E}(f(U)|U_1) - \mathbf{E}(f(U)|U_2)\right\} = \text{Var}(f(U)) - \text{Var}\left(\mathbf{E}(f(U)|U_1)\right)$$
$$-\text{Var}\left(\mathbf{E}(f(U)|U_2)\right).$$

Partie II : discrétisation d'un modèle à volatilité stochastique

On considère le modèle à volatilité stochastique

$$\begin{cases} dS_t = rS_t dt + f(Y_t)S_t(\rho dW_t + \sqrt{1-\rho^2}dB_t); & S_0 = s_0 > 0 \\ dY_t = b(Y_t)dt + \sigma(Y_t)dW_t; & Y_0 = y_0 \end{cases}, \tag{18}$$

où $(B_t)_{t\geq 0}$ et $(W_t)_{t\geq 0}$ sont deux mouvements browniens indépendants, $r \in \mathbf{R}$, $\rho \in [-1,1]$ et $f, b, \sigma : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ sont des fonctions régulières (c'est-à-dire bornées et dérivables autant de fois qu'on le souhaite avec des dérivées bornées) avec σ qui ne s'annule pas.
On pose $X_t = \ln(S_t)$, $t_k = k\Delta t$ avec $\Delta t = \frac{T}{N}$ où $N \in \mathbf{N}^*$ est un nombre de pas de temps et $T > 0$ une maturité.

1. Que représente le coefficient ρ ?
2. Écrire l'équation différentielle stochastique satisfaite par le couple $(X_t, Y_t)_{t\geq 0}$.
3. Comment s'écrit le schéma de Milstein $(\bar{Y}^N_{t_k})_{0\leq k\leq N}$ de pas Δt pour le processus $(Y_t)_{t\in[0,T]}$? Rappeler sans preuve le résultat de convergence forte du cours pour ce schéma.
4. Déterminer la condition de commutativité qui permet d'implémenter le schéma de Milstein pour le couple $(X_t, Y_t)_{t\in[0,T]}$. Que peut-on dire de la volatilité de $(S_t)_{t\geq 0}$ lorsque la fonction σ est nulle ? Et lorsque f' est nulle ? Écrire le schéma de Milstein de pas Δt pour le couple $(X_t, Y_t)_{t\in[0,T]}$ lorsque $|\rho| = 1$.
5. On note $\boxed{F(y) = \int_{y_0}^{y} \frac{f}{\sigma}(z)dz}$. Vérifier que
$$dX_t = \rho dF(Y_t) + \sqrt{1-\rho^2} f(Y_t)dB_t + h(Y_t)dt,$$
pour une fonction h que l'on précisera.

On définit par récurrence $(\bar{X}_{t_k})_{0\leq k\leq N}$ en posant $\bar{X}_0 = \ln(s_0)$ et $\forall k \in \{0, \ldots, N-1\}$,

$$\bar{X}_{t_{k+1}} = \bar{X}_{t_k} + \rho(F(Y_{t_{k+1}}) - F(Y_{t_k})) + \int_{t_k}^{t_{k+1}} h(Y_s)ds + \sqrt{\frac{1-\rho^2}{\Delta t}\int_{t_k}^{t_{k+1}} f^2(Y_s)ds}(B_{t_{k+1}} - B_{t_k}).$$

6. Vérifier que les vecteurs aléatoires $(\sum_{j=0}^{k-1} \sqrt{\frac{1}{\Delta t}\int_{t_j}^{t_{j+1}} f^2(Y_s)ds}(B_{t_{j+1}} - B_{t_j}))_{1\leq k\leq N}$ et $(\int_0^{t_k} f(Y_s)dB_s)_{1\leq k\leq N}$ ont même loi conditionnelle sachant $(W_t)_{t\in[0,T]}$. En déduire que les vecteurs $(\bar{X}_{t_k})_{0\leq k\leq N}$ et $(X_{t_k})_{0\leq k\leq N}$ ont même loi.

On définit par récurrence le schéma suivant : $\bar{X}^N_0 = \ln(s_0)$ et pour $k \in \{0, \ldots, N-1\}$,

$$\bar{X}^N_{t_{k+1}} = \bar{X}^N_{t_k} + \rho\left(F(\bar{Y}^N_{t_{k+1}}) - F(\bar{Y}^N_{t_k})\right) + h(\bar{Y}^N_{t_k})\Delta t + \sqrt{1-\rho^2}\eta^N_k \times (B_{t_{k+1}} - B_{t_k})$$
$$\text{où } \eta^N_k = \sqrt{\left(\psi(\bar{Y}^N_{t_k}) + \frac{\sigma\psi'(\bar{Y}^N_{t_k})}{\Delta t}\int_{t_k}^{t_{k+1}} (W_s - W_{t_k})ds\right) \vee \underline{\psi}}$$

avec $\psi(y) = f^2(y)$ et $\underline{\psi} = \inf_{y\in\mathbf{R}} \psi(y) = \inf_{y\in\mathbf{R}} f^2(y) \geq 0$. L'objectif final de cet énoncé est de montrer que si $\underline{\psi} > 0$ alors

$$\exists C > 0,\ \forall N \in \mathbf{N}^*,\ \mathbf{E}\left(\max_{0\leq k\leq N} |\bar{X}_{t_k} - \bar{X}^N_{t_k}|^2\right) \leq \frac{C}{N^2} \tag{19}$$

Dans le reste de l'énoncé on notera C des constantes indépendantes de N qui peuvent varier de ligne en ligne.

7. Comment peut-on simuler le vecteur $(W_{t_{k+1}}-W_{t_k}, \int_{t_k}^{t_{k+1}}(W_s-W_{t_k})ds)_{0\leq k\leq N-1}$? En quoi, pour le pricing d'options exotiques, le schéma $(\bar{X}^N_{t_k})_{0\leq k\leq N}$ est-il aussi performant que le schéma de Milstein ?

8. Vérifier que

$$\max_{0\leq k\leq N}|\bar{X}_{t_k}-\bar{X}^N_{t_k}|^2 \leq C\left(T^N_1+\max_{1\leq k\leq N}(T^N_{2,k})^2+\max_{1\leq k\leq N}(T^N_{3,k})^2\right)$$

$$\text{où } T^N_1=\max_{0\leq k\leq N}(F(Y_{t_k})-F(\bar{Y}^N_{t_k}))^2+\max_{1\leq k\leq N}\left(\Delta t\sum_{j=0}^{k-1}(h(Y_{t_j})-h(\bar{Y}^N_{t_j}))\right)^2,$$

$$T^N_{2,k}=\int_0^{t_k}h(Y_s)ds-\Delta t\sum_{j=0}^{k-1}h(Y_{t_j}),$$

$$T^N_{3,k}=\sum_{j=0}^{k-1}\left(\eta^N_j-\sqrt{\frac{1}{\Delta t}\int_{t_j}^{t_{j+1}}\psi(Y_s)ds}\right)(B_{t_{j+1}}-B_{t_j}).$$

9. Vérifier que $\max_{1\leq k\leq N}\left(\frac{1}{N}\sum_{j=0}^{k-1}(h(Y_{t_j})-h(\bar{Y}^N_{t_j}))\right)^2 \leq \max_{1\leq k\leq N-1}(h(Y_{t_k})-h(\bar{Y}^N_{t_k}))^2$ et en déduire que $\mathbf{E}(T^N_1)\leq \frac{C}{N^2}$?

10. Vérifier que $T^N_{2,k}=\int_0^{t_k}(\bar{\tau}_s-s)\left((bh'+\frac{\sigma^2h''}{2})(Y_s)ds+\sigma h'(Y_s)dW_s\right)$ où, pour $s\in[0,T]$, $\bar{\tau}_s=\lceil\frac{s}{\Delta t}\rceil\Delta t$ désigne l'instant de discrétisation juste après s. En déduire que $\mathbf{E}(\max_{1\leq k\leq N}(T^N_{2,k})^2)\leq \frac{C}{N^2}$.

11. (a) Que peut-on dire du processus $(T^N_{3,k})_{1\leq k\leq N}$? En utilisant l'inégalité de Doob et le caractère lipschitzien de la racine carrée sur $[\underline{\psi},+\infty[$, en déduire que

$$\mathbf{E}\left(\max_{1\leq k\leq N}(T^N_{3,k})^2\right)\leq \frac{C}{N}\mathbf{E}\left(\sum_{j=0}^{N-1}((\bar{T}^j_3)^2+(\tilde{T}^j_3)^2)\right)$$

$$\text{où } \bar{T}^j_3=\psi(\bar{Y}^N_{t_j})-\psi(Y_{t_j})+\frac{\sigma\psi'(\bar{Y}^N_{t_j})-\sigma\psi'(Y_{t_j})}{\Delta t}\int_{t_j}^{t_{j+1}}(W_s-W_{t_j})ds$$

$$\text{et } \tilde{T}^j_3=\psi(Y_{t_j})+\frac{\sigma\psi'(Y_{t_j})}{\Delta t}\int_{t_j}^{t_{j+1}}(W_s-W_{t_j})ds-\frac{1}{\Delta t}\int_{t_j}^{t_{j+1}}\psi(Y_s)ds.$$

(b) Calculer $\mathbf{E}\left(\left(\frac{1}{\Delta t}\int_{t_j}^{t_{j+1}}(W_s-W_{t_j})ds\right)^2\middle|(W_u)_{u\leq t_j}\right)$ et en déduire que $\mathbf{E}((\bar{T}^j_3)^2)\leq\frac{C}{N^2}$.

(c) Vérifier que $\tilde{T}^j_3=\frac{1}{\Delta t}\int_{t_j}^{t_{j+1}}(s-\bar{\tau}_s)\left((b\psi'+\frac{\sigma^2\psi''}{2})(Y_s)ds+(\sigma\psi'(Y_s)-\sigma\psi'(Y_{t_j}))dW_s\right)$ et en déduire que $\mathbf{E}((\tilde{T}^j_3)^2)\leq\frac{C}{N^2}$.

12. Conclure que (19) est vraie.

Méthodes de Monte-Carlo en finance

Examen du jeudi 5 février 2009 8h30-11h30

Partie I : Réduction de variance et invariance de loi

Soit $(U_i, i \geq 1)$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant une loi uniforme sur l'intervalle $[0, 1]$.

On considère une application de T de l'intervalle $[0, 1]$ dans l'intervalle $[0, 1]$. On suppose que T est telle que loi$(T(U)) =$ loi(U), si U est une variable aléatoire qui suit une loi uniforme sur $[0, 1]$.

On s'intéresse pour un $p \geq 1$ fixé à l'estimateur $I_{n,p}$ donné par

$$I_{n,p} = \frac{1}{np} \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=0}^{p-1} f\left(T^k(U_i)\right)$$

1. Montrer que, si f est une fonction mesurable bornée de $[0, 1]$ dans $\mathbf{R}$:

$$\lim_{n \to +\infty} I_{n,p} = \mathbf{E}\left(f(U)\right) \ p.s.$$

2. Montrer que $\text{Var}(I_{n,p}) = \frac{1}{np} v_p(f)$, avec

$$v_p(f) = \frac{1}{p} \text{Var}\left(\sum_{k=0}^{p-1} f\left(T^k(U_1)\right)\right)$$

3. Montrer que $\sqrt{np} \frac{I_{n,p} - \mathbf{E}(f(U_1))}{\sqrt{v_p(f)}}$ converge en loi lorsque n tend $+\infty$ vers une loi gaussienne centrée réduite.
4. Supposons que l'on ait effectué n tirages $(U_i, i = 1, \ldots, n)$. Comment peut on estimer $v_p(f)$? Comment en déduire une procédure effective d'estimation de l'erreur commise lorsque l'on approxime $\mathbf{E}\left(f(U)\right)$ par $I_{n,p}$?
5. Quelle méthode reconnaît on lorsque $T(u) = 1 - u$ et $p = 2$? A t'on intérêt à utiliser des valeurs de $p > 2$?
6. On prend pour T la transformation de Kakutani définie par, pour $l \geq 1$:

$$T(x) = (x - x_{l-1}) + \frac{1}{2^l}, \text{pour } x_{l-1} \leq x < x_l.$$

   où $x_0 = 0$ et $x_l = 1/2 + 1/4 + \cdots + 1/2^l$. Vérifier que T laisse la loi de U_1 invariante.
7. Vérifier que si T est la transformation de Kakutani la suite $(T^k(0), k \geq 0)$ coïncide avec la suite de Van Der Corput en base 2. Donner la définition de la discrépance d'une suite $D_n^*(x_k, k \geq 1)$. Quelle estimation de la discrépance de la suite de Van Der Corput connaissez vous ?

   On supposera que, lorsque T est la transformation de Kakutani, la discrépance de la famille de suite $(T^k(x), k \geq 0)$ est majorée, uniformément en $x \in [0, 1]$, par :

$$C \frac{\log(n)}{n}$$

8. Lorsque T est la transformation de Kakutani, montrer que, si f est une fonction à variation finie de $[0,1]$ dans $\mathbf{R}$, de variation $V(f)$, alors

$$v_p(f) \leq C^2 V(f)^2 \frac{\log^2(p)}{p},$$

En déduire que, pour p assez grand, on a intérêt à utiliser l'estimateur $I_{n,p}$ de préférence à l'estimateur (classique) $I_{np,1}$ utilisant le même nombre d'appel à la fonction f.

9. On considère $\mathcal{I}$ la sous tribu de la tribu $\mathcal{A}$ des boréliens de $[0,1]$ définie par :

$$\mathcal{I} = \left\{ A \in \mathcal{A}, T^{-1}(A) = A \right\}.$$

On rappelle que si f est $\mathcal{I}$-mesurable alors $f(T(x)) = f(x)$ pour presque tout $x \in [0,1]$.
On considère une fonction mesurable et bornée f, on note $\hat{f} = \mu(f|\mathcal{I})$ (l'espérance conditionnelle de f sachant la tribu $\mathcal{I}$ sous la probabilité uniforme sur $[0,1]$, notée μ) et $\tilde{f}(x) = f(x) - \hat{f}(x)$. Montrer que :

$$I_{n,p} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \hat{f}(U_i) + \frac{1}{np} \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=0}^{p-1} \tilde{f}\left(T^{k-1}(U_i)\right)$$

10. Montrer, en utilisant la définition de l'espérance conditionnelle dans L^2 que :

$$\mu\left(\hat{f}\tilde{f}\right) = \int_0^1 \hat{f}(x)\tilde{f}(x)dx = 0.$$

En déduire que $\mathrm{Var}(I_{n,p}) = \frac{1}{n}\mathrm{Var}\left(\hat{f}(U_1)\right) + \frac{1}{np} v_p(\tilde{f})$.

11. Si $\hat{f}$ est non constante, a t'on intérêt à utiliser une méthode avec $p > 1$?

Partie II :Discrétisation d'équations différentielles stochastiques

On considère l'équation différentielle stochastique unidimensionnelle

$$dX_t = \sigma(X_t)\, dW_t + b(X_t)\, dt, \tag{20}$$

où b et σ sont des fonctions lipschitziennes. Le processus (W_t) est un mouvement brownien standard unidimensionnel.

On se donne une condition initiale $X_0 = x$ déterministe. Enfin, on se fixe un horizon en temps T et un nombre $N \in \mathbb{N}^*$ de pas de temps. Pour $k \in \{0, \dots, N\}$ on note $t_k = \frac{kT}{N}$ le k-ème instant de discrétisation et $\bar{X}^N_{t_k}$ la valeur en t_k du schéma d'Euler de pas $\frac{T}{N}$.

Le but de ce problème est de montrer l'estimation suivante (issue de la thèse de P. Seumen Tonou) : pour tout $p \geq 1$

$$\mathbb{E}\left(\left|\max_{0\leq t\leq T} X_t - \max_{0\leq k\leq N} \bar{X}^N_{t_k}\right|^{2p}\right) \leq C\left(\frac{\ln(N)}{N}\right)^p. \tag{21}$$

Dans l'inégalité précédente et dans tout le reste de l'énoncé on notera C des constantes indépendantes de N qui peuvent varier de ligne en ligne. On pose

$$\begin{aligned}
\varepsilon &= \max_{0\leq t\leq T} X_t - \max_{0\leq k\leq N} \bar{X}^N_{t_k},\\
\varepsilon_1 &= \max_{0\leq t\leq T} X_t - \max_{0\leq k\leq N} X_{t_k},\\
\varepsilon_2 &= \max_{0\leq k\leq N} X_{t_k} - \max_{0\leq k\leq N} \bar{X}^N_{t_k}.
\end{aligned}$$

1. Montrer

$$\varepsilon_2 \leq \max_{0\leq k\leq N}(X_{t_k} - \bar{X}^N_{t_k}),$$

puis

$$\varepsilon_2 \geq -\max_{0\leq k\leq N}(\bar{X}^N_{t_k} - X_{t_k}).$$

Appliquer un résultat du cours pour en déduire

$$\mathbb{E}\left(|\varepsilon_2|^{2p}\right) \leq \frac{C}{N^p}.$$

2. Montrer que

$$\varepsilon_1 \leq \max_{0\leq k\leq N-1}\left(\max_{t_k\leq t\leq t_{k+1}}(X_t - X_{t_k})\right).$$

En déduire que

$$\begin{aligned}
|\varepsilon_1|^{2p} \;&\leq\; C \max_{0\leq k\leq N-1}\left(\max_{t_k\leq t\leq t_{k+1}} \int_{t_k}^{t} b(X_s)\, ds\right)^{2p}\\
&\quad + C \max_{0\leq k\leq N-1}\left(\max_{t_k\leq t\leq t_{k+1}} \int_{t_k}^{t} \sigma(X_s)\, dW_s\right)^{2p}.
\end{aligned}$$

3. En utilisant l'inégalité

$$\max_{0\leq k\leq N-1} |x_k| \leq \sum_{k=0}^{N-1} |x_k| \tag{22}$$

montrer que

$$\mathbb{E}\left(\max_{0\leq k\leq N-1}\left(\max_{t_k\leq t\leq t_{k+1}} \int_{t_k}^{t} b(X_s)\, ds\right)^{2p}\right) \leq \frac{C}{N^{2p-1}}.$$

4. (a) Montrer que

$$\mathbb{E}\left(\max_{0\le k\le N-1}\left(\max_{t_k\le t\le t_{k+1}}\int_{t_k}^{t}[\sigma(X_s)\ -\sigma(X_{t_k})]dW_s\right)^{2p}\right)\le \frac{C}{N^{2p-1}}.$$

(b) Montrer que

$$\mathbb{E}\left(\max_{0\le k\le N-1}\left(\max_{t_k\le t\le t_{k+1}}\int_{t_k}^{t}\sigma(X_{t_k})dW_s\right)^{2p}\right)$$
$$\le C\sqrt{\mathbb{E}\left(\left(\max_{0\le k\le N-1}\max_{t_k\le t\le t_{k+1}}|W_t-W_{t_k}|\right)^{4p}\right)}.$$

(c) Rappeler la densité de la loi de $(W_{t_1},\max_{0\le t\le t_1}W_t)$. En déduire celle de $\max_{0\le t\le t_1}W_t$ puis que $\max_{0\le k\le N-1}\max_{t_k\le t\le t_{k+1}}(W_t-W_{t_k})$ a même loi que

$$\sqrt{t_1}\max_{0\le k\le N-1}|G_k|$$

où les variables aléatoires $(G_k)_{0\le k\le N-1}$ sont i.i.d. suivant la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}_1(0,1)$.

(d) Soit q le plus petit entier impair qui majore $4p$. Montrer que pour $x>0$, $\mathbf{E}(|G_0|^q 1_{\{|G_0|\ge x\}})=P(x)e^{-\frac{x^2}{2}}$ où $P(.)$ est un polynôme de degré $q-1$. En déduire à l'aide de (22) que pour $\alpha>2$,

$$\lim_{N\to\infty}\mathbf{E}\left(\max_{0\le k\le N-1}\left(|G_k|^{4p}1_{\{|G_k|\ge\sqrt{\alpha\ln(N)}\}}\right)\right)=0,$$

puis que pour $N\ge 2$, $\mathbf{E}\left(\max_{0\le k\le N-1}|G_k|^{4p}\right)\le C(\ln(N))^{2p}$.

(e) Conclure que

$$\mathbb{E}\left(\max_{0\le k\le N-1}\left(\max_{t_k\le t\le t_{k+1}}\int_{t_k}^{t}\sigma(X_s)\,dW_s\right)^{2p}\right)\le C\left(\frac{\ln(N)}{N}\right)^{p}.$$

5. Vérifier l'estimation (21).

6. Comment peut-on améliorer l'approximation de $\max_{0\le t\le T}X_t$?

Méthodes de Monte-Carlo en finance

Examen du jeudi 21 février 2008 8h30-11h30

Fonction d'importance et normalisation

Pour calculer $\mathbf{E}(f(X))$ où X désigne une variable aléatoire de densité p sur $\mathbf{R}^d$ et $f : \mathbf{R}^d \to \mathbf{R}$ une fonction telle que $\mathrm{Var}(f(X)) < +\infty$, on se donne $(Y_i)_{i\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées suivant une densité q sur $\mathbf{R}^d$.

1. Montrer que $\mathbf{P}(q(Y_1) = 0) = 0$. En déduire que $\mathbf{P}(\exists i \geq 1 \text{ t.q. } q(Y_i) = 0) = 0$.
2. On suppose que dx p.p. $q(x) = 0 \Rightarrow fp(x) = 0$ et on utilise la convention $\frac{fp}{q}(x) = 0$ si $q(x) = 0$.
   (a) Que vaut $\int |f|p(x)\mathbf{1}_{\{q(x)=0\}}dx$? En déduire que la variable aléatoire $\frac{fp}{q}(Y_1)$ est intégrable d'espérance égale à $\mathbf{E}(f(X))$.
   (b) Montrer que
   $$\int \left(\frac{fp}{q}\right)^2 q(x)dx \geq \left(\int |f|p(x)dx\right)^2$$
   avec le minorant atteint pour $q_*(x) = \frac{|f|p(x)}{\int |f|p(y)dy}$.
   (c) En déduire un choix de q qui permet de minimiser la variance de l'estimateur
   $$Z_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{fp}{q}(Y_i)$$
   pour tout n. Que représente $v_* = \left(\int |f|p(x)dx\right)^2 - \mathbf{E}^2(f(X))$?
   (d) Pour une densité q quelconque, expliquer comment construire un intervalle de confiance asymptotique pour l'estimation de $\mathbf{E}(f(X))$ par Z_n à partir de l'échantillon $(Y_1, \ldots, Y_n)$?

On note R_n l'estimateur :
$$R_n = \frac{\sum_{i=1}^n \frac{fp}{q}(Y_i)\mathbf{1}_{q(Y_i)>0}}{\sum_{i=1}^n \frac{p}{q}(Y_i)\mathbf{1}_{q(Y_i)>0}}.$$

3. Lorsque $\mathbf{P}(q(X) > 0) > 0$, calculer la limite de R_n lorque n tends vers $+\infty$. En déduire que si p.p. $q(x) = 0 \Rightarrow p(x) = 0$, alors R_n converge vers $\mathbf{E}(f(X))$.
4. Montrer que si $\mathbf{P}(f(X) = \mathbf{E}[f(X)]) > 0$, les variances de R_n et de Z_n sont nulles pour le choix $q(x) = \frac{\mathbf{1}_{\{f(x)=\mathbf{E}(f(X))\}}p(x)}{\mathbf{P}(f(X)=\mathbf{E}[f(X)])}$. Quelle sont alors les valeurs de R_n et Z_n ?
5. On suppose désormais que $\mathbf{P}(f(X) = \mathbf{E}[f(X)]) = 0$ et que dx p.p. $q(x) = 0 \Rightarrow p(x) = 0$. On utilise la convention $\frac{p}{q}(x) = 0$ si $q(x) = 0$.
   (a) On pose $\bar{f}(x) = f(x) - \mathbf{E}[f(X)]$. Montrer que si $v(q) = \int \left(\frac{\bar{f}p}{q}\right)^2 q(x)dx < +\infty$, alors $\sqrt{n}(R_n - \mathbf{E}(f(X)))$ converge en loi vers $\mathcal{N}_1(0, v(q))$.
   Indication : on pourra remarquer que $\sqrt{n}(R_n - \mathbf{E}(f(X))) = \frac{1}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \frac{p}{q}(Y_i)} \times \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^n \frac{\bar{f}p}{q}(Y_i)$ et appliquer le théorème de Slutsky : si $(Z_n)_n$ (resp. $(W_n)_n$) désigne une suite de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbf{R}^{d_1}$ (resp. $\mathbf{R}^{d_2}$) qui converge en loi vers une constante $z \in \mathbf{R}^{d_1}$ (resp. vers une variable aléatoire W à valeurs dans $\mathbf{R}^{d_2}$), alors $(Z_n, W_n)_n$ converge en loi vers (z, W).

(b) Expliquer comment construire un intervalle de confiance asymptotique pour l'estimation de $\mathbf{E}(f(X))$ par R_n à partir de l'échantillon $(Y_1, \ldots, Y_n)$?

(c) Montrer que $v(q) \geq \left(\int |\bar{f}|p(x)dx\right)^2$ où le minorant est atteint pour $\bar{q}(x) = \frac{|\bar{f}|p(x)}{\int |\bar{f}|p(y)dy}$.

6. (a) Pour $y \in \mathbf{R}$, on note $y^+ = \max(y, 0)$ et $y^- = \max(-y, 0)$. Montrer que

$$v_* = 4 \int f^+(x)p(x)dx \int f^-(x)p(x)dx \text{ et } v(\bar{q}) = 4\left(\int \bar{f}^+(x)p(x)dx\right)^2.$$

(b) Vérifier que si f est de signe constant alors $v_* \leq v(\bar{q})$.

(c) On se place dans le cas particulier où $f(x) = x$ et $p(x) = (1-\alpha)e^x 1_{\{x<0\}} + \alpha\lambda e^{-\lambda x} 1_{\{x>0\}}$ avec $\lambda > 0$, $\alpha \in]0, 1[$ tels que $\frac{\alpha}{\lambda} > 1 - \alpha$. Vérifier que

$$v_* > v(\bar{q}) \Leftrightarrow (1-\alpha)e^{-2\lambda(1-\alpha)} > \frac{\alpha}{\lambda}e^{-2\lambda\frac{\alpha}{\lambda}}$$

En étudiant la monotonie de la fonction $g(x) = xe^{-2\lambda x}$, conclure que l'on peut trouver (α, λ) tel que $v_* > v(\bar{q})$.

Simulation d'équations différentielles stochastiques

Le résultat de la question préliminaire qui suit sera utilisé à la fin du problème dans les questions 8a et 8c.

1. Soit (X, Y) un couple qui suit la loi gaussienne $\mathcal{N}_2\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix}\right)$. On suppose $a > 0$ et on pose $Z = Y - \frac{c}{a}X$.
   (a) Quelle est la loi de (X, Z) ?
   (b) Vérifier que $\mathbf{E}(X^4) = 3a^2$, $\mathbf{E}(X^2Y^2) = ab + 2c^2$, $\mathbf{E}(X^3Y) = 3ac$ et $\mathbf{E}(XY^3) = 3bc$.
   (c) Montrer que pour $l, m \in \mathbf{N}$, $\mathbf{E}(X^lY^m) = 0$ dès lors que $l + m$ est impair.

Dans toute la suite, par fonction régulière, on entend une fonction dérivable autant de fois que nécessaire avec des dérivées bornées et φ désigne une fonction régulière de $\mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{R}$.

Soit $T > 0$, $y \in \mathbb{R}^n$, $\sigma : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^{n\times d}$ et $b : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ deux fonctions régulières. Sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, on se donne également $(W_t)_{t\in[0,T]}$ un mouvement brownien à valeurs $\mathbf{R}^d$. On s'intéresse à l'Equation Différentielle Stochastique

$$\begin{cases} X_0 = y, \\ dX_t = \sigma(X_t)dW_t + b(X_t)dt. \end{cases} \tag{23}$$

On note L l'opérateur différentiel du second ordre défini par

$$L\varphi(x) = \frac{1}{2}\sum_{i,l=1}^{n} a_{il}(x)\partial^2_{x_ix_l}\varphi(x) + \sum_{i=1}^{n} b_i(x)\partial_{x_i}\varphi(x) \text{ où } a_{il}(x) = \sum_{j=1}^{d}\sigma_{ij}(x)\sigma_{lj}(x).$$

Pour $j \in \{1, \ldots, d\}$, on note également $\sigma_j(x) = (\sigma_{ij}(x))_{1\le i\le n} \in \mathbf{R}^n$ la j-ème colonne de la matrice σ et $\partial\sigma_j(x) = (\partial_{x_i}\sigma_{lj}(x))_{1\le l,i\le n} \in \mathbf{R}^{n\times n}$.

2. Écrire le schéma de Milshtein pour cette EDS. À quelle condition peut-on l'implémenter ?
3. Pour $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ une fonction régulière, on introduit la solution u, supposée régulière, de l'Equation aux Dérivées Partielles

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) + Lu(t, x) = 0,\ (t, x) \in [0, T] \times \mathbf{R}^n \\ u(T, x) = f(x),\ x \in \mathbf{R}^n \end{cases}. \tag{24}$$

   On note également $(\bar{X}_{t_k})_{0\le k\le N}$ le vecteur obtenu sur la grille temporelle $t_k = \frac{kT}{N}$ par discrétisation de l'EDS (23) par un schéma approprié tel que $\bar{X}_0 = y$.
   (a) Vérifier que

$$\mathbf{E}(f(\bar{X}_T)) - \mathbf{E}(f(X_T)) = \sum_{k=0}^{N-1}\mathcal{E}_k \text{ où } \mathcal{E}_k = \mathbf{E}\left(u(t_{k+1}, \bar{X}_{t_{k+1}}) - u(t_k, \bar{X}_{t_k})\right).$$

   (b) Vérifier que $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t, x) = L^2u(t, x)$ où $L^2u = L(Lu)$. En déduire que

$$u(t_{k+1}, \bar{X}_{t_k}) + \frac{T}{N}Lu(t_{k+1}, \bar{X}_{t_k}) + \frac{T^2}{2N^2}L^2u(t_{k+1}, \bar{X}_{t_k}) = u(t_k, \bar{X}_{t_k}) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{N^3}\right).$$

(c) Conclure que si pour tout $k \in \{0, \dots, N-1\}$,

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(u(t_{k+1}, \bar{X}_{t_{k+1}})|\bar{X}_{t_k}) =& u(t_{k+1}, \bar{X}_{t_k}) + \frac{T}{N} Lu(t_{k+1}, \bar{X}_{t_k}) \\ &+ \frac{T^2}{2N^2} L^2 u(t_{k+1}, \bar{X}_{t_k}) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{N^3}\right)\end{aligned} \tag{25}$$

alors $\mathcal{E}_k = \mathcal{O}\left(\frac{1}{N^3}\right)$ et l'ordre faible du schéma est $1/N^2$.

L'objectif du problème est de démontrer que (25) est vérifiée pour deux schémas proposés récemment par Ninomiya et Victoir et par Kusuoka, Ninomiya et Ninomiya.

4. Pour $j \in \{1, \dots, d\}$, on note V_j l'opérateur différentiel du premier ordre défini par $V_j\varphi(x) = \sigma_j(x).\nabla\varphi(x) = \sum_{i=1}^n \sigma_{ij}(x)\partial_{x_i}\varphi(x)$. Pour V et W deux opérateurs différentiels, VW désigne l'opérateur différentiel (en général différent de WV) défini par $VW\varphi(x) = V(W\varphi)(x)$. Pour $m \in \mathbf{N}^*$, V^m désigne l'opérateur $\underbrace{V \dots V}_{m \text{ fois}}$.

   Enfin, on pose $V_0 = L - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^d V_j^2$.

   (a) Exprimer L^2 à l'aide des V_i, $i \in \{0, \dots, d\}$.

   (b) Montrer que pour $j \in \{1, \dots, d\}$,

$$V_j^2\varphi(x) = \sum_{i,l=1}^n \sigma_{ij}(x)\sigma_{lj}(x)\partial^2_{x_i x_l}\varphi(x) + \sum_{l=1}^n \left(\sum_{i=1}^n \partial_{x_i}\sigma_{lj}(x)\sigma_{ij}(x)\right)\partial_{x_l}\varphi(x)$$

   et en déduire que $V_0\varphi(x) = \sigma_0(x).\nabla\varphi(x)$ où $\sigma_0(x) = b(x) - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^d \partial\sigma_j\sigma_j(x)$.

5. Pour $\eta : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ une fonction régulière on note V l'opérateur différentiel du premier ordre défini par $V\varphi(x) = \eta(x).\nabla\varphi(x)$ et $(e^{tV}(x))_{t\in\mathbf{R}}$ l'unique solution de l'Équation Différentielle ordinaire

$$\frac{d}{dt}y(t) = \eta(y(t)), \quad y(0) = x.$$

   (a) Calculer $\frac{d\varphi(e^{tV}(x))}{dt}$ et en déduire que $\forall t \in \mathbf{R},\ \varphi(e^{tV}(x)) = \varphi(x) + \int_0^t V\varphi(e^{sV}(x))ds$.

   (b) En déduire que pour tout $l \in \mathbf{N}$,

$$\varphi(e^{tV}(x)) = \sum_{m=0}^l \frac{t^m V^m \varphi(x)}{m!} + \int_0^t \int_0^{s_1} \dots \int_0^{s_l} V^{l+1}\varphi(e^{s_{l+1}V}(x))ds_{l+1}\dots ds_1.$$

   Indication : *écrire l'égalité de la question précédente en remplaçant φ par $V^m\varphi$ où $m \geq 1$.*

   Justifier la notation $e^{tV}(x)$ et vérifier que $\varphi(e^{tV}(x)) = \sum_{m=0}^l \frac{t^m V^m\varphi(x)}{m!} + \mathcal{O}(|t|^{l+1})$.

   (c) Soit W un autre opérateur différentiel du premier ordre associé à une fonction régulière de $\mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{R}^n$. Montrer que pour $s, t \in \mathbf{R}$,

$$\varphi(e^{sW}e^{tV}(x)) = \sum_{\substack{m_1, m_2 \geq 0 \\ m_1+m_2 \leq l}} \frac{s^{m_1}t^{m_2}V^{m_2}W^{m_1}\varphi(x)}{m_1!m_2!} + \mathcal{O}((|s| \vee |t|)^{l+1}).$$

   Indication : *écrire le développement à l'ordre l de $\varphi(e^{sW}(y))$ en une valeur bien choisie de $y \in \mathbf{R}^n$.*

6. Soit $t > 0$, $G_1, \dots, G_d$ des gaussiennes centrées réduites indépendantes et pour $j \in \{1, \dots, d\}$, $Z_j = \sqrt{t}G_j$.

(a) Pour $m = (m_0, \ldots, m_{d+1}) \in \mathbf{N}^{d+2}$ on note $\|m\| = 2(m_0 + m_{d+1}) + \sum_{j=1}^d m_j$. Expliquer comment obtenir l'égalité

$$\mathbf{E}\left[\varphi(e^{\frac{t}{2}V_0}e^{Z_1V_1}\ldots e^{Z_dV_d}e^{\frac{t}{2}V_0}(x))\right]$$
$$= \sum_{m:\|m\|\le 5} \frac{t^{\frac{\|m\|}{2}}}{2^{m_0+m_{d+1}}} \frac{V_0^{m_{d+1}}V_d^{m_d}\ldots V_1^{m_1}V_0^{m_0}\varphi(x)}{m_0!m_1!\ldots m_d!m_{d+1}!}\mathbf{E}[G_1^{m_1}\times\ldots\times G_d^{m_d}] + \mathcal{O}(t^3).$$

(b) Remarquer que s'il existe $j \in \{1, \ldots, d\}$ tel que m_j est impair, alors $\mathbf{E}[G_1^{m_1}\times\ldots\times G_d^{m_d}] = 0$ et en déduire que la somme précédente est restreinte aux $(d+2)$-uplets m tels que $\|m\| \in \{0, 2, 4\}$. Vérifier qu'en dehors du cas $m = (0, \ldots, 0)$, les seuls termes non nuls de cette somme correspondent aux cas suivants où on ne précise que les m_i non nuls :

(1) $m_0 + m_{d+1} = 1$,

(2) $m_i = 2$ pour un indice $i \in \{1, \ldots, d\}$,

(3) $m_i = 4$ pour un indice $i \in \{1, \ldots, d\}$,

(4) $m_i = m_j = 2$ pour un couple d'indices $i < j \in \{1, \ldots, d\}$,

(5) $m_i = 2$ pour un indice $i \in \{1, \ldots, d\}$ et $m_0 + m_{d+1} = 1$,

(6) $m_0 + m_{d+1} = 2$.

(c) Conclure que

$$\mathbf{E}\left[\varphi(e^{\frac{t}{2}V_0}e^{Z_1V_1}\ldots e^{Z_dV_d}e^{\frac{t}{2}V_0}(x))\right] = \varphi(x) + tL\varphi(x)$$
$$+ \frac{t^2}{2}\left(\frac{1}{4}\sum_{i=1}^d V_i^4 + \frac{1}{2}\sum_{1\le i<j\le d} V_j^2V_i^2 + \frac{1}{2}\left\{V_0\sum_{i=1}^d V_i^2 + \sum_{i=1}^d V_i^2V_0\right\} + V_0^2\right)\varphi(x) + \mathcal{O}(t^3).$$

(d) En déduire que

$$\mathbf{E}\left[\frac{1}{2}\varphi(e^{\frac{t}{2}V_0}e^{Z_1V_1}\ldots e^{Z_dV_d}e^{\frac{t}{2}V_0}(x)) + \frac{1}{2}\varphi(e^{\frac{t}{2}V_0}e^{Z_dV_d}\ldots e^{Z_1V_1}e^{\frac{t}{2}V_0}(x))\right]$$
$$= \varphi(x) + tL\varphi(x) + \frac{t^2}{2}L^2\varphi(x) + \mathcal{O}(t^3).$$

7. Le schéma de Ninomiya et Victoir nécessite de générer une suite $(U_k)_{1\le k\le N}$ de variables uniformes sur $[0,1]$ indépendantes et indépendantes de $(W^1, \ldots, W^d)$. Pour passer de $\bar{X}_{t_k}$ à $\bar{X}_{t_{k+1}}$, il consiste à

(i) Intégrer sur la durée $\frac{T}{2N}$ l'EDO $\frac{d}{dt}y(t) = \sigma_0(y(t))$,

(ii) Si $U_{k+1} \le \frac{1}{2}$, intégrer successivement pour j croissant de 1 à d l'EDO $\frac{d}{dt}y(t) = \sigma_j(y(t))$ sur la durée aléatoire $W^j_{t_{k+1}} - W^j_{t_k}$. Si $U_{k+1} > \frac{1}{2}$, effectuer la même opération mais pour j décroissant de d à 1.

(iii) Reprendre l'étape **(i)**.

Vérifier que pour ce schéma,

$$\mathbf{E}(\varphi(\bar{X}_{t_1})) = \varphi(y) + \frac{T}{N}L\varphi(y) + \frac{T^2}{2N^2}L^2\varphi(y) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{N^3}\right),$$

propriété qui se généralise facilement en (25).

8. L'inconvenient du schéma de Ninomiya et Victoir est qu'il faut intégrer $(d+2)$ EDOs à chaque pas de temps, ce qui peut s'avérer très coûteux. Ninomiya et Ninomiya ont proposé un schéma qui préserve l'ordre de convergence faible en $1/N^2$ mais dans lequel il suffit d'intégrer deux EDOs à chaque pas de temps.

   (a) Soit $(G_{1,j}, G_{2,j})_{1\leq j\leq d}$ des couples i.i.d. suivant la loi $\mathcal{N}_2\left(\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}a & c\\ c & b\end{pmatrix}\right)$. À l'aide de la question 1, montrer que $\mathbf{E}(\prod_{j=1}^d G_{1,j}^{l_j} G_{2,j}^{m_j}) = 0$ dès que la somme des deux coordonnées de l'un des couples $(l_j, m_j) \in \mathbf{N}^2$ est impaire.

   (b) Soient $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$. Expliquer comment obtenir l'égalité

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{E}\left(\varphi(e^{t\beta V_0+\sqrt{t}\sum_{j=1}^d G_{2,j}V_j} e^{t\alpha V_0+\sqrt{t}\sum_{j=1}^d G_{1,j}V_j}(x))\right)\\
&= \varphi(x) + tV_0\varphi(x)(\alpha+\beta) + t\sum_{j=1}^d V_j^2\varphi(x)\left(\frac{\mathbf{E}(G_{1,j}^2)}{2} + \mathbf{E}(G_{1,j}G_{2,j}) + \frac{\mathbf{E}(G_{1,j}^2)}{2}\right)\\
&+ t^2V_0^2\varphi(x)\left(\frac{\alpha^2}{2} + \alpha\beta + \frac{\beta^2}{2}\right)\\
&+ t^2\sum_{j=1}^d \left\{V_jV_0V_j\varphi(x)\left(\alpha\frac{\mathbf{E}(G_{1,j}^2)}{6} + (\alpha+\beta)\frac{\mathbf{E}(G_{1,j}G_{2,j})}{2} + \beta\frac{\mathbf{E}(G_{2,j}^2)}{6}\right)\right.\\
&\qquad + V_0V_j^2\varphi(x)\left(\alpha\frac{\mathbf{E}(G_{1,j}^2)}{6} + \alpha\frac{\mathbf{E}(G_{1,j}G_{2,j}) + \mathbf{E}(G_{2,j}^2)}{2} + \beta\frac{\mathbf{E}(G_{2,j}^2)}{6}\right)\\
&\qquad + V_j^2V_0\varphi(x)\left(\alpha\frac{\mathbf{E}(G_{1,j}^2)}{6} + \beta\frac{\mathbf{E}(G_{1,j}^2) + \mathbf{E}(G_{1,j}G_{2,j})}{2} + \beta\frac{\mathbf{E}(G_{2,j}^2)}{6}\right)\\
&\qquad \left. + V_j^4\varphi(x)\left(\frac{\mathbf{E}(G_{1,j}^4)}{24} + \frac{\mathbf{E}(G_{1,j}^3G_{2,j})}{6} + \frac{\mathbf{E}(G_{1,j}^2G_{2,j}^2)}{4} + \frac{\mathbf{E}(G_{1,j}G_{2,j}^3)}{6} + \frac{\mathbf{E}(G_{2,j}^4)}{24}\right)\right\}\\
&+ t^2\sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^d \left\{V_i^2V_j^2\varphi(x)\left(\frac{\mathbf{E}(G_{1,i}^2G_{1,j}^2)}{24} + \frac{\mathbf{E}(G_{1,i}^2G_{1,j}G_{2,j})}{6} + \frac{\mathbf{E}(G_{1,i}^2G_{2,j}^2)}{4}\right.\right.\\
&\qquad\qquad \left. + \frac{\mathbf{E}(G_{1,i}G_{2,i}G_{2,j}^2)}{6} + \frac{\mathbf{E}(G_{2,i}^2G_{2,j}^2)}{24}\right)\\
&\qquad + V_iV_jV_iV_j\varphi(x)\left(\frac{\mathbf{E}(G_{1,i}^2G_{1,j}^2)}{24} + \frac{\mathbf{E}(G_{1,i}^2G_{1,j}G_{2,j})}{6} + \frac{\mathbf{E}(G_{1,i}G_{1,j}G_{2,i}G_{2,j})}{4}\right.\\
&\qquad\qquad \left.\left. + \frac{\mathbf{E}(G_{1,i}G_{2,i}G_{2,j}^2)}{6} + \frac{\mathbf{E}(G_{2,i}^2G_{2,j}^2)}{24}\right)\right\} + \mathcal{O}(t^3)
\end{aligned}
$$

   (c) Soit $u \geq 1/2$ et $\varepsilon \in \{-1, 1\}$. Vérifier que pour le choix $a = u$, $b = 1+u-\varepsilon\sqrt{2(2u-1)}$ et $c = -u + \varepsilon\frac{\sqrt{2(2u-1)}}{2}$, $\begin{pmatrix}a & c\\ c & b\end{pmatrix}$ est bien une matrice de covariance. En posant également

$\alpha = \varepsilon\frac{\sqrt{2(2u-1)}}{2}$ et $\beta = 1 - \alpha$, vérifier que

$$\begin{cases} a + b + 2c = 1 = a^2 + 4ac + 2ab + 4c^2 + 4bc + b^2 \\ \alpha a + \beta b + 3(\alpha + \beta)c = 0 \\ \alpha a + \beta b + 3\alpha(c + b) = 3/2 \\ \alpha a + \beta b + 3\beta(c + a) = 3/2 \\ a^2 + 4ac + 6ab + 4bc + b^2 = 3 \\ a^2 + 4ac + 6c^2 + 4bc + b^2 = 0 \end{cases}.$$

En déduire que pour ce choix

$$\mathbf{E}\left(\varphi(e^{t\beta V_0 + \sqrt{t}\sum_{j=1}^{d} G_{2,j}V_j} e^{t\alpha V_0 + \sqrt{t}\sum_{j=1}^{d} G_{1,j}V_j}(x))\right) = \varphi(x) + tL\varphi(x) + \frac{t^2}{2}L^2\varphi(x) + \mathcal{O}(t^3).$$

(d) Quel est le schéma de Ninomiya et Ninomiya ?

Méthodes de Monte-Carlo en finance

Examen du 15 février 2007 8h30-11h30

Partie 1

Exercice 1 On considère X une variable aléatoire gaussienne centrée réduite.

1. Pour f une fonction bornée, on note $I = \mathbf{E}(f(X))$ et I_n^1 et I_n^2 les estimateurs :

$$I_n^1 = \frac{1}{2n}\left(f(X_1) + f(X_2) + \ldots + f(X_{2n-1}) + f(X_{2n})\right).$$

$$I_n^2 = \frac{1}{2n}\left(f(X_1) + f(-X_1) + \ldots + f(X_n) + f(-X_n)\right).$$

   où $(X_n, n \geq 1)$ est une suite de variables aléatoires indépendantes tirées selon la loi de X.
   Identifier la limite en loi des variables aléatoires $\sqrt{n}(I_n^1 - I)$. Même question pour la famille de variables aléatoires $\sqrt{n}(I_n^2 - I)$.
   On calculera la variance des lois limites.

2. Comment peut on estimer la variance de lois limites précédentes à l'aide de l'échantillon $(X_n, 1 \leq i \leq 2n)$ pour I_n^1 et $(X_n, 1 \leq i \leq n)$ pour I_n^2 ?
   Comment évaluer l'erreur dans une méthode de Monte-Carlo utilisant I_n^1 ou I_n^2 ?

3. Montrer que si f est une fonction croissante $\mathrm{Cov}\ \ (f(X), f(-X)) \leq 0$. Quel est dans ce cas, l'estimateur qui vous parait préférable I_n^1 ou I_n^2 ? Même question si f est décroissante.

Exercice 2 Soit G une variable aléatoire gaussienne centrée réduite.

1. On pose $L^m = \exp\left(-mG - \frac{m^2}{2}\right)$, montrer que $\mathbf{E}(L^m f(G+m)) = \mathbf{E}(f(G))$ pour toute fonction f bornée.
   Soit X^m une autre variable aléatoire, intégrable telle que $\mathbf{E}(X^m f(G+m)) = \mathbf{E}(f(G))$ pour toute fonction f bornée. Montrer que $\mathbf{E}\left(X^m | G\right) = L^m$.
   Dans une méthode de simulation quelle représentation de $\mathbf{E}(f(G))$ vaut il mieux utiliser $\mathbf{E}(X^m f(G+m))$ ou $\mathbf{E}(L^m f(G+m))$?

2. Montrer que la variance de $L^m f(G+m)$ se met sous la forme

$$\mathbf{E}\left(e^{-mG+\frac{m^2}{2}} f^2(G)\right) - \mathbf{E}(f(G))^2,$$

   et que la valeur de m qui minimise cette variance est solution d'un équation que l'on explicitera. Que vaut ce m optimum lorsque $f(x) = x$? Commentaire.

3. Soit p_1 et p_2 deux nombres positifs de somme 1 et m_1 et m_2 2 réels, on pose :

$$l(g) = p_1 e^{m_1 g - \frac{m_1^2}{2}} + p_2 e^{m_2 g - \frac{m_2^2}{2}}.$$

   On pose pour f mesurable bornée $\mu(f) = \mathbf{E}(l(G)f(G))$. Montrer que

$$\mu(f) = \int_{\mathbf{R}} f(x)p(x)dx,$$

   p étant une densité que l'on précisera.

4. Proposer une technique de simulation selon la loi de densité p.

5. On suppose que $\tilde{G}$ est une variable aléatoire suivant la loi précédente. Montrer que :

$$\mathbf{E}(l^{-1}(\tilde{G})f(\tilde{G})) = \mathbf{E}(f(G)),$$

$$\text{Var}(l^{-1}(\tilde{G})f(\tilde{G})) = \mathbf{E}\left(l^{-1}(G)f^2(G)\right) - \mathbf{E}(f(G))^2.$$

6. On s'intéresse au cas $p_1 = p_2 = 1/2$, $m_1 = -m_2 = m$ et $f(x) = x$. Montrer que :

$$\text{Var}(l^{-1}(\tilde{G})\tilde{G}) = \mathbf{E}\left(\frac{e^{m^2/2}G^2}{\cosh(mG)}\right).$$

On note $v(m)$ cette variance comme fonction de m. Vérifier que $v'(0) = 0$ et $v''(0) < 0$. Comment choisir m pour réduire la variance lors d'un calcul de $\mathbf{E}(G)$?

Exercice 3 Soit X une variable aléatoire réelle et Y une variable de contrôle réelle. On supposera que $\mathbf{E}(X^2) < +\infty$ et que $\mathbf{E}(Y^2) < +\infty$, $\mathbf{E}(Y) = 0$ pour $i = 1, \ldots, n$.

1. Soit λ un vecteur de $\mathbf{R}^n$, calculer Var$(X - \lambda Y)$ et la valeur λ^* qui minimise cette variance. As t'on intérêt à supposer X et Y indépendantes ?
2. On suppose que $((X_n, Y_n), n \geq 0)$ est une suite de variables aléatoires indépendantes tirées selon la loi du couple (X, Y). On définit λ_n^* par

$$\lambda_n^* = \frac{\sum_{i=1}^n X_i Y_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i \sum_{i=1}^n Y_i}{\sum_{i=1}^n X_i^2 - \frac{1}{n}(\sum_{i=1}^n X_i)^n}.$$

Montrer que λ_n^* tends presque surement vers λ^* lorsque n tend vers $+\infty$.

3. Montrez que $\sqrt{n}\left(\lambda_n^* - \bar{\lambda}_n\right)\bar{Y}_n$, où $\bar{Y}_n = (Y_1 + \cdots + Y_n)/n$ tend vers 0 presque sûrement.
4. En utilisant le théorème de Slutsky (voir question suivante) montrer que :

$$\sqrt{n}\left(\frac{1}{n}(X_1 - \lambda_n^* Y_1 + \cdots + X_n - \lambda_n^* Y_n) - \mathbf{E}(X)\right)$$

tends vers un loi gaussienne de variance Var$(X - \lambda_n^* Y)$.
Comment interpreter le résultat pour une méthode de Monte-Carlo utilisant λX comme variable de contrôle ?

5. Montrez le théorème de Slutsky, c'est à dire que si X_n converge en loi vers X et Y_n converge en loi vers une constante a alors le couple (X_n, Y_n) converge en loi vers (X, a) (on pourra considérer la fonction caractéristique du couple (X_n, Y_n).

Partie 2 : Méthode de Monte-Carlo exacte pour les options asiatiques

Les questions 4. et 5. peuvent être traitées indépendamment.

Sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, on se donne $(W_t)_{t\in[0,T]}$ un mouvement brownien réel standard. On se place dans le modèle de Black-Scholes avec taux d'intérêt r sous la probabilité risque-neutre où le cours à l'instant t de l'actif risqué est $S_t = S_0 e^{\sigma W_t + (r - \frac{\sigma^2}{2})t}$.
Ce problème est consacré à une technique récemment proposée par Jourdain et Sbai [9] pour calculer le prix

$$\mathcal{P} = \mathbf{E}\left(e^{-rT}\varphi\left(\frac{1}{T}\int_0^T S_t dt\right)\right)$$

de l'option asiatique de payoff φ sans recourir à un schéma de discrétisation en temps.

9. voir Preprint CERMICS 2007-

1. On pose $\gamma = r - \frac{\sigma^2}{2}$ et $X_t = \frac{S_t}{t}\int_0^t e^{-\sigma W_u - \gamma u} du$ pour $t > 0$.
   (a) Vérifier que $X_T = \frac{1}{T}\int_0^T S_0 e^{\sigma(W_T - W_{T-t})+\gamma t} dt$.
   (b) Que peut-on dire du processus $(W_T - W_{T-t})_{t\in[0,T]}$?
   (c) En déduire que $\mathcal{P} = \mathbf{E}(e^{-rT}\varphi(X_T))$.
   (d) Donner $\lim_{t\to 0^+} X_t$ et calculer dX_t.
   (e) En déduire que le processus $Y_t = \ln(X_t/S_0)$ est solution de l'EDS
$$dY_t = \sigma dW_t + \gamma dt + \frac{e^{-Y_t} - 1}{t} dt,\ Y_0 = 0. \tag{26}$$
   (f) Pour $\tilde{Y}$ une autre solution de cette équation, vérifier que $d(Y_t - \tilde{Y}_t)^2 \leq 0$ et en déduire l'unicité trajectorielle pour (26).
2. Pour $t > 0$ soit $Z_t = \frac{\sigma}{t}\int_0^t s dW_s + \frac{\gamma}{2} t$.
   (a) Pour $u, t \geq 0$, calculer $\mathbf{E}(Z_t)$ et Cov (Z_u, Z_t).
   (b) Pour $0 \leq t_1 < t_2 < \ldots < t_n \leq T$, que peut-on dire du vecteur $(Z_{t_1}, \ldots, Z_{t_n})$? Comment peut-on le simuler ?
   (c) Vérifier que $\frac{1}{t}\int_0^t s dW_s = W_t - \frac{1}{t}\int_0^t W_s ds$ et en déduire $\lim_{t\to 0^+} Z_t$.
   (d) Montrer que Z_t est solution de l'EDS
$$dZ_t = \sigma dW_t + \gamma dt - \frac{Z_t}{t} dt,\ Z_0 = 0.$$
   Pourquoi est-ce l'unique solution de cette équation ?
3. Dans cette question, on admettra que les intégrales que l'on est amené à considérer sont bien définies.
   (a) Pour un processus $(H_t)_{t\in[0,T]}$ adapté à la filtration de W et suffisamment intégrable, donner $\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbf{P}}$ tel que sous la probabilité $\mathbb{Q}$, $(B_t = W_t - \int_0^t H_s ds)_{t\leq T}$ est un mouvement Brownien.
   (b) Préciser H_t pour que Z_t soit solution de l'EDS
$$dZ_t = \sigma dB_t + \gamma dt + \frac{e^{-Z_t} - 1}{t} dt,\ Z_0 = 0.$$
   (c) On pose
$$A(t,z) = \frac{1 - z + \frac{z^2}{2} - e^{-z}}{\sigma^2 t} \text{ et } f(t,z) = \left[\frac{A}{t} + \left(\frac{z}{t} - \gamma - \frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial A}{\partial z}\right)\frac{\partial A}{\partial z} - \frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 A}{\partial z^2}\right](t,z).$$
   En admettant que d'après la loi du logarithme itéré, pour tout $\varepsilon > 0$, $Z_t = o(t^{\frac{1}{2}-\varepsilon})$ en 0^+, donner $\lim_{t\to 0^+} A(t, Z_t)$.
   (d) Calculer $dA(t, Z_t)$ et en déduire que
$$\mathcal{P} = \mathbf{E}\left(\psi(Z_T) e^{\int_0^T f(t,Z_t)dt}\right) \text{ où } \psi(z) = e^{-rT}\varphi(S_0 e^z) e^{A(T,z)}.$$
4. Afin d'obtenir une espérance calculable par la méthode de Monte Carlo, on se donne indépendamment du Brownien $(W_t)_{t\in[0,T]}$ et donc de $(Z_t)_{t\in[0,T]}$ une variable aléatoire entière N telle que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\mathbf{P}(N = n) = p(n) > 0$ ainsi qu'une suite $(\tau_i)_{i\geq 1}$ de variables aléatoires i.i.d. suivant une densité q strictement positive sur $[0,T]$ (et nulle en dehors) indépendante de N.

(a) Calculer $\mathbf{E}\left(\frac{1}{p(n)n!}\prod_{i=1}^{n}\frac{f(\tau_i, Z_{\tau_i})}{q(\tau_i)}\middle|(Z_t)_{t\leq T}\right)$ puis $\mathbf{E}\left(\frac{1}{p(N)N!}\prod_{i=1}^{N}\frac{f(\tau_i, Z_{\tau_i})}{q(\tau_i)}\middle|(Z_t)_{t\leq T}\right)$ où par convention le produit vaut 1 lorsque $N = 0$.

(b) Avec la question 3d, en déduire que $\mathcal{P} = \mathbf{E}\left(\psi(Z_T)\frac{1}{p(N)N!}\prod_{i=1}^{N}\frac{f(\tau_i, Z_{\tau_i})}{q(\tau_i)}\right)$.

C'est cette espérance que l'on approche par la méthode de Monte Carlo en remarquant que si φ a une expression analytique, alors il en va de même pour ψ et f et en utilisant la question 2b.

5. Pour avoir une intuition sur le choix de p et q, on va s'intéresser à la minimisation de la variance de $\xi_{p,q} = \frac{1}{p(N)N!}\prod_{i=1}^{N}\frac{g(\tau_i)}{q(\tau_i)}$ lorsque g est une fonction positive bornée sur $[0, T]$.

   (a) Vérifier que $\mathbf{E}(\xi_{p,q}^2) = \sum_{n\in\mathbf{N}}\frac{a_{q,n}^2}{p(n)}$ pour une suite $(a_{q,n})_{n\in\mathbf{N}}$ de nombres positifs ne dépendant pas de p à préciser.

   (b) Déduire de l'inégalité de Cauchy-Schwarz que $\mathbf{E}(\xi_{p,q}^2) \geq \left(\sum_{n\in\mathbf{N}} a_{q,n}\right)^2$ et vérifier que ce minorant est atteint en choisissant pour $(p(n))_{n\in\mathbf{N}}$ la suite $(a_{q,n})_{n\in\mathbf{N}}$ renormalisée.

   (c) Pour ce choix de p, comment faut-il ensuite choisir q pour minimiser la variance de $\xi_{p,q}$?

Méthodes de Monte-Carlo en finance

Examen du 2 mars 2006 8h30-11h30

Partie I : Calcul par une méthode de Monte-Carlo du prix d'un CDS

On considère une suite de temps déterministes $0 < T_1 < T_2 < \cdots < T_n$ et un taux d'intérêt $r \geq 0$. On note par τ un temps (de défaut) aléatoire et l'on cherche à évaluer par une méthode de Monte-Carlo le prix d'un CDS donné par :

$$P = \mathbf{E}\left(H(\tau)\right)$$

où :

$$H(\tau) = R\sum_{i=1}^{n-1} e^{-rT_i}\mathbf{1}_{\{\tau > T_i\}} - e^{-r\tau}\mathbf{1}_{\{\tau \leq T_n\}}$$

Intensité déterministe On suppose que $(\lambda_s, s \geq 0)$ est une fonction continue non aléatoire de s, telle que, pour tout $s \geq 0$, $\lambda_s > 0$. On suppose que τ suit la loi

$$\mathbf{1}_{\{t \geq 0\}} e^{-\int_0^t \lambda_s ds}\lambda_t dt.$$

1. Reconnaître la loi de τ lorsque λ_s ne dépend pas de s. Comment peut on, alors, simuler un variable aléatoire suivant la loi de τ ? Montrer que l'on peut calculer P à l'aide d'une formule simple.
2. Soit ξ une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre 1. On note Λ la fonction de $\mathbf{R}^+$ dans $\mathbf{R}^+$ définie par :
$$\Lambda(t) = \int_0^t \lambda_s ds,$$
et Λ^{-1} son inverse. Montrer que $\Lambda^{-1}(\xi)$ suit la même loi que τ et, en déduire une méthode de simulation selon la loi de τ.
3. En supposant Λ et Λ^{-1} calculable explicitement, proposer une méthode de Monte-Carlo permettant de calculer P. Expliquer comment l'on peut estimer, alors, l'erreur commise.
4. On suppose que $\Lambda(T_n) \leq K$. Montrer que :
$$P = \left(R\sum_{i=1}^{n-1} e^{-rT_i}\right)\mathbf{P}\left(\xi > K\right) + \mathbf{E}\left(H(\tau)|\xi \leq K\right)\mathbf{P}\left(\xi \leq K\right).$$
Expliquer comment simuler efficacement une variable aléatoire selon la loi de ξ conditionnellement à l'événement $\{\xi \leq K\}$.
En déduire une méthode de réduction de variance pour le calcul de P.

Intensité aléatoire On suppose dans ce paragraphe on suppose que λ_t est un processus aléatoire donné par $\lambda_t = \exp(X_t)$ où $(X_t, t \geq 0)$ est solution de :

$$dX_t = -c\left(X_t - \alpha\right)dt + \sigma dW_t, X_0 = x.$$

avec c, σ, α des réels donnés et $(W_t, t \geq 0)$ un mouvement brownien.

On pose $\tau = \Lambda^{-1}(\xi)$, ξ étant un variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre 1 indépendante de W.

1. Calculer $\mathbf{E}(\lambda_t)$. Proposer une variable de contrôle pour le calcul de P. Comment peut on vérifier numériquement que cette variable de contrôle réduit effectivement la variance ?
2. Calculer :
$$\mathbf{E}\left(R\sum_{i=1}^{n-1} e^{-rT_i}\mathbf{1}_{\{\tau > T_i\}} - e^{-r\tau}\mathbf{1}_{\{\tau < T_n\}}\Big|\lambda_t, t \geq 0\right).$$
En déduire un méthode de simulation évitant de simuler la variable aléatoire ξ dont on montrera qu'elle réduit la variance.

Une méthode de fonction d'importance

1. Soit $\beta > 0$, on pose $\xi_\beta = \xi/\beta$. Montrer que, pour toute fonction f mesurable positive et pour tout $\beta > 0$ on a :
$$\mathbf{E}\left(f(\xi)\right) = \mathbf{E}\left(f(\xi_\beta)g_\beta(\xi_\beta)\right).$$
g_β étant une fonction que l'on explicitera en fonction de β.
2. En déduire que pour tout $\beta > 0$:
$$P = \mathbf{E}\left(g_\beta(\xi/\beta)H(\Lambda^{-1}(\xi/\beta))\right)$$
avec $H(t) = R\sum_{i=1}^{n} e^{-rT_i}\mathbf{1}_{\{t > T_i\}} - e^{-rt}\mathbf{1}_{\{t < T_n\}}$.
3. On pose $X_\beta = g_\beta(\xi/\beta)H(\Lambda^{-1}(\xi/\beta))$, montrer que pour tout $\beta > 0$:
$$\text{Var}(X_\beta) = \mathbf{E}\left(g_\beta(\xi)H^2(\Lambda^{-1}(\xi))\right) - P^2.$$
4. Montrer que $\text{Var}(X_\beta) < +\infty$ si $\beta < 2$ et que :
$$\text{Var}(X_2) = \frac{1}{2}\mathbf{E}\left(\int_0^{+\infty} H^2(\Lambda^{-1}(t))dt\right) - P^2.$$
5. Montrer que $\beta \to \text{Var}(X_\beta)$ est une fonction strictement convexe sur l'intervalle $]0, 2[$ et que
$$\lim_{\beta\to 0+} \text{Var}(X_\beta) = +\infty.$$
En admettant que $\lim_{t\to+\infty} \Lambda^{-1}(t) = +\infty$ presque sûrement, montrer que $\lim_{\beta\to 2^-} \text{Var}(X_\beta) = +\infty$.
6. Quel β est il souhaitable de choisir dans une méthode de Monte-Carlo ? Proposer un méthode permettant d'approcher cette valeur.

Partie II : Simulation d'équations différentielles stochastiques

Dans cette partie, par fonction régulière, on entend une fonction dérivable autant de fois que nécessaire avec des dérivées bornées.

Soit $T > 0$, $y \in \mathbf{R}$, $b : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une fonction régulière et sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, $(W_t)_{t\in[0,T]}$ un mouvement brownien réel standard. On s'intéresse à l'Equation Différentielle Stochastique

$$\begin{cases} X_0 = y, \\ dX_t = dW_t + b(X_t)dt. \end{cases} \tag{27}$$

Pour $(t,z) \in \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}$, on introduit $x(t,z)$ la solution à l'instant t de l'Equation Différentielle Ordinaire issue de z à l'instant initial et obtenue en enlevant le terme brownien de l'EDS :

$$\begin{cases} x(0,z) = z, \\ \frac{d}{dt}x(t,z) = b(x(t,z)). \end{cases} \tag{28}$$

On se donne $N \in \mathbf{N}^*$ et pour $0 \leq k \leq N$, on pose $t_k = kT/N$. On s'intéresse à un schéma de discrétisation proposé récemment par Ninomiya et Victoir. Dans l'exemple simple qui nous intéresse, pour passer du temps t_k au temps t_{k+1}, ce schéma consiste à intégrer [10] l'EDO (28) sur l'intervalle $[t_k, \frac{(2k+1)T}{2N}]$ puis à ajouter l'accroissement brownien et enfin à intégrer l'EDO (28) sur l'intervalle de temps $[\frac{(2k+1)T}{2N}, t_{k+1}]$:

$$\begin{cases} \bar{X}_0 = y, \\ \forall k \in \{0,\dots,N-1\},\ \bar{X}_{t_{k+1}} = x(\frac{T}{2N}, Z_{k+\frac{1}{2}}) \text{ où } Z_{k+\frac{1}{2}} = x(\frac{T}{2N}, \bar{X}_{t_k}) + W_{t_{k+1}} - W_{t_k}. \end{cases} \tag{29}$$

L'objectif de ce sujet est de vérifier que l'ordre faible de ce schéma est en $\frac{1}{N^2}$. Pour cela, on s'intéressera au cas d'un coefficient de dérive linéaire avant de traiter le cas général.

Les 2 questions peuvent être traitées de façon indépendante.

1. **Cas d'un coefficient de dérive linéaire :** $\forall y \in \mathbf{R}$, $b(y) = cy$ où $c \in \mathbf{R}^*$.
   (a) Quelle est la solution $x(t,z)$ de l'EDO (28) ? Préciser le schéma (29) dans ce cas particulier. Vérifier que

   $$\forall k \in \{0,\dots,N\},\ \bar{X}_{t_k} = ye^{ct_k} + e^{\frac{cT}{2N}} \sum_{l=1}^{k} e^{c(t_k - t_l)}(W_{t_l} - W_{t_{l-1}}).$$

   En déduire que $\text{Var}(\bar{X}_T) = \frac{e^{2cT}-1}{2c} \times \frac{\frac{cT}{N}}{\sinh(\frac{cT}{N})}$.

   (b) Quelle est la loi de X_T ? En déduire que X_T a même loi que $\bar{X}_T + \sqrt{\gamma_N}\, G$ où G est une gaussienne centrée réduite indépendante de $(W_t)_{t\in[0,T]}$ et γ_N une constante que l'on précisera.

   (c) En remarquant que si $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ est une fonction C^2, alors

   $$\forall x,z \in \mathbf{R},\ f(x+z) = f(x) + zf'(x) + z^2 \int_0^1 (1-\alpha)f''(x+\alpha z)d\alpha,$$

   en déduire que si f est bornée ainsi que ses dérivées,

   $$\left|\mathbf{E}(f(X_T)) - \mathbf{E}(f(\bar{X}_T))\right| \leq \frac{\sup_{z\in\mathbf{R}} |f''(z)|}{2}\gamma_N.$$

   Conclure que l'ordre faible du schéma est en $1/N^2$.

   (d) On note $\hat{X}_{t_k}$ la valeur obtenue en t_k par le schéma d'Euler avec pas de temps $\frac{T}{N}$. Calculer $\mathbf{E}(\hat{X}_T)$ et $\text{Var}(\hat{X}_T)$.

   (e) On suppose $c > 0$. Vérifier que X_T a même loi que $\hat{X}_T + \hat{\eta}_N + \sqrt{\hat{\gamma}_N}\, G$ pour des constantes $\hat{\eta}_N$ et $\hat{\gamma}_N$ à préciser. Retrouver que l'ordre faible du schéma d'Euler est en $1/N$. Comment peut-on améliorer la convergence de ce schéma ?

10. Si la solution de l'EDO (28) n'a pas d'expression analytique, on peut recourir à un schéma de discrétisation pour cette étape. Il faut choisir ce schéma avec soin pour préserver l'ordre faible du schéma qui en découle pour l'EDS (27).

2. **Cas général :** Pour $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une fonction régulière, on introduit la solution u, supposée régulière, de l'Equation aux Dérivées Partielles

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(t,x) + Lu(t,x) = 0, \ (t,x) \in [0,T] \times \mathbf{R} \\ u(T,x) = f(x), \ x \in \mathbf{R} \end{cases}, \tag{30}$$

où L est le générateur infinitésimal de l'EDS (27) : $Lg(x) = \frac{1}{2}g''(x) + b(x)g'(x)$.

(a) Vérifier que

$$\mathbf{E}(f(\bar{X}_T)) - \mathbf{E}(f(X_T)) = \sum_{k=0}^{N-1} \mathcal{E}_k \ \text{ où } \ \mathcal{E}_k = \mathbf{E}\left(u(t_{k+1}, \bar{X}_{t_{k+1}}) - u(t_k, \bar{X}_{t_k})\right).$$

(b) Vérifier que $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t,x) = L(Lu)(t,x)$. En admettant provisoirement que

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(u(t_{k+1}, \bar{X}_{t_{k+1}})|\bar{X}_{t_k})) =& u(t_{k+1}, \bar{X}_{t_k}) + Lu(t_{k+1}, \bar{X}_{t_k})\frac{T}{N} \\ &+ \frac{1}{2}L(Lu)(t_{k+1}, \bar{X}_{t_k})\frac{T^2}{N^2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{N^3}\right), \end{aligned} \tag{31}$$

en déduire que $\mathcal{E}_k = \mathcal{O}\left(\frac{1}{N^3}\right)$ et conclure que l'ordre faible du schéma est $1/N^2$.

(c) L'objectif de cette question est de vérifier que pour $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ régulière

$$\mathbf{E}(g(\bar{X}_{t_1})) = g(y) + Lg(y)t_1 + L(Lg)(y)\frac{t_1^2}{2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{N^3}\right), \tag{32}$$

propriété qui se généralise facilement en (31).

i. Vérifier que

$$g(x(t,z)) = g(z) + (bg')(z)t + \int_0^t \int_0^s b(bg')'(x(r,z))drds$$

et en déduire que pour t au voisinage de 0,

$$g(x(t,z)) = g(z) + (bg')(z)t + b(bg')'(z)\frac{t^2}{2} + \mathcal{O}\left(t^3\right)$$
$$\text{et } x(t,z) = z + b(z)t + bb'(z)\frac{t^2}{2} + \mathcal{O}\left(t^3\right).$$

ii. En déduire que

$$\begin{aligned} g(\bar{X}_{t_1}) =& g\left(y + b(y)\frac{t_1}{2} + bb'(y)\frac{t_1^2}{8} + W_{t_1} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{N^3}\right)\right) \\ &+ (bg')\left(y + b(y)\frac{t_1}{2} + bb'(y)\frac{t_1^2}{8} + W_{t_1} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{N^3}\right)\right)\frac{t_1}{2} \\ &+ b(bg')'\left(y + b(y)\frac{t_1}{2} + bb'(y)\frac{t_1^2}{8} + W_{t_1} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{N^3}\right)\right)\frac{t_1^2}{8} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{N^3}\right). \end{aligned}$$

iii. Vérifier que $\mathbf{E}\left((bg')\left(y + b(y)\frac{t_1}{2} + bb'(y)\frac{t_1^2}{8} + W_{t_1} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{N^3}\right)\right)\right)$ est égal à

$$bg'(y) + (bg')'(y)b(y)\frac{t_1}{2} + \frac{1}{2}(bg')''(y)t_1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{N^2}\right).$$

iv. Vérifier que $\mathbf{E}\left(g\left(y+b(y)\frac{t_1}{2}+bb'(y)\frac{t_1^2}{8}+W_{t_1}+\mathcal{O}\left(\frac{1}{N^3}\right)\right)\right)$ est égal à un terme en $\mathcal{O}\left(\frac{1}{N^3}\right)$ près à la fonction

$$g+g'\times\left(b\frac{t_1}{2}+bb'\frac{t_1^2}{8}\right)+\frac{1}{2}g''\times\left(b^2\frac{t_1^2}{4}+t_1\right)+\frac{1}{6}g^{(3)}\times\left(3b\frac{t_1^2}{2}\right)+\frac{3t_1^2}{24}g^{(4)}$$

prise au point y ($g^{(k)}$ désigne la dérivée d'ordre k de la fonction g).

v. En remarquant que

$$L(Lg)=\frac{1}{4}b(b'g'+bg'')+\frac{1}{2}b(bg')'+\frac{1}{4}b(bg')'+\frac{1}{2}(bg')''+\frac{1}{2}bg^{(3)}+\frac{1}{4}g^{(4)},$$

conclure que (32) est vérifiée.

Dans le cas de l'EDS générale posée en dimension n avec $(W^1,\dots,W^d)$ un mouvement brownien standard de dimension d :

$$dX_t=\sum_{j=1}^{d}\sigma_j(X_t)dW_t^j+b(X_t)dt$$

où b et les $\sigma_j=(\sigma_{1j},\dots,\sigma_{nj})^*$, $1\leq j\leq d$ sont des fonctions régulières de $\mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{R}^n$, le schéma de Ninomiya et Victoir nécessite de générer une suite $(U_k)_{1\leq k\leq N}$ de variables uniformes sur $[0,1]$ indépendantes et indépendantes de $(W^1,\dots,W^d)$. Pour passer de l'instant t_k à l'instant t_{k+1}, il consiste à

1. intégrer sur la durée $\frac{T}{2N}$ l'EDO $\frac{d}{dt}x(t)=\left[b-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{d}\partial\sigma_j\sigma_j\right](x(t))$ où $\partial\sigma_j=\left(\frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial\sigma_{x_l}}\right)_{1\leq i,l\leq n}$.
2. Si $U_{k+1}\leq\frac{1}{2}$, intégrer successivement pour j croissant de 1 à d l'EDO $\frac{d}{dt}x(t)=\sigma_j(x(t))$ sur la durée aléatoire $W_{t_{k+1}}^j-W_{t_k}^j$. Si $U_{k+1}>\frac{1}{2}$, effectuer la même opération mais pour j décroissant de d à 1.
3. Reprendre la première étape.