Monte Carlo methods for Option Pricing
in the Black and Scholes model

LAPEYRE Bernard

July 20, 2007

Autour du modèle de Black et Scholes

Partie 1 : Modèle de Black et Scholes On s'intéresse au modèle de Black et Scholes, donné par :

$$S_t = S_0 \exp\left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) t + \sigma W_t\right).$$

On supposera dans la suite que $S_0 = 100$, $\sigma = 0.3$ (volatilité annuelle) et $r = 0.05$ (taux d'intérêt exponentiel annuel).

1. Simuler une suite de variables aléatoires gaussiennes centrées réduites, la trajectoire d'un mouvement brownien et enfin celle d'un modèle de Black et Scholes.

2. Pour un même mouvement brownien, tracer une trajectoire avec $r = 0$,$\sigma = 0.05$, $\sigma = 0.15$. Ces variations **n'ont pas** d'influence sur le prix des options.

   De même, tracer des trajectoires avec $\sigma = 0.1$,$\sigma = 0.3$, $\sigma = 0.9$. Ces variations **ont** une influence sur le prix des options.

3. Implémenter les formules de Black et Scholes pour les puts et les calls.

Couverture approchée d'un portefeuille Nous allons, comme dans le cas du modèle de Black et Scholes, implémenter une procédure de couverture. La théorie suggère d'intervenir à tout instant ce qui est bien entendu impossible. Nous allons intervenir à des pas de temps séparé de Δt (typiquement une heure, un jour, un mois).

Nous chercherons à couvrir un call de strike $K = S_0$ et d'échéance $T = 1$ an.

1. Pour un pas de temps fixé, implémenter une procédure de couverture (appliquer par exemple la formule de couverture de Black-Scholes aux instants $k\Delta t$). On veillera à constituer un portefeuille autofinancé (la valeur de ce portefeuille est différente (mais proche) du prix de l'option).

2. On s'intéresse maintenant au défaut de couverture (la différence entre la valeur finale du portefeuille et la payoff de l'option). Simuler, sous la probabilité risque neutre ($\mu = r$), ce défaut de couverture. Tracer en un histogramme et évaluer sa moyenne et son écart type.

3. Etudier ces quantités lorsque Δt tends vers 0. On étudiera en particulier les variances stratègies qui consistent :

   - à ne rien faire,
   - à se couvrir une fois au début de la période,
   - à se couvrir une fois par mois,
   - à se couvrir une fois par semaine,
   - à se couvrir une fois par jours.

4. Répeter les simulations lorsque $\mu > r$ et $\mu < r$. Que se passe t'il pour la moyenne ? pour l'écart type ? Quand a t'on intérêt à acheter des calls ? des puts ?

5. On pourra recommencer cet exercice de couverture, en prennant une combinaison de put et de call. En voici quelques exemples :

   - **Bull spread** : constituée de l'achat d'un call de prix d'exercice 90 (abrégé en call 90) et de la vente d'un call 110 de même échéance.
   - **Strangle** : constituée de la vente d'un put 90 et de la vente d'un call 110.
   - **Condor** : constituée de la vente d'un call 90, de l'achat d'un call 95 et d'un call 105 et de la vente d'un call 110.
   - **Put ratio backspread** : constituée de la vente d'un put 110 et de l'achat de 3 puts 90.

Etude de la couverture d'une option barrière Nous allons considérer l'exemple du call barrière pour une barrière plus grande que le strike. Cette option est particulièrement délicate à couvrir pour des raisons qui apparaitrons plus tard. Un call barrière promet à sont échéance $(S_T - K)_+$ sous réserve que la trajectoire de S reste inférieure à L (L étant une constante plus grande que K). Le payoff est donné par :

$$(S_T - K)_+ \mathbf{1}_{\{S_s \leq L, 0 \leq s \leq T\}}.$$

On peut montrer (moyennant quelques calculs ...) que le prix à l'instant t si l'actif vaut x est donné par :

$$C(t, x) =$$

et la couverture par :

$$H(t, x) =$$

1. Implementer le prix et la couverture de l'option. Verifier que lorsque L tends vers $+\infty$, le prix converge vers le prix du call classique.

2. Tester le procédure de couverture, comme dans le cas d'une option classique.

3. Tracer la courbe $x \to H(t, x)$. Vérifier que $\sup_{t \leq T, x \in [0,L]} H(t, x) = +\infty$. Est ce bien raisonnable ?

4. Nous allons simuler une trajectoire de façon à faire apparaitre la difficulté (c'est à dire en imposant $S_T = L$). Expliquer comment siumler un mouvement brownien conditionnellement à $W_T = y$ (on remarquera que $(W_t - (t/T)W_T, t \leq T)$ est un processus gaussien indépendant de W_T). En déduire une méthode de simulation de la trajectoire $(S_t, t \leq T)$ conditionnellement à $S_T = L$.

5. Implémenter la procédure de couverture sur cette trajectoire. Que se passe t'il ?