Le modèle de Black et Scholes

Bernard LAPEYRE

28 mars 2018

Préliminaires

1. Ecrire une fonction `Scilab` qui calcule la moyenne empirique `Moyenne`, la variance empirique `Variance` empirique d'un tableau de nombre.
   Vérifiez qu'elles coïncident avec les fonctions prédéfinies de `Scilab` : `mean`, `variance`.

   Correction

2. Ecrire une fonction permettant de simuler un vecteur consitué de variables aléatoires gaussiennes centrées réduites indépendantes.
   Tracer l'histogramme du vecteur obtenu et verifier qu'il correspond bien à la loi gaussienne centrée réduite.
   Cette fonction existe dans `Scilab` (`x=rand(1,n,"gauss")`).

   Correction

3. On cherche à calculer par simulation $\mathbf{E}(e^{\beta G})$ où G est une gaussienne centrée réduite. On rappelle que $\mathbf{E}(e^{\beta G}) = \exp(\beta^2/2)$.
   Calculer par simulation $\mathbf{E}(e^{\beta G})$ pour $\beta = 2, 4, 6, 8, 10 \ldots$. Précisez à chaque fois une intervalle de confiance. Pour quelles valeurs de β peut on utiliser cette méthode de monte-carlo ?

   Correction

Le modèle de Black et Scholes

On considère le modèle de Black et Scholes :

$$S_t = S_0 \exp\left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) t + \sigma W_t\right).$$

On supposera dans la suite que $S_0 = 100$, $\sigma = 0.3$ (volatilité annuelle) et $r = 0.05$ (taux d'intérêt exponentiel annuel).

1. Tracer l'histogramme de la loi de S_T, pour $T = 1$, $\sigma = 0.3$ (volatilité annuelle) et $r = 0.05$ (taux d'intérêt exponentiel annuel).

   Correction

2. On cherche à calculer le prix d'un call de strike $K = 100$. Calculer ce prix par une méthode de monte-carlo avec un nombre de tirages égaux à $N = 1000,1000,10000$. On précisera l'intervalle de confiance.

   Correction

3. On va chercher à utiliser la variable aléatoire S_T comme une variable de contrôle. Vérifiez que $\mathbf{E}(S_T) = S_0 e^{rT}$ (pourquoi ?).

   Ecrire un programme qui utilise S_T comme variable de contrôle. Comparer la précision de cette méthode avec la précédente suivant les valeur relative de K et S_0.

   Se convaincre que l'on a ainsi ramené le calcul du call à un calcul de put.

   Correction

4. On se place dans la cas d'un call de strike K grand devant S_0. Montrer par simulation que la précision relative du calcul décroit au fur et à mesure que K/S_0 décroit. On prendra $S_0 = 100$ et $K = 100, 150, 200, 250$. Que se passe t'il pour $K = 400$?

   Correction

5. Montrer que :

$$\mathbf{E}\left(f(W_T)\right) = \mathbf{E}\left(e^{-\lambda W_T - \frac{\lambda^2 T}{2}} f(W_T + \lambda T)\right).$$

   On se place dans le cas du call avec $S_0 = 100$ et $K = 150$. Proposer une valeur de λ permettant de réduire la variance de la simulation.

   Correction

Modèle de Panier et variables de contrôle

On s'intéresse à un modèle de panier constitué à l'aide de d actifs. On suppose que chacun de ces d actifs de prix S_t^i suit un modèle de Black et Scholes multidimensionnel. Pour cela on considère d mouvement brownien indépendants $(W_t^i, t \geq 0)$, une matrice $d \times d$, $\Sigma = (\sigma_{ij})_{1 \leq i,j \leq d}$ et l'on suppose que que le prix de l'actif i à l'instant t, S_t^i est donné par :

$$\frac{dS_t^i}{S_t^i} = rdt + [\Sigma dW_t]_i \, , S_0^i = x_i.$$

qui peut se résoudre en :

$$S_t^i = x_i e^{(r - \frac{\sigma_i^2}{2})t + \sigma_i \bar{W}_t^i},$$

où $\sigma_i^2 = \sum_{j=1}^d \sigma_{ij}^2$ et $\bar{W}_t^i = \frac{1}{\sigma_i}\sum_{j=1}^d \sigma_{ij} W_t^j$.

On prendra dans les applications numériques $x_i = 100$ et $d = 10$.

Par ailleurs, on souhaite choisir la matrice Σ de façon à :

(a) pouvoir donner une valeur arbitraire aux $(\sigma_i, 1 \leq i \leq d)$

(b) avoir $\mathbf{E}\left(\bar{W}_t^i \bar{W}_t^j\right) = \rho_{ij} t$

ρ_{ij} étant une matrice constante donnée telle que $\rho_{ii} = 1$ (pourquoi ?).

1. Montrer que si un modèle vérifiant (b) existe la matrice ρ est forcément symétrique et positive. Sous cette hypothèse, montrer l'existence d'une matrice Σ permettant de réaliser (a) et (b).
2. On prendra dans la suite $\rho_{ij} = 0.5$ pour tout i et j différent et $\sigma_i = 0.3$ (par année), pour tout i. Vérifier (à l'aide de SciLab) que ρ est bien une matrice définie positive (mais que ce n'est pas le cas si $d = 10$ et $\rho_{ij} = -0,95$).

   Correction

3. Proposer une méthode de simulation du vecteur $(W_T^1, \ldots, W_T^d)$ puis de $(S_T^1, \ldots, S_T^d)$.

   Correction

4. On s'intéresse maintenant au calcul du prix d'un call sur un indice de prix I_t donné par
$$I_t = a_1 S_t^1 + \cdots + a_d S_t^d.$$
   On prendra dans les applications numériques $a_1 = \cdots = a_d = 1/d$. Calculer par simulation la valeur du call de payoff à l'instant T
$$\left(I_T - K\right)_+,$$
   et estimer l'erreur commise pour différentes valeurs de K ($K = 0.8 I_0$, $K = I_0$, $K = 1.2 I_0$, $K = 1.5 I_0$ par exemple).

   Reprendre les simulations pour un put sur indice de payoff $(K - S_T)_+$.

   Correction

5. Montrez que $\mathbf{E}(I_T) = I_0 \exp(rT)$ et utilisez I_T comme variable de contrôle. Quand cette méthode est elle efficace ?

   Correction

6. En supposant que r et σ tendent vers 0 se convaincre qu'il est légitime d'approximer $\log(I_t/I_0)$ par :

$$Z_T = \frac{a_1 S_0^1}{I_0} \log(S_t^1/S_0^1) + \cdots + \frac{a_d S_0^d}{I_0} \log(S_t^d/S_0^d).$$

Montrer que Z_T est une gaussienne de moyenne

$$T \sum_{i=1}^{d} \frac{a_i S_0^i}{I_0} \left(r - \sigma_i^2/2\right)$$

et de variance

$$T \frac{1}{I_0^2} \sum_{i=1}^{d} \sum_{j=1}^{d} J_i \rho_{ij} J_j$$

où $J_i = a_i S_0^i \sigma_i$.

On rappelle que (exercice) :

$$\mathbf{E}\left(\left(e^Z - K\right)_+\right) = e^{\mathbf{E}(Z) + \frac{1}{2}\text{Var}(Z)} N(d + \sqrt{\text{Var}(Z)}) - K N(d)$$

où $d = \frac{\mathbf{E}(Z) - \log(K)}{\sqrt{\text{Var}(Z)}}$.

En déduire une expression explicite de $\mathbf{E}\left(\left(e^{Z_T} - K\right)_+\right)$ et une technique de variable de contrôle pour le calcul du prix du call. Évaluez par simulation le gain de la méthode pour différentes valeurs de K.

Correction