Cours de Méthodes de Monte-Carlo
Exercices : 22 septembre 2020.

Exercice 1 Soit $(X_n, n \geq 1)$ une suite de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{R}$ indépendantes suivant toutes la même loi, telle que $\mathbb{E}(X_1^2) < +\infty$. On pose $S_n = X_1 + \cdots + X_n$. On cherche à démontrer la loi forte des grands nombres :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{S_n}{n} = \mathbb{E}(X_1).$$

1. Montrer que si $(Z_n, n \geq 1)$ est une suite de variables aléatoires à valeurs réelles telles que $\sum_{n\geq 1} \mathbb{E}(|Z_n|) < +\infty$, alors Z_n converge vers 0 presque sûrement (on peut déduire simplement de ce résultat le lemme de Borel-Cantelli).

2. En déduire que si $\sum_{n\geq 1} \mathbb{E}(|Z_n|^2) < +\infty$, Z_n converge vers 0 presque sûrement.

3. Calculer $\mathrm{Var}\,(S_{n^2})$ et montrer que S_{n^2}/n^2 tend presque sûrement vers $\mathbb{E}(X_1)$.

4. On pose $p_n = [\sqrt{n}]$. Montrer que $\dfrac{S_n}{n} - \dfrac{S_{p_n^2}}{n}$ tend vers 0 presque sûrement lorsque n tend vers $+\infty$. En déduire le résultat annoncé.

Exercice 2 En utilisant `Python` (pour installer `Python` sur votre machine voir ici.), calculer par simulation $\mathbb{E}\left(e^{\beta G}\right)$ où G est une gaussienne centrée réduite et $\beta = 1, 2, \ldots, 10$.

Donner un intervalle de confiance pour les résultats. Que constatez vous ?

Exercice 3

1. Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Cauchy réduite, c'est à dire suivant la loi
$$\frac{dx}{\pi\,(1+x^2)}.$$
Calculer la fonction de répartition de X, notée F.

2. Vérifier que F est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $]0,1[$. On note F^{-1} son inverse et l'on considère une variable aléatoire U de loi uniforme sur $[0,1]$. Quelle est la probabilité que U vaille 0 ou 1 ? Montrer que $F^{-1}(U)$ suit la même loi que X. En déduire une méthode de simulation selon la loi de Cauchy.

3. Soit V une variable aléatoire qui vaut 1 ou -1 avec probabilité $1/2$ et Z une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle de paramètre 1. Quelle est la loi de VZ ? Calculer sa fonction caractéristique. En déduire, en utilisant la formule d'inversion de la transformation de Fourrier, que :
$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{iux} \frac{dx}{\pi\,(1+x^2)} = e^{-|u|}.$$

4. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant des lois de Cauchy de paramètres respectifs a et b. Calculer la loi de $X+Y$.

5. Soit $(Y_n, n \geq 1)$, une suite de variables aléatoires réelles convergeant presque sûrement vers une variable aléatoire Z. Montrer, en utilisant le théorème de Lebesgue, que l'on a, pour tout $\epsilon > 0$
$$\lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}\left(|Y_{2n} - Y_n| \geq \epsilon\right) = 0.$$

6. Soit $(X_n, n \geq 1)$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant une loi de Cauchy de paramètre 1. On considère la suite
$$Y_n = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}.$$
Calculer la loi de $Y_{2n} - Y_n$. La suite des Y_n converge t'elle en loi ? presque sûrement ?

7. Montrer que la suite $(Z_n, n \geq 1)$ définie par
$$Z_n = \left(\sqrt{|X_1|} + \sqrt{|X_2|} + \cdots + \sqrt{|X_n|}\right) / n$$
converge presque sûrement et écrire sa limite sous forme d'une intégrale.

8. Vérifier par simulation que Y_n diverge (p.s.) et que Z_n converge (p.s.).

Exercice 4 Soient f et g deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^+$ telles que $f(x)$ et $g(x)$ soient les densités de lois de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{R}$. On suppose de plus que, pour tout $x \in \mathbb{R}$
$$f(x) \leq kg(x).$$

Soient $(Y_1, Y_2, \cdots, Y_n, \cdots)$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant la loi de densité $g(x)$ et $(U_1, U_2, \cdots, U_n, \cdots)$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant une loi uniforme sur $[0, 1]$ indépendante de la suite des Y_i. On pose $N = \inf\{n \geq 1,\ kU_n g(Y_n) < f(Y_n)\}$.

1. Démontrer que N est fini presque sûrement et suit une loi géométrique dont on calculera la moyenne.

2. On définit alors la variable aléatoire X en posant :
$$X = Y_N = \sum_{i \geq 1} Y_i \mathbf{1}_{\{N=i\}}.$$
Calculer pour n fixé et f bornée
$$\mathbb{E}\left(\mathbf{1}_{\{N=n\}} f(X)\right).$$
En déduire la loi de X. Quelle est la loi du couple (N, X) ?

3. En déduire comment on peut simuler une variable aléatoire de loi $f(x)dx$ si on sait simuler une variable aléatoire de loi $g(x)dx$.

Monte-Carlo methods
Exercises : 29 September 2020.

Exercice 1 Let X be a real random variable and denote by F its distribution function. We assume that F is invertible and denote by F^{-1} its inverse.

1. How can you sample the law of X conditionally to the event $\{X > m\}$ using rejection method ? What happen to this algorithm when m becomes large ?
2. Let U be random variable following a uniform distribution on $[0, 1]$, let :
$$Z = F^{-1}\left(F(m) + (1 - F(m))U\right).$$
Compute the distribution function of Z and deduce an efficient way to sample X conditionally to the event $\{X > m\}$. Compare the efficiency of this method to the rejection method when m is large.
3. Generalize the previous method to the sampling of X conditionally to the event $\{a < X < b\}$.
4. `Python` : write the rejection algorithm of question 1 and test its efficiency when $m = 2, 3, 4, 5$.
5. We denote by N the distribution function of a standard Gaussian random variable
$$N(d) = \int_{-\infty}^{d} e^{-\frac{x^2}{2}} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}}.$$
`Python` : using N and N^{-1} write the simulation algorithm suggested at question 2 and test it when $m = 2$ and 5. With `Python` N can be obtained by `norm.cdf` and N^{-1} by `norm.ppf` :
```
from scipy.stats import norm
norm.cdf(-1.96)    # = 0.025
norm.ppf(0.025)    # = -1.96
```

Exercice 2 We assume that X and Y are real independent random variables. We denote by F and G their (respective) distribution functions. We want to compute using a Monte-Carlo method :
$$\theta = \mathbb{P}(X + Y \leq t).$$

1. Describe the classical Monte-Carlo method for this problem. Explain how you can estimate the error of the method.
2. Assuming that F and G are numerically easily invertible, explain how to implement an antithetic variance reduction method. Why does this method always decrease variance ?
3. By conditioning with respect to X propose a variance reduction method.

Exercice 3 We assume that h is a function such that $\int_0^1 |h(s)|^2 ds < +\infty$.

1. Let $(U_i, i \geq 1)$ be a sequence of independent random variables uniformly distributed on $[0, 1]$. Show that the estimator $\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} h\left((i - 1 + U_i)/n\right)$ has a better variance than $\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} h(U_i)$.
2. Give an interpretation of this result in term of a stratification method.

Exercice 4 Let $(W_t, t \geq 0)$ be a Brownian motion and $\rho(t)$ be a continuous function from $\mathbb{R}$ to $\mathbb{R}$. Identify the law of the couple $(\int_0^T \rho(s)dW_s, W_T)$ and deduce an efficient simulation method of this couple.

What happen when $\rho(t)$ does not depend on t ?

Exercice 5 Prove that, if G is a standard gaussian random variable (mean 0 and variance 1) and f is a bounded measurable function, we have, for a $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\mathbb{E}\left(f(G)\right) = \mathbb{E}\left(e^{-\lambda G - \frac{\lambda^2}{2}} f(G+\lambda)\right)$$

Let Z be a Gaussian random variable and K a positive real number.

1. Let $d = \frac{\mathbb{E}(Z) - \log(K)}{\sqrt{\mathrm{Var}\,(Z)}}$, prove that

$$\mathbb{E}\left(\mathbf{1}_{\{Z \geq \log(K)\}} e^Z\right) = e^{\mathbb{E}(Z) + \frac{1}{2}\mathrm{Var}\,(Z)} N\left(d + \sqrt{\mathrm{Var}\,(Z)}\right).$$

2. Prove the formulas (“Black and Scholes formulas”)

$$\mathbb{E}\left(\left(e^Z - K\right)_+\right) = e^{\mathbb{E}(Z) + \frac{1}{2}\mathrm{Var}\,(Z)} N\left(d + \sqrt{\mathrm{Var}\,(Z)}\right) - KN(d),$$

$$\mathbb{E}\left(\left(K - e^Z\right)_+\right) = KN(-d) - e^{\mathbb{E}(Z) + \frac{1}{2}\mathrm{Var}\,(Z)} N\left(-d - \sqrt{\mathrm{Var}\,(Z)}\right)$$

Exercice 6 Let $(\xi_1, \ldots, \xi_d)$ be a vector of independant standard gaussian random variables and u be a vector of R^d, such that $|u| = \sqrt{u_1^2 + \cdots + u_d^2} = 1$. We want to use a stratification method using the randon variable $u.\xi = \sum_{i=1}^d u_i \xi_i$.

1. What is the law of the random variable $u.\xi$? For which a value of v, a $\mathbb{R}^d$ vector, the random vector $\xi - (u.\xi)v$ and the random variable $(u.\xi)$ are independant ?
2. Deduce a sampling method for the couple $(\xi - (u.\xi)u, u.\xi)$ which does not use the variance-covariance matrix of the vector $\xi - (u.\xi)u$.
3. Let a and b be two real numbers such that $a < b$. Prpose a sampling method (which is not a rejection method) allowing to sample the random vector ξ conditionally to the event $\{a \leq u.\xi < b\}$.

Monte-Carlo methods and Stochastic Algorithms
Exercises : 6 October 2020.

Exercice 1 Let X be a standard Gaussian random variable (mean 0 and variance 1).

1. Let f be a bounded function , we denote $I = \mathbb{E}(f(X))$ and I_n^1, I_n^2 the estimators :
$$I_n^1 = \frac{1}{2n}\left(f(X_1) + f(X_2) + \ldots + f(X_{2n-1}) + f(X_{2n})\right).$$
$$I_n^2 = \frac{1}{2n}\left(f(X_1) + f(-X_1) + \ldots + f(X_n) + f(-X_n)\right).$$
where $(X_n, n \geq 1)$ is a sequence of independent random variables following the distribution of X.
What is the limit in distribution of the sequence of random variables $\sqrt{n}(I_n^1 - I)$, and of the sequence of random variables $\sqrt{n}(I_n^2 - I)$. For each cases, compute the variance of the limit distribution.
2. How can you estimate the variances of the previous limit distribution using the sample $(X_n, 1 \leq i \leq 2n)$ pour I_n^1 and $(X_n, 1 \leq i \leq n)$ pour I_n^2 ?
How can you estimate the Monte-Carlo error when using I_n^1, then I_n^2 ?
3. Show that if f is an increasing function $\mathrm{Cov}\left(f(X), f(-X)\right) \leq 0$. What is, under this hypothesis, the best estimator of I, I_n^1 or I_n^2 ? Same question when f is decreasing.

Exercice 2 Let X and Y be 2 real random variable and Y. Y will be a control variate in the sequel. We assume that $\mathbb{E}(X^2) < +\infty$ and that $\mathbb{E}(Y) = 0, 0 < \mathbb{E}(Y^2) < +\infty$.

1. Let λ be a real number, compute Var $(X - \lambda Y)$ and the value λ^* which minimize this variance.
In order to use Y as a control variate, is it useful to assume that X and Y are independent ?
2. We assume that $((X_n, Y_n), n \geq 0)$ is a sequence of independant random variables draw along the law of a couple (X, Y) (X and Y are not necessarily independent). We define λ_n^* by
$$\lambda_n^* = \frac{\sum_{i=1}^n X_i Y_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i \sum_{i=1}^n Y_i}{\sum_{i=1}^n Y_i^2 - \frac{1}{n}(\sum_{i=1}^n Y_i)^2}.$$
Show that λ_n^* converge almost surely to λ^* when n goes to $+\infty$.
3. We denote $\bar{Y}_n = (Y_1 + \cdots + Y_n)/n$. Show using the Slutzky lemma (see the last question of this exercise) that $\left\{\sqrt{n}\,(\lambda_n^* - \lambda^*)\,\bar{Y}_n\right\}$ converge to 0.
4. Still using Slutsky lemma, show that :
$$\sqrt{n}\left(\frac{1}{n}(X_1 - \lambda_n^* Y_1 + \cdots + X_n - \lambda_n^* Y_n) - \mathbb{E}(X)\right)$$
converge in distribution to a Gaussian random variable with variance Var $(X - \lambda^* Y)$.
How can you interpret this result when using λY as a control variate ?

Exercice 3 Méthode de biaisage d'un tirage uniforme par une loi β

On note U une variable aléatoire de loi uniforme sur l'intervalle $[0,1]$. On considère la famille de loi $\beta(a,1)$ dont la densité est donnée, pour $a>0$, par :

$$a u^{a-1} \mathbf{1}_{\{u \in [0,1]\}}.$$

On note V_a une variable aléatoire de de loi $\beta(a,1)$.

1. Proposer une méthode de simulation selon la loi $\beta(a,1)$. Pour g une fonction bornée, comment peut-on estimer $\mathbb{E}\left(g(V_a)\right)$ à l'aide d'une méthode de Monte-Carlo ? Comment obtenir un ordre de grandeur de l'erreur dans cette méthode ?
2. Vérifier que, si f est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que $\mathbb{E}(|f(U)|) < +\infty$, pour tout $a > 0$:
$$\mathbb{E}\left(f(U)\right) = \mathbb{E}\left(\frac{f(V_a)}{a V_a^{a-1}}\right).$$
Comment utiliser cette relation pour calculer $\mathbb{E}\left(f(U)\right)$ à l'aide d'une méthode de Monte-Carlo ? Quelle fonction de a doit on alors minimiser pour obtenir une méthode optimale ?
3. On suppose que f est bornée. Montrer que, pour tout $0 < a < 2$:
$$\sigma_a^2 = \text{Var}\left(\frac{f(V_a)}{a V_a^{a-1}}\right) = \mathbb{E}\left(\frac{f^2(U)}{a U^{a-1}}\right) - \mathbb{E}\left(f(U)\right)^2.$$
4. En utilisant le lemme de Fatou, montrer que, si $\mathbb{P}(f(U) \neq 0) > 0$, $\lim_{a \to 0^+} \sigma_a^2 = +\infty$. Puis que, si f est continue en 0 avec $f(0) \neq 0$, $\lim_{a \to 2^-} \sigma_a^2 = +\infty$.
On supposera, dans la suite, que f est bornée, continue en 0 avec $f(0) \neq 0$ (ce qui implique que $\mathbb{P}(f(U) \neq 0) > 0$).
5. Montrez que, pour $0 < a < 2$, σ_a^2 admet des dérivées d'ordre 1 et 2 par rapport à a qui s'écrivent sous la forme :
$$\frac{d\sigma_a^2}{da} = \mathbb{E}\left(f^2(U) g_1(a,U)\right) \text{ et } \frac{d^2\sigma_a^2}{da^2} = \mathbb{E}\left(f^2(U) g_2(a,U)\right),$$
g_1 et g_2 étant des fonctions de $\mathbb{R}^{+*} \times [0,1]$ dans $\mathbb{R}$ que l'on calculera.
6. En déduire que σ_a^2 est une fonction convexe sur l'intervalle $]0,2[$ qui atteint son minimum au point $\hat{a}$ solution unique de l'équation $\psi(a) = 0$ où
$$\psi(a) = \mathbb{E}\left(\frac{f^2(U)}{a^2 U^{a-1}} \left(1 - a|\ln(U)|\right)\right).$$

Monte-Carlo methods and Stochastic Algorithms
Exercises : 13 octobre 2020.

Exercice 1 Prove that, if $(M_n, n \geq 0)$ is a martingale with respect to $(\mathcal{F}_n, n \geq 0)$ and τ an $\mathcal{F}$-stopping time, the process

$$N_n = M_{n\wedge\tau}$$

is also an $\mathcal{F}$-martingale (hint : check that $N_{n+1} - N_n = \mathbf{1}_{\{\tau>n\}}(M_{n+1} - M_n)$).

Exercice 2 A martingale proof of the strong law of large number. Suppose that $(X_n, n \geq 1)$ are independent real random variables following the law of X, with $\mathbb{E}(|X|) < +\infty$. Define Y_n by :

$$Y_n = X_n \mathbf{1}_{\{|X_n|\leq n\}}.$$

1. Prove that $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}(Y_n) = E(X)$.
2. Prove that $\sum_{n\geq 1} \mathbb{P}(|X_n| > n) = \sum_{n\geq 1} \mathbb{P}(|X| > n) \leq \mathbb{E}(|X|)$, and deduce that

$$\mathbb{P}(\text{Exists } n_0(\omega), \text{ for all } n \geq n_0, X_n = Y_n) = 1.$$

3. Check that Var $(Y_n) \leq \mathbb{E}\left(|X|^2 \mathbf{1}_{\{|X|\leq n\}}\right)$ and prove that :

$$\sum_{n\geq 1} \frac{\text{Var } (Y_n)}{n^2} \leq \mathbb{E}\left(|X|^2 f(|X|)\right),$$

where $f(z) = \sum_{n\geq \max(1,z)} \frac{1}{n^2} \leq \frac{2}{\max(1,z)}$.
Deduce that $\sum_{n\geq 1}$ Var $(Y_n)/n^2 \leq 2\mathbb{E}(|X|) < +\infty$.

4. Let $W_n = Y_n - \mathbb{E}(Y_n)$, prove, using the L^2 martingale convergence theorem, that $\sum_{k\leq n} \frac{W_k}{k}$ converge when n goes to $+\infty$, and deduce, using Kronecker lemma, that

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{k\leq n} W_k = 0,$$

then deduce $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{k\leq n} Y_n = \mathbb{E}(X)$.

5. Using the result of question 2, prove that $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{k\leq n} X_n = \mathbb{E}(X)$

Exercice 3 Let ϕ be a function from $\mathbb{R}$ to $\mathbb{R}$, such that $\phi(x) = \mathbb{E}(F(x, U))$, where U is a random variable taking its values in $\mathbb{R}^p$ and F is a function from $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^p$ to $\mathbb{R}$. We assume that

- ϕ is a C^2 strictly convex function such that $|\phi''(x)| \leq K(1 + |x|)$ and there exist x^* which minimize ϕ on $\mathbb{R}$.
- $(\gamma_n, n \geq 1)$ and $(c_n, n \geq 1)$ are decreasing sequence of real numbers such that

$$\sum_{n\geq 1} \gamma_n = +\infty, \sum_{n\geq 1} \gamma_n c_n < +\infty, \sum_{n\geq 1} \frac{\gamma_n^2}{c_n^2} < +\infty,$$

— $s^2(x) = \mathbb{E}\left(F^2(x, U)\right) \leq K(1 + |x|)$.
— $(U^1_n, n \geq 1)$ and $(U^2_n, n \geq 1)$ are 2 independent sequences of independent random variables following the law of U.

We define $(X_n, n \geq 0)$ by $X_0 = x_0 \in \mathbb{R}$ and, inductively

$$X_{n+1} = X_n - \gamma_n \frac{F(X_n + c_n, U^1_{n+1}) - F(X_n - c_n, U^2_{n+1})}{2c_n}.$$

1. Prove that, for $|c| \leq 1$
$$|\phi(x + c) - \phi(x - c) - 2c\phi'(x + c)| \leq c^2 K\left(1 + |x - x^*|\right). \tag{1}$$
2. Let $V_n = |X_n - x^*|^2$, prove that
$$\begin{aligned} &\mathbb{E}(V_{n+1}|\mathcal{F}_n) \leq V_n \\ &\textbf{(A1 :=)} \quad + \frac{\gamma_n^2}{2c_n^2}\left(s^2(X_n + c_n) + s^2(X_n - c_n)\right) \\ &\textbf{(A2 :=)} \quad - \frac{\gamma_n}{c_n}(X_n - x^*)\left[\phi(X_n + c_n) - \phi(X_n - c_n) - 2c_n\phi'(X_n)\right] \\ &\textbf{(A3 :=)} \quad - \gamma_n(X_n - x^*)\phi'(X_n). \end{aligned}$$
3. Assuming that n is large enough to have $c_n \leq 1$, prove that
$$\mathbf{A1} \leq \frac{\gamma_n^2}{c_n^2}K(1 + V_n) \text{ and } \mathbf{A2} \leq K\gamma_n c_n(1 + V_n),$$
then deduce that
$$\mathbb{E}(V_{n+1}|\mathcal{F}_n) \leq V_n\left(1 + K\frac{\gamma_n^2}{c_n^2} + K\gamma_n c_n\right) + K\frac{\gamma_n^2}{c_n^2} + K\gamma_n c_n - \gamma_n(X_n - x^*)\phi'(X_n).$$
4. Using Robbins-Siegmund lemma, prove that V_n converge to a positive random variable V_∞.
5. Prove that $\mathbb{P}(V_\infty = 0) = 1$, then conclude that X_n converge almost surely to x^*.

Cours de Méthodes de Monte-Carlo
Exercices : 10 novembre 2020.

Exercice 1 In this exercise, we prove the central limit theorem for martingale in a simple case.

Let $(M_n, n \geq 0)$ be a martingale such that $\sup_{n\geq 0} |\Delta M_n| \leq K < +\infty$, where $\Delta M_n = M_n - M_{n-1}$ and K is a constant. M is a square integrable martingale (why ?) and, so, we can denote by $\langle M \rangle$ its bracket. Assume moreover that

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\langle M\rangle_n}{n} = \sigma^2, \text{a.s.} \tag{1}$$

where σ is a positive real number.

1. For λ real, let $\phi_j(\lambda) = \log \mathbb{E}\left(e^{\lambda \Delta M_j} \middle| \mathcal{F}_{j-1}\right)$, prove that
$$X_n = \exp\left(\lambda M_n - \sum_{j=1}^n \phi_j(\lambda)\right),$$
is a martingale.
2. We want to extend $\phi_j(z)$ to z a complex numbers. For this, we define the complex logarithm around 1 as, for $|z| \leq 1/2$
$$\log(1+z) = \sum_{k\geq 1} (-1)^{k+1} \frac{z^k}{k}. \tag{2}$$
We this definition, one can prove that $e^{\log(1+z)} = 1+z$ for $|z| \leq 1/2$, e denoting the complex exponential defined by $e^z = \sum_{k\geq 0} \frac{z^k}{k!}$.
Prove, for u real, $\left|e^{iu\Delta M_j} - 1\right| \leq e^{|u|K} - 1$, that
$$\left|\mathbb{E}\left(e^{iu\Delta M_j} \middle| \mathcal{F}_{j-1}\right) - 1\right| \leq e^{|u|K} - 1,$$
For $|u| \leq C_K = \frac{1}{K}\log(3/2)$, prove that we can define, using the definition (2)
$$\phi_j(iu) = \log \mathbb{E}\left(e^{iu\Delta M_j} \middle| \mathcal{F}_{j-1}\right),$$
and that we have $e^{\phi_j(iu)} = \mathbb{E}\left(e^{iu\Delta M_j} \middle| \mathcal{F}_{j-1}\right)$.
3. Prove that, for $|u| \leq C_K$,
$$\left(\exp\left\{iuM_n - \sum_{j=1}^n \phi_j(iu)\right\}, n \geq 0\right)$$
is a (complex) martingale.
4. Le u be a given real number, show that for a n large enough
$$\mathbb{E}\left[\exp\left(iu\frac{M_n}{\sqrt{n}} - \sum_{j=1}^n \phi_j(iu/\sqrt{n})\right)\right] = 1.$$

5. Prove that, for x a complex number such that $|x| \leq 1/2$
$$|e^x - 1 - x - x^2/2| \leq |x|^3 \text{ and } |\log(1+x) - x| \leq |x|^2.$$
6. Show that, for n large enough
$$\left| \mathbb{E}\left(e^{i\frac{u}{\sqrt{n}}\Delta M_j} \middle| \mathcal{F}_{j-1} \right) - 1 + \frac{u^2}{2n}\mathbb{E}\left((\Delta M_j)^2 \middle| \mathcal{F}_{j-1} \right) \right| \leq \frac{u^3}{n^{3/2}} K^3,$$
and that, for a $c > 0$ (depending on u), for n large enough, for all $j \leq n$
$$\left| \phi_j\left(\frac{iu}{\sqrt{n}} \right) + \frac{u^2}{2n}\mathbb{E}\left((\Delta M_j)^2 \middle| \mathcal{F}_{j-1} \right) \right| \leq \frac{c}{n^{3/2}},$$
and deduce, using (1), that, for a given u
$$\lim_{n \to +\infty} \sum_{j=1}^{n} \phi_j\left(\frac{iu}{\sqrt{n}} \right) = -\frac{\sigma^2 u^2}{2}, \text{ a.s.}$$
7. Proves that
$$\lim_{n \to +\infty} \mathbb{E}\left[\exp\left(iu\frac{M_n}{\sqrt{n}} - \sum_{j=1}^{n} \phi_j(iu/\sqrt{n}) \right) \right] - \mathbb{E}\left[\exp\left(iu\frac{M_n}{\sqrt{n}} + \frac{\sigma^2 u^2}{2} \right) \right] = 0,$$
and deduce that $\lim_{n \to +\infty} \mathbb{E}\left[\exp\left(iu\frac{M_n}{\sqrt{n}} \right) \right] = \exp\left(\frac{\sigma^2 u^2}{2} \right)$. Conclude that $\frac{M_n}{\sqrt{n}}$ converge in distribution to a gaussian random variable.
8. Generalize the result when
$$\lim_{n \to +\infty} \frac{\langle M \rangle_n}{a(n)} = \sigma^2, \text{ a.s.}$$
where $a(n)$ is a sequence of positive real numbers increasing to $+\infty$ with n.

Exercice 2 We assume that X_n converge in probability to X and that $|X_n| \leq \hat{X}$ with $\mathbb{E}\left(\hat{X} \right) < +\infty$. We want to prove that $\lim_{n \to +\infty} \mathbb{E}(X_n) = \mathbb{E}(X)$.

1. Let K be a positive real number and define $\phi_K(x)$ by $\phi_K(x) = (-K)\mathbf{1}_{\{x<-K\}} + x\mathbf{1}_{\{|x|\leq K\}} + K\mathbf{1}_{\{K<x\}}$. Prove that $|\phi_K(x) - \phi_K(y)| \leq |x - y|$.
2. Prove that
$$\mathbb{E}\left(|X_n - X| \right) \leq \mathbb{E}\left(|\phi_K(X_n) - \phi_K(X)| \right) + 2\mathbb{E}(\hat{X}\mathbf{1}_{\left\{\hat{X} \geq K\right\}}).$$
3. Prove that $\lim_{K \to \infty} \mathbb{E}(\hat{X}\mathbf{1}_{\left\{\hat{X} \geq K\right\}}) = 0$.
4. Prove, for a given K, that, for each $\epsilon > 0$
$$\mathbb{E}\left(|\phi_K(X_n) - \phi_K(X)| \right) \leq 2K\mathbb{P}\left(|X_n - X| \geq \epsilon \right) + \epsilon,$$
and deduce the extended Lebesgue theorem.