# CALCUL D'ERREUR COMPLET LIPSCHITZIEN ET FORMES DE DIRICHLET

Nicolas Bouleau

paru dans le *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*
80,9(2001) 961-976

**Abstract**. We study the error calculus from a mathematical point of view, in particular for the infinite dimensional models met in stochastic analysis, and also from the point of view of the links with experiments. Gauss was the first to propose an error calculus. Thanks a coherence property this calculus is the most convenient in several questions. It can be reinforced by an extension principle based on Dirichlet forms which gives more strength to the coherence property. One gets a Lipschitzian complete error calculus which behaves well by images and by products and allows a quick and easy construction of the basic mathematical tools of Malliavin's calculus. This allows also to catch the delicate question of error permanency that Poincaré emphasized. This error calculus is connected with statistics by mean of the notion of Fisher information. The article ends with a comprehensive bibliography.

—

**Résumé**. Nous étudions le calcul d'erreur d'un point de vue mathématique en particulier pour les modèles de dimension infinie rencontrés en calcul stochastique et également du point de vue du lien avec l'expérimentation. Gauss fut le premier à proposer un calcul d'erreur au début du 19ème siècle. Ce calcul possède une propriété de cohérence qui le rend supérieur dans bien des questions à d'autres formulations. Il peut être renforcé par un principe d'extension fondé sur la théorie des formes de Dirichlet. On obtient un calcul complet lipschitzien qui se comporte bien par image et par produit et permet une construction facile des notions de base du calcul de Malliavin. Cela permet d'aborder également la délicate question de la permanence des erreurs soulevée par Poincaré. Ce calcul d'erreur se relie aux statistiques par l'intermédiaire de l'information de Fisher.

Le plan est le suivant : après un aperçu des idées de Gauss sur la loi des erreurs et de Poincaré sur la question de la permanence des erreurs et l'exposé du calcul de Gauss et de sa cohérence, nous présentons l'outil d'extension qui permet de construire un calcul lipschitzien et son axiomatisation. Nous abordons alors les liens avec l'expérimentation et les statistiques puis les exemples d'épreuves répétées en dimension finie et infinie où l'on rencontre le phénomène de permanence des erreurs. Enfin nous énonçons des conjectures induites par l'usage du calcul d'erreur lipschitzien pour démontrer l'existence de densités sur l'espace de Wiener. L'article se termine par une bibliographie thématique.

Au contraire des grandeurs discrètes, les grandeurs continues sont le plus souvent entachées d'erreur. Devant ce problème pratique plusieurs attitudes se rencontrent. Soit on traite les erreurs avec un langage vague, traçant des barres d'erreur sans se soucier de corrélation, ou prenant des maxima sans spécifier sur quel domaine, en justifiant un tel laxisme du fait que les erreurs sont mal connues, soit on tente la gageure de propos rigoureux en dégageant les hypothèses nécessaires et les procédures d'expérimentation.

Cette seconde voie que nous allons suivre a été initiée par Legendre, Laplace et Gauss au début du 19ème siècle, dans une série de travaux qu'on désigne par *Théorie classique des erreurs.* Le plus célèbre d'entre eux est la démonstration par Gauss de la "loi des erreurs" par laquelle il montre, avec des hypothèses dont certaines, implicites, seront relevées par d'autres auteurs, que si l'on considère, dans une situation expérimentale, que la moyenne arithmétique des mesures faites est la meilleure valeur à prendre en compte, on doit admettre que les erreurs suivent une loi normale. Son raisonnement est probabiliste : la grandeur à mesurer est une variable aléatoire $X$ et les mesures $X_1, \ldots, X_n$ sont supposées *conditionnellement indépendantes* sachant $X$.

A la fin du siècle, dans son cours de *Calcul des probabilités* Henri Poincaré revient sur cette question en montrant que si on affaiblit certains présupposés de Gauss, d'autres lois que la lois normale peuvent être atteintes. Il discute longuement un point nouveau et délicat : le phénomène de *permanence des erreurs.* "Avec un mètre divisé en millimètres, on ne pourra jamais, écrit-il, si souvent qu'on répète les mesures, déterminer une longueur à un millionième de millimètre près". Ce phénomène est bien connu des physiciens, dans toute l'histoire de la physique on n'a jamais été capable de faire des mesures précises avec des instruments grossiers cf [1]. Il ne développe pas de formalisme mathématique pour cela, il insiste en revanche sur l'avantage de supposer les erreurs petites car alors l'argument de Gauss devient compatible avec les changements de variables non-linéaires qui peuvent s'écrire par le calcul différentiel. C'est la question du *calcul d'erreur.*

### Le calcul d'erreur de Gauss

Douze ans après sa démonstration conduisant à la loi normale, Gauss s'intéresse à la propagation des erreurs (*Theoria combinationis* 1821). Etant donnée une grandeur $U = F(V_1, V_2, \ldots)$ fonction d'autres grandeurs $V_1, V_2, \ldots$, il pose le problème de calculer l'erreur quadratique de $U$ connaissant les erreurs quadratiques $\sigma_1^2, \sigma_2^2, \ldots$ de $V_1, V_2, \ldots$ ces erreurs étant supposées petites et indépendantes.

Sa réponse est la suivante

$$\sigma_U^2 = (\frac{\partial U}{\partial V_1})^2\sigma_1^2 + (\frac{\partial U}{\partial V_2})^2\sigma_2^2 + \ldots \tag{1}$$

et il donne également la covariance de l'erreur de $U$ et d'une autre fonction des $V_1, V_2, \ldots$.

La formule (1) possède une propriété qui lui confère une grande supériorité vis à vis d'autres formules souvent proposées dans les manuels. C'est la propriété de *cohérence*. Avec une formule telle que

$$\sigma_U = |\frac{\partial U}{\partial V_1}|\sigma_1 + |\frac{\partial U}{\partial V_2}|\sigma_2 + \ldots \tag{2}$$

les erreurs peuvent dépendre de la façon d'écrire la fonction $F$. En dimension 2 déjà si on applique (2) à une application linéaire injective puis à son inverse, on obtient que l'identité augmente les erreurs ce qui est difficilement acceptable.

Ceci ne se produit pas avec le calcul de Gauss. Pour le voir introduisons l'opérateur différentiel

$$L = \frac{1}{2}\sigma_1^2\frac{\partial^2}{\partial V_1^2} + \frac{1}{2}\sigma_2^2\frac{\partial^2}{\partial V_2^2} + \ldots$$

et remarquons que (1) s'écrit

$$\sigma_U^2 = LF^2 - 2FLF.$$

La cohérence vient alors de la cohérence du transport d'un opérateur différentiel par une fonction : si $L$ est un tel opérateur, si $u$ et $v$ désignent des applications régulières injectives et si on note $\theta_u L$ l'opérateur $\varphi \to L(\varphi \circ u) \circ u^{-1}$, on a $\theta_{v\circ u} L = \theta_v(\theta_u L)$.

Les erreurs sur $V_1, V_2, \ldots$ peuvent ne pas être supposées indépendantes et peuvent dépendre des valeurs de $V_1, V_2, \ldots$ : on se donne un champ de matrices symétriques positives $(\sigma_{ij}(v_1, v_2, \ldots))$ sur $\mathbb{R}^d$ représentant les variances et covariances conditionnelles de erreurs sachant les valeurs $v_1, v_2, \ldots$ de $V_1, V_2, \ldots$ et le calcul s'écrit

$$\sigma_F^2 = \sum_{ij} \frac{\partial F}{\partial V_i}(v_1, v_2, \ldots)\frac{\partial F}{\partial V_j}(v_1, v_2, \ldots)\sigma_{ij}(v_1, v_2, \ldots) \tag{3}$$

Le calcul d'erreur de Gauss traite des variances et covariances d'erreurs sans se préoccuper des erreurs moyennes c'est-à-dire des biais. Il est important de souligner que c'est la raison pour laquelle il ne fait intervenir que des dérivées premières. En effet si on part d'une situation où les erreurs sont centrées, après une application non linéaire les erreurs ne sont plus centrées et le biais de l'erreur est du même ordre de grandeur que la variance. Par d'autres applications régulières non linéaires cette situation va se perpétuer. Ceci permet de voir que les variances peuvent se calculer par un calcul différentiel du premier ordre ne faisant intervenir que les variances, alors que les erreurs moyennes relèvent d'un calcul du second ordre qui fait intervenir les moyennes et les variances.

La cohérence du calcul de Gauss permet de le *géométriser*. Si une grandeur varie sur une variété différentiable l'erreur associée peut être attachée au point de la variété comme objet géométrique. L'erreur est donnée par une forme quadratique qui est une *métrique riemannienne* sur la variété. On peut prendre des *images* par des applications injectives et de classe $\mathcal{C}^1$ en un calcul cohérent indépendant des écritures des fonctions. Ceci se relie à la théorie des processus de diffusion sur les variétés pour lesquelles nous renvoyons aux références [2].

**Calcul d'erreur avec outil d'extension**

Le calcul de Gauss est limité par le fait qu'il ne dispose d'aucun moyen d'extension. A partir de l'erreur sur $(V_1, V_2, V_3)$ il permet de calculer l'erreur sur une fonction différentiable de $(V_1, V_2, V_3)$ et c'est tout.

Or on aimerait étendre ce calcul aux fonctions lipschitziennes car il est clair *a priori* qu'une application lipschitzienne de constante $\leq 1$, est contractante donc diminue les erreurs. Mais surtout dans une situation fréquente en calcul des probabilités où on a une suite de quantités $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ et où on connaît les erreurs sur les fonctions régulières d'un nombre fini de $X_n$, on aimerait pouvoir en déduire l'erreur sur des fonctions d'une infinité des $X_n$ ou au moins sur certaines d'entre elles.

Il est en fait possible de doter le calcul d'erreur d'un puissant outil d'extension.

Pour cela on revient à l'idée initiale de Gauss de considérer que les grandeurs érronées sont aléatoires, disons définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. L'erreur quadratique sur une variable aléatoire $X$ est elle-même aléatoire, nous la notons $\Gamma[X]$. Elle est infinitésimale mais cela n'apparaît pas dans les notations, comme si nous avions une unité de mesure infinitésimale pour les erreurs fixée dans tout le problème. L'outil est le suivant : nous supposons que si $X_n \to X$ dans $L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et si l'erreur $\Gamma[X_m - X_n]$ sur $X_m - X_n$ peut être rendue aussi petite qu'on veut dans $L^1$ pour $m, n$ grands, alors l'erreur $\Gamma[X_n - X]$ tend vers zéro dans $L^1$.

C'est un *principe de cohérence renforcé* puisqu'il signifie que l'erreur quadratique sur $X$ est attachée à $X$ en tant qu'application mathématique et que si le couple ($X_n$, erreur quadratique sur $X_n$) converge en un sens convenable il converge ncessairement vers ($X$, erreur quadratique sur $X$).

Ceci s'axiomatise de la façon suivante.

Nous appellerons *structure d'erreur* un espace de probabilité muni d'une forme de Dirichlet locale possédant un opérateur carré du champ. Plus précisément c'est un terme

$$(\Omega,\ \mathcal{A},\ \mathbb{P},\ \mathbb{D},\ \Gamma)$$

où $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ est un espace de probabilité, vérifiant les quatre propriétés suivantes :

1. $\mathbb{D}$ est un sous-espace vectoriel dense de $L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$

2. $\Gamma$ est une application bilinéaire symétrique positive de $\mathbb{D} \times \mathbb{D}$ dans $L^1(\mathbb{P})$ vérifiant le calcul fonctionnel de classe $\mathcal{C}^1 \cap \mathrm{Lip}$, ce qui signifie que si $u \in \mathbb{D}^m$ et $v \in \mathbb{D}^n$ pour $F$ et $G$ de classe $\mathcal{C}^1$ et lipschitziennes de $\mathbb{R}^m$ [resp. $\mathbb{R}^n$] dans $\mathbb{R}$, on a $F \circ u \in \mathbb{D}$ et $G \circ v \in \mathbb{D}$ et

$$\Gamma[F \circ u, G \circ v] = \sum_{i,j} F'_i(u) G'_j(v) \Gamma[u_i, v_j] \quad \mathbb{P}\text{-p.s.}$$

3. La forme bilinéaire $\mathcal{E}[f, g] = \mathbb{E}[\Gamma[f, g]]$ est fermée, ce qui signifie que $\mathbb{D}$ est complet pour la norme $\|\,.\,\|_{\mathbb{D}} = (\|\,.\,\|^2_{L^2(\mathbb{P})} + \mathcal{E}[\,.\,,\,.\,])^{\frac{1}{2}}$.

4. $1 \in \mathbb{D}$ et $\Gamma[1,1] = 0$.

On notera $\mathcal{E}[f]$ pour $\mathcal{E}[f,f]$ et $\Gamma[f]$ pour $\Gamma[f,f]$.

*Commentaire.* Avec cette définition la forme $\mathcal{E}$ est une *forme de Dirichlet* notion introduite par Beurling et Deny comme outil de théorie du potentiel et qui reçut une interprétation probabiliste en termes de processus de Markov symétrique par les travaux de Silverstein et Fukushima cf [3]. L'opérateur $\Gamma$ est le carré du champ associé à $\mathcal{E}$, étudié par de nombreux auteurs dans des contextes plus généraux que celui-ci cf [4]. Les formes de Dirichlet locales et leur carré du champ admettent un calcul fonctionnel de classe $\mathcal{C}^1 \cap \mathrm{Lip}$ dont l'interprétation probabiliste sort du cadre des semi-martingales cf [5].

*Premiers exemples.* a) Un exemple simple de structure d'erreur est le terme

$$(\mathbb{R},\, \mathcal{B}(\mathbb{R}),\, \mu,\, H^1(\mu),\, \gamma)$$

où $\mu = N(0,1)$ et $H^1(\mu) = \{f \in L^2(\mu)\ :\ f' \text{ (au sens de } \mathcal{D}') \in L^2(\mu)\}$ avec $\gamma[f] = f'^2$ pour $f \in H^1(\mu)$. Cette structure est associée au processus d'Ornstein-Uhlenbeck à valeurs réelles.

b) Soit $D$ un ouvert connexe de $\mathbb{R}^d$ de volume unité, $\lambda_d$ la mesure de Lebesgue, on prend $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) = (D, \mathcal{B}(D), \lambda_d)$. On définit

$$\Gamma[u,v] = \sum_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_j} a_{ij} \qquad \text{pour } u, v \in \mathcal{C}_K^\infty(D)$$

où les $a_{ij}$ sont des applications de $D$ dans $\mathbb{R}$ telles que

$$a_{ij} \in L^2_{loc}(D),\ a_{ij} = a_{ji},\ \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_k} \in L^2_{loc}(D),\ \sum_{ij} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq 0\ \forall \xi \in \mathbb{R}^d\ \forall x \in D.$$

On peut alors montrer que la forme $\mathcal{E}[u,v] = \mathbb{E}\Gamma[u,v]$ avec $u, v \in \mathcal{C}_K^\infty(D)$ est fermable (cf [6]) autrement dit il existe une extension de $\Gamma$ à un sous-espace $\mathbb{D}$ de $L^2$, $\mathbb{D} \supset \mathcal{C}_K^\infty(D)$ telle que $(\Omega,\, \mathcal{A},\, \mathbb{P},\, \mathbb{D},\, \Gamma)$ soit une structure d'erreur.

C'est une conséquence des hypothèses des structures d'erreur que si $f \in \mathbb{D}$ et si $F$ est lipschitzienne de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ alors $F \circ f \in \mathbb{D}$ et $\Gamma[F \circ f] \leq k\Gamma[f]$. Plus généralement si $F$ est une contraction de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}$ au sens suivant

$$|F(x) - F(y)| \leq \sum_{i=1}^d |x_i - y_i|$$

alors si $f_1, f_2, \ldots, f_d \in \mathbb{D}$ on a $F(f_1, f_2, \ldots, f_d) \in \mathbb{D}$ et

$$\Gamma[F(f_1, f_2, \ldots, f_d)]^{\frac{1}{2}} \leq \sum_{i=1}^d \Gamma[f_i]^{\frac{1}{2}}.$$

Deux propriétés facilitent le maniement des structures d'erreur et permettent d'accompagner les constructions de modèles probabilistes :

1) L'opération de *prendre l'image* d'une structure d'erreur par une application se fait très naturellement et fournit encore une structure d'erreur, dès que l'application satisfait certaines conditions assez larges cf [7]. En particulier si

$$(\Omega,\ \mathcal{A},\ \mathbb{P},\ \mathbb{D},\ \Gamma)$$

est une structure d'erreur et si $X$ est une variable aléatoire à valeurs $\mathbb{R}^d$ dont les composantes sont dans $\mathbb{D}$

$$(\mathbb{R}^d,\ \mathcal{B}(\mathbb{R}^d),\ \mathbb{P}_X,\ \mathbb{D}_X,\ \Gamma_X)$$

est une structure d'erreur où $\mathbb{P}_X$ est la loi de $X$,

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{D}_X & = & \{f \in L^2(\mathbb{P}_X)\ :\ f \circ X \in \mathbb{D}\} \\ \Gamma_X[f](x) & = & \mathbb{E}[\Gamma[f \circ X]|X = x], \qquad f \in \mathbb{D}_X. \end{array}$$

Soulignons que dans ce calcul d'erreur complet lipschitzien les images ne sont pas limitées à des applications injectives. Par exemple la structure de l'exemple a) $(\mathbb{R},\ \mathcal{B}(\mathbb{R}),\ \mu,\ H^1(\mu),\ \gamma)$ a une image par l'application

$$x \to |\sin\sqrt{1+|x|}|$$

qui est une structure d'erreur sur $[0, 1]$.

2) *Le produit* de deux ou d'une infinité dénombrable de structures d'erreur est toujours défini et donne une structure d'erreur. On obtient ainsi facilement des structures d'erreurs sur des espaces de dimension infinie, cf [7], par exemple sur l'espace de Wiener ou sur l'espace de Poisson et sur les modèles qui s'en déduisent, c'est une façon d'aborder le calcul de Malliavin, cf [8].

Indiquons à titre d'exemple la construction de la structure d'Ornstein-Uhlenbeck sur l'espace de Wiener.

Reprenons la structure d'erreur unidimensionnelle de l'exemple a)

$$(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mu, H^1(\mu), \gamma)$$

et considérons la structure produit infini qui s'en déduit :

$$(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}, \mathbb{D}, \Gamma) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mu, H^1(\mu), \gamma)^{\mathbb{N}} = (\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \mathcal{B}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}), \mu^{\mathbb{N}}, \mathbb{D}, \Gamma).$$

Les applications coordonnées $X_n$, par construction du produit, sont gaussiennes réduites indépendantes, appartiennent à $\mathbb{D}$ et vérifient

$$\begin{array}{rcl} \Gamma[X_n] & = & 1 \\ \Gamma[X_m, X_n] & = & 0 \quad m \neq n \end{array}$$

Soit $\chi_n$une base orthonormale de $L^2(\mathbb{R}_+, dt)$. On pose

$$B_t = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^t \chi_n(s)\, ds.X_n.$$

$(B_t)_{t\geq 0}$ est un mouvement brownien et si $f \in L^2(\mathbb{R}_+)$ s'écrit $f = \sum_n a_n \chi_n$, la variable aléatoire $\sum_n a_n X_n$ est notée $\int_0^\infty f(s)\, dB_s$ par extension du cas où $f$ est étagée.

Nous avons alors $\int f(s)\,dB_s \in \mathbb{D}$ et

$$\Gamma[\int f(s)\,dB_s] = \Gamma[\sum_n a_n X_n] = \sum_n a_n^2 \Gamma[X_n] = \sum_n a_n^2 = \|f\|^2_{L^2(\mathbb{R}_+,dt)}$$

Puis par les règles du calcul d'erreur si $F \in \mathcal{C}^1 \cap \mathrm{Lip}(\mathbb{R}^d)$

$$\Gamma(F(\int f_1(s)dB_s, \ldots, \int f_d(s)dB_s)] = \sum_i F_i'^2(\int f_1(s)dB_s, \ldots, \int f_d(s)dB_s)\|f_i\|^2_{L^2(dt)}$$

et par l'outil d'extension, le calcul d'erreur s'étend à d'autres fonctionnelles browniennes dont les solutions d'équations différentielles stochastiques à coefficients lipschitziens cf [7] [8].

**Calculs d'erreur et statistiques**

Pour passer du calcul d'erreur de Gauss au calcul complet lipschitzien il est nécessaire de disposer d'une probabilité. Si des grandeurs sont variables mais déterministes comme parfois en mécanique, elles doivent être replacées dans un cadre probabiliste. C'est le terme $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ d'une structure d'erreur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}, \mathbb{D}, \Gamma)$.

Une première approche consiste à suivre les idées de E. Hopf dans les années 1930 qui dans l'esprit des travaux de Poincaré montra, par des formes générales de théorèmes limites en loi, que de nombreux systèmes dynamiques possèdent des lois de probabilité naturelles qu'on peut prendre comme loi *a priori*, cf [9].

Une seconde voie consiste à se donner un opérateur elliptique du second ordre $L$ vérifiant

$$\Gamma[F] = LF^2 - 2FLF \tag{4}$$

(dont seuls les termes du second ordre sont déterminés par cette relation) qui fournit le cadre d'un calcul d'erreur pour les variances *et les biais*. Puis de construire la probabilité invariante vis à vis de laquelle la diffusion de générateur $L$ est symétrique. Ceci peut être fait de façon géométrique en dimension finie ou infinie cf [10].

Nous suivons une troisième voie qui se relie plus directement aux applications. Nous considérons que les conditions expérimentales sont suffisamment spécifiées pour que la probabilité $\mathbb{P}$ s'obtienne comme habituellement par les statistiques et nous allons montrer que les statistiques fournissent en fait également l'opérateur $\Gamma$ donc finalement la structure d'erreur, au moins sur un domaine minimal pour $\Gamma$.

Considérons une grandeur erronée $d$-dimensionnelle $X$. L'espace image par $X$ est

$$(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \mathbb{P}_X(dx))$$

L'opérateur $\Gamma$ que nous cherchons à définir se présente sous la forme

$$\Gamma_X[F](x) = \sum_{i,j=1}^d F_i'(x)F_j'(x)a_{ij}(x)$$

où la matrice $A(x) = (a_{ij}(x))$ est symétrique positive, c'est elle qu'il faut connaître et qui représente la précision avec laquelle $X$ est connu au point $x$.

Remarquons que si $G : \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R}^m$ est $\mathcal{C}^1 \cap \mathrm{Lip}$, d'après le calcul fonctionnel, la variable aléatoire $G(x)$ est alors connue avec la précision

$$\Gamma_X[G, G^t](x) = \nabla_x G.A(x).(\nabla_x G)^t \tag{5}$$

où $\nabla_x G$ est la matrice jacobienne de $G$ en $x$.

Mais pour connaître $X$, sous la loi conditionnelle $X = x$ notée $\mathbb{E}_x$, nous procédons à des mesures qui sont *des estimateurs* du paramètre $x$. Soit $T$ un tel estimateur à valeur $\mathbb{R}^m$ de matrice de covariance $\mathbb{E}_x[(T-\mathbb{E}_x[T]).(T-\mathbb{E}_x[T])^t]$. Sous les hypothèses statistiques dites du *modèle régulier* l'inégalité de Fréchet-Darmois-Cramer-Rao s'écrit

$$\mathbb{E}_x[(T - \mathbb{E}_x[T]).(T - \mathbb{E}_x[T])^t] \geq \nabla_x \mathbb{E}_x T.J(x)^{-1}.(\nabla_x \mathbb{E}_x T)^t \tag{6}$$

au sens de l'ordre du cône des matrices symétriques positives, où $J(x)$ est la matrice d'*information de Fisher*, cf [11]. La meilleure précision qu'on peut avoir sur $X$ est donc $J(x)^{-1}$ et la comparaison de (5) et (6) conduit à poser

$$A(x) = J(x)^{-1}.$$

On se convainc facilement que cette définition est compatible avec les changements de variables réguliers : si on estime $\psi(x)$ au lieu de $x$, on obtient comme structure d'erreur l'image par $\psi$ de la structure d'erreur de $X$.

Cette connexion entre l'information de Fisher et l'approche des erreurs fondée sur les formes de Dirichlet pose une série de questions qui sont encore au stade de la recherche. J'en énoncerai trois :

a) Sous quelles hypothèses peut-on obtenir directement $J(x)^{-1}$ éventuellement singulière sans passer par la matrice d'information de Fisher ?

b) Les méthodes de statistique asymptotique cf [12] donnent-elles des outils pour étudier la fermabilité des pré-formes de Dirichlet sur $\mathbb{R}^d$ ?

c) L'emploi en statistique de modèles qui sont des structures d'erreur (fermées par hypothèse) permet-il de préciser certains théorèmes asymptotiques ?

### Systèmes projectifs et épreuves répétées

L'introduction d'opérateurs d'erreur en plus du langage probabiliste permet de traiter avec beaucoup de finesse la question des épreuves répétées et de répondre par des modélisations explicites au phénomène de permanence des erreurs pointé par Poincaré.

Comme nous allons le voir certains systèmes projectifs pour lesquels la limite projective des espaces de probabilité existe, n'admettent pas de structure d'erreur limite, mais définissent seulement une pré-structure d'erreur au sens suivant :

Un terme $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}, \mathbb{D}^0, \Gamma)$ est une pré-structure d'erreur si $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ est une espace de probabilité et si $\mathbb{D}^0$, $\Gamma$ vérifient les propriétés (1.), (2.) et (4.) des structures d'erreurs mais pas nécessairement la propriété (3.).

Il y a donc des pré-structures d'erreur fermables et des pré-structures d'erreur non-fermables. Images et produits se définissent facilement pour des pré-structures d'erreur.

Fixons quelques notations pour les systèmes projectifs sous les hypothèses de régularité courantes cf [7] :

Etant donnés des espaces mesurables $(E_i, \mathcal{F}_i)$ $i \in \mathbb{N}^*$, pour $\alpha \in \mathcal{J}$ ensemble des parties finies de $\mathbb{N}^*$ un système projectif de structures d'erreur (ou de pré-structures d'erreur) est une famille

$$(E_\alpha,\, \mathcal{F}_\alpha,\, m_\alpha,\, \mathbb{D}^0_\alpha,\, \Gamma_\alpha)$$

de (pré-)structures d'erreur où $(E_\alpha, \mathcal{F}_\alpha) = \prod_{i\in\alpha}(E_i, \mathcal{F}_i)$ qui sont compatibles au sens usuel. Posant

$$\mathbb{D}^0 = \cup_{\alpha\in\mathcal{J}}\mathbb{D}^0_\alpha$$

il définit une pré-structure d'erreur

$$(E,\, \mathcal{F},\, m,\, \mathbb{D}^0,\, \Gamma)$$

dont les projections sont les $(E_\alpha, \mathcal{F}_\alpha, m_\alpha, \mathbb{D}^0_\alpha, \Gamma_\alpha)$.

Les systèmes projectifs que nous considérons par la suite sont tels que les $(E_i, \mathcal{F}_i)$ sont identiques et que le système projectif soit auto-isomorphe par translation des indices, ceci afin de représenter des épreuves répétées.

Nous allons donner trois exemples. Dans les exemples A et B la situation dont on prend des épreuves répétées est finie dimensionnelle, c'est un modèle probabiliste de dimension finie avec des grandeurs érronées. Les propriétés asymptotiques des épreuves répétées sont différentes dans les cas A et B. Dans l'exemple C le modèle probabiliste dont on fait des épreuves répétées est un espace de processus aléatoire, infini-dimensionnel, ce cas est important car il donne l'idée des applications les plus intéressantes (physique statistique, filtrage et prédiction, finance).

**A**. Dans le premier exemple que nous prenons, les erreurs sont corrélées, (ainsi que le suggérait Poincaré) et le système projectif est fermable :

$$(E_i, \mathcal{F}_i) = ([0,1], \mathcal{B}([0,1])) \quad \forall i \in \mathbb{N}^*$$

.

La pré-structure $(E_\alpha, \mathcal{F}_\alpha, m_\alpha, \mathbb{D}^0_\alpha, \Gamma_\alpha)$ est ainsi définie

$$(E_\alpha, \mathcal{F}_\alpha, m_\alpha) = ([0,1]^{|\alpha|}, \mathcal{B}([0,1])^{|\alpha|}, \lambda_{|\alpha|})$$

où $|\alpha| = \mathrm{card}(\alpha)$ et $\lambda_{|\alpha|}$ est la mesure de Lebesgue de dimension $|\alpha|$,

$$\mathbb{D}^0_\alpha = \mathcal{C}^0_K(]0,1[^{|\alpha|}) \oplus \mathbb{R}$$

et pour $u, v \in \mathbb{D}^0_\alpha$

$$\Gamma_\alpha[u,v] = \sum_{i,j\in\alpha} \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_j} a_{ij}$$

où les $a_{ij}$ sont constants et tels que les matrices $(a_{ij})_{i,j\in\alpha}$ soient symétriques positives.

Dans ce cas on peut montrer que les pré-structures $(E_\alpha, \mathcal{F}_\alpha, m_\alpha, \mathbb{D}^0_\alpha, \Gamma_\alpha)$ sont fermables et également la pré-structure définie par le système projectif

$$(E,\, \mathcal{F},\, m,\, \mathbb{D}^0,\, \Gamma)$$

sa fermeture définit une structure d'erreur

$$(E,\, \mathcal{F},\, m,\, \mathbb{D},\, \Gamma)$$

dont les projections sont les fermetures des $(E_\alpha, \mathcal{F}_\alpha, m_\alpha, \mathbb{D}^0_\alpha, \Gamma_\alpha)$. La démonstration est fondée sur le fait que

$$Au = \sum_{ij} \frac{\partial}{\partial x_i}(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}) \quad u \in \mathbb{D}^0$$

définit un opérateur symétrique ce qui, par un argument classique cf [5], donne le résultat.

Examinons-la structure d'erreur $(E,\, \mathcal{F},\, m,\, \mathbb{D},\, \Gamma)$ plus en détail.

Soient $(U_n)_{n\geq 1}$ les applications coordonnées. Les $U_n$ ne sont pas dans $\mathbb{D}$ mais si $\psi \in H^1_0(]0,1[)$ les variables aléatoires $X_n = \psi(U_n)$ sont dans $\mathbb{D}$, elles sont i.i.d. et

$$\begin{aligned} \Gamma[X_n] &= \psi'^2(U_n)a_{nn} \\ \Gamma[X_m, X_n] &= \psi'(U_m)\psi'(U_n)a_{mn}. \end{aligned}$$

a) Si $a_{ij} = 1 \quad \forall i, j$ nous avons $\forall F \in \mathcal{C}^1 \cap \mathrm{Lip}(\mathbb{R}^d)$

$$\Gamma[F(X_1, \ldots, X_d)] = \left(\sum_{i=1}^{d} F'_i(X_1, \ldots, X_d)\psi'(U_i)\right)^2$$

ainsi

$$\lim_{N\uparrow\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} X_n = \int_0^1 \psi(x)\,dx$$

et d'autre part

$$\lim_{N\uparrow\infty} \Gamma[\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} X_n] = \lim_{N\uparrow\infty} (\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} \psi'(U_n))^2 = (\int_0^1 \psi'(x)\,dx)^2 = 0$$

les limites étant dans $L^1$ et p.s. par la loi des grands nombres.

b) Plus généralement dans le cas $a_{ij} = a(i-j)$ avec $\sum \xi_i\xi_j a(i-j) \geq 0$ utilisant le théorème de représentation de Bochner, on obtient aussi

$$\lim_{N\uparrow\infty} \Gamma[\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} X_n] = 0 \text{ dans } L^1$$

.

On voit que dans cet exemple les épreuves sont indépendantes avec des erreurs corrélées mais l'erreur sur la moyenne s'évanouit. Ce ne sera plus le cas dans l'exemple suivant.

**B**. Supposons que chaque tirage concerne une quantité scalaire et soit

$$(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \rho, \mathbb{d}, G)$$

une structure d'erreur sur $\mathbb{R}$ telle que l'identité soit dans $\mathbb{d}$ et vérifiant pour $u \in \mathcal{C}^1 \cap \mathrm{Lip} \subset \mathbb{d}$

$$G[u] = u'^2 . g$$

où $g$ est une fonction positive de $L^1(\rho)$.

Définissons la pré-structure $(E_\alpha, \mathcal{F}_\alpha, m_\alpha, \mathbb{D}^0_\alpha, \Gamma_\alpha)$ par

$(E_\alpha, \mathcal{F}_\alpha, m_\alpha) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \rho)^{|\alpha|}$,

soient $(X_n)_{n\geq 1}$ les applications coordonnées, prenons

$\mathbb{D}^0_\alpha = \mathcal{C}^1 \cap \mathrm{Lip}(\mathbb{R}^{|\alpha|})$

et pour $u \in \mathbb{D}^0_\alpha$ posons

$\Gamma_\alpha[u] = (\sum_{i\in\alpha} u'_i f(X_i))^2 + \sum_{i\in\alpha} u'^2_i . g(X_i)$ pour une fonction $f \in L^2(\rho)$.

On peut montrer, par exemple en supposant les fonctions $f, g$ telles que $\frac{f^2}{g}$ soit bornée, que les pré-structures $(E_\alpha, \mathcal{F}_\alpha, m_\alpha, \mathbb{D}^0_\alpha, \Gamma_\alpha)$ sont fermables et leurs fermetures $(E_\alpha, \mathcal{F}_\alpha, m_\alpha, \mathbb{D}_\alpha, \Gamma_\alpha)$ forment un système projectif définissant une pré-structure

$$(E, \mathcal{F}, m, \mathbb{D}^0, \Gamma) \qquad \mathbb{D}^0 = \cup_{\alpha\in\mathcal{J}} \mathbb{D}_\alpha.$$

Les coordonnées $X_n$ sont dans $\mathbb{D}^0$ et sont i.i.d. de loi $\rho$.

Nous avons

$$\begin{array}{rcl} \Gamma[X_n] &=& f^2(X_n) + g(X_n) \\ \Gamma[X_m, X_n] &=& f(X_m) f(X_n) \quad m \neq n. \end{array}$$

Si $h \in \mathcal{C}^1 \cap \mathrm{Lip}(\mathbb{R})$ on a lorsque $N \uparrow \infty$

$$\begin{array}{rcll} \frac{1}{N}\sum_{n=1}^N h(X_n) &\rightarrow& \int h\, d\rho & \text{p.s. et dans } L^2(m) \\ \Gamma[\frac{1}{N}\sum_{n=1}^N h(X_n)] &\rightarrow& (\int h'.f.d\rho)^2 & \text{p.s. et dans } L^1(m). \end{array}$$

Or si $u_N = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^N h(X_n)$ on peut montrer aisément que $\Gamma[u_M - u_N] \rightarrow 0$ dans $L^1$ pour $M, N \uparrow \infty$. Il en résulte que la pré-structure $(E, \mathcal{F}, m, \mathbb{D}^0, \Gamma)$ *n'est jamais fermable* à moins que $f = 0$ p.s. ce qui redonne le cas d'une structure produit.

La limite $(\int h'.f.d\rho)^2$ n'est pas nulle en général, le modèle décrit une situation analogue à celle relevée par Poincaré où les erreurs ne sont pas évanescentes.

**C**. Passons à des exemples faisant intervenir la dimension infinie.

Une ficelle de longueur $L$ est jetée sur le plan et on mesure (par exemple au moyen de lignes parallèles très resserrées) la longueur totale de la projection de la ficelle sur $Ox$. Par épreuves répétées ceci permet de mesurer la longueur de la ficelle comme nous allons le voir dans un instant.

Ceci peut être modélisé de la façon suivante :
la ficelle est paramétrée par

$$\begin{array}{rcll} X(t) &=& X_0 + \int_0^t \cos(\varphi + B_s)\, ds & \\ Y(t) &=& Y_0 + \int_0^t \sin(\varphi + B_s)\, ds & \qquad 0 \leq t \leq L \leq 1 \end{array}$$

où $B$ est un mouvement brownien standard et $\varphi$ uniforme sur le cercle, indépendant de $B$. On mesure la quantité

$$A(\varphi, \omega) = \int_0^L |\cos(\varphi + B_s)|\, ds$$

On obtient $\mathbb{E}A$ par épreuves répétées et on en déduit la longueur $L$ de la ficelle par la formule

$$\mathbb{E}A = \frac{2L}{\pi}$$

qui vient immédiatement de l'expression de $A$ par intégration puisque $\varphi$ et $B$ sont indépendants.

Comme hypothèse sur les erreurs nous supposons qu'il y a une erreur sur $\varphi$ et une erreur sur $B$ indépendantes mais que les erreurs sur les diverses épreuves sont corrélées.

Sur $\varphi$ on considère une erreur analogue au cas B.

Sur $B$ on considère pour la simplicité l'erreur donnée par la forme de Dirichlet associée au semigroupe d'Ornstein-Uhlenbeck cf [8] dont nous avons indiqué la construction plus haut.

Notons $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ l'espace de Wiener. Cette structure d'erreur est telle que pour une variable aléatoire de la forme $\int_0^1 f(s)\,dB_s,\ f \in L^2([0,1])$, l'opérateur $\Gamma_{OU}$ ($OU$ pour Ornstein-Uhlenbeck) est défini par

$$\Gamma_{OU}[\int_0^1 f(s)\,dB_s] = \int_0^1 f^2(s)\,ds$$

puis la définition de $\Gamma_{OU}$ s'étend par le calcul fonctionnel aux variables de la forme

$$F(\int_0^1 f_1(s)\,dB_s, \int_0^1 f_2(s)\,dB_s, \ldots, \int_0^1 f_k(s)\,dB_s)$$

et à d'autres par continuité de $\Gamma_{OU}$ dont le domaine est noté $\mathbb{D}_2^1$. On peut aussi construire un opérateur gradient $D$ défini sur $\mathbb{D}_2^1$ à valeurs dans $L^2(\mathbb{P}, H)$ où $H$ est un espace de Hilbert auxiliaire et relié à $\Gamma_{OU}$ par

$$\forall G \in \mathbb{D}_2^1 \quad \Gamma_{OU}[G] = < DG, DG >_H .$$

Nous notons $\varphi_n, \omega_n$ les applications coordonnées du système projectif et si $X(\varphi, \omega)$ est une variable aléatoire dépendant du lacet $(\varphi, \omega)$ nous notons

$$X_n = X(\varphi_n, \omega_n)$$

le $n$-ième tirage de cette variable aléatoire.

La corrélation des erreurs peut être exprimée au moyen d'un opérateur de Hilbert-Schmidt $K$ sur $H$ dépendant de $\omega$ tel que $\|K\|_{HS} \in L^\infty$.

On considère $\prod_{n=1}^N (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})_n$ (copies de l'espace de Wiener) et pour une variable aléatoire $F(\omega_1, \ldots, \omega_N)$ nous définissons l'opérateur $\Gamma_N$ par

$$\Gamma_N[F] = \|\sum_{i=1}^N K_i D_i F\|_H^2 + \sum_{i=1}^N \|D_i F\|_H^2$$

où $K_i$ et $D_i$ sont les opérateurs $K$ et $D$ opérant sur $\omega_i$. Soit

$$\mathbb{D}_N = \{F \in L^2(\mathbb{P}^N) \ : \ \forall i \ \omega_i \mapsto F(\omega_1, \ldots, \omega_i, \ldots, \omega_N) \in \mathbb{D}_2^1 \quad \text{et } \sum_{i=1}^N \|D_i F\|_H^2 \in L^1(\mathbb{P}^N)\}$$

alors la structure

$$\left(\prod_{n=1}^N (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})_n, \mathbb{D}_N, \Gamma_N\right)$$

est fermée.

Lorsque $N$ varie elles forment un système projectif tel que

$$\begin{array}{rcl}\Gamma[X_n] & = & \|K_nD_nX_n\|_H^2 + \|D_nX_n\|_H^2 \\ \Gamma[X_m, X_n] & = & < K_mD_mX_m, K_nD_nX_n >_H \qquad m \neq m\end{array}$$

qui constitue une pré-structure d'erreur, auto-isomorphe par translation des indices et non fermable.

Des calculs explicites peuvent être menés si l'opérateur $K$ est précisé. Par exemple si $K$ est la multiplication par $a(\varphi, \omega)$ pour l'espace de Wiener et par $b(\varphi, \omega)$ pour l'angle $\varphi$,
si $a(\varphi, \omega) = b(\varphi, \omega)\sqrt{g}(\varphi) = 1_{[0,2\pi]}(\varphi)$ on obtient pour l'erreur asymptotique

$$\lim_{N\uparrow\infty} \Gamma[\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} A_n] = \int_{[0,L]} \left(\frac{1}{2\pi}(\int_{\mathbb{R}} |\cos x| - |\sin x|) \int_t^L \frac{e^{-\frac{x^2}{2s}}}{\sqrt{2\pi s}}\, dsdx\right)^2 (dt+\delta_0(t))$$

et si $a(\varphi, \omega) = b(\varphi, \omega)\sqrt{g}(\varphi) = \varphi.1_{[0,2\pi]}(\varphi)$ on obtient

$$\lim_{N\uparrow\infty} \Gamma[\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} A_n] = \int_{[0,L]} \left(\frac{2}{\pi}(L-t) - \int_{\mathbb{R}} |\cos x| \int_t^L \frac{e^{-\frac{x^2}{2s}}}{\sqrt{2\pi s}}\, dsdx\right)^2 (dt + \delta_0(t))$$

*Remarque.* Une grande variété de modèles peuvent être construits et manipulés avec des hypothèses différentes sur la ficelle ou sur les erreurs. Ainsi avec une ficelle de classe $\mathcal{C}^2$

$$\begin{array}{rcl}X(t) & = & X_0 + \int_0^t \cos(\varphi + V_s)\, ds \\ Y(t) & = & X_0 + \int_0^t \sin(\varphi + V_s)\, ds \qquad 0 \leq t \leq L \leq 1\end{array}$$

où $V_s$ est le processus gaussien de classe $\mathcal{C}^1$

$$V_s = \int_0^1 u \wedge s\, dB_u$$

on peut envisager des erreurs qui perturbent la ficelle de façon plus profonde (second quantization) par exemple avec la forme de Dirichlet associée au semi-groupe

$$(P_tF)(\omega) = \widetilde{\mathbb{E}}[F(p_t\, \omega + \sqrt{I - p_{2t}}\, \tilde{\omega})]$$

où $p_t$ est le semigroupe de la chaleur sur $[0, 1]$ avec réflexion au bord, la quantité mesurée

$$A = \int_0^L |\cos(\varphi + V_s)|\, ds$$

restant alors parmi celles qui ont une erreur bien définie. Cette structure sur l'espace de Wiener a un opérateur $\Gamma_1$ tel que

$$\Gamma_1[\int_0^1 f(s)\, dB_s] = \int_0^1 f'^2(s)\, ds \qquad \forall f \in H^1[0, 1]$$

formule qui permet comme précédemment de le définir de proche en proche par calcul fonctionnel et continuité.

On a ici $\Gamma_1[V_s, V_t] = s \wedge t$ d'où

$$\Gamma_1[A] = \int_0^L \int_0^L \text{sign}[\cos(\varphi+V_s)] \sin(\varphi+V_s)\text{sign}[\cos(\varphi+V_t)] \sin(\varphi+V_t)(s\wedge t)\, dsdt.$$

**Conjectures**

La célèbre méthode d'intégration par partie en dimension infinie qui permit à P. Malliavin d'améliorer le théorème de Hörmander sur les opérateurs différentiels du second ordre hypoelliptiques consiste schématiquement à définir sur l'espace de Wiener un opérateur gradient $\nabla$ dont le transposé étende l'intégrale stochastique de Itô et à écrire un analogue de la formule classique

$$\int g \,\text{div}\vec{f} = \int \nabla g.\vec{f}$$

$g$ n'étant plus $\mathcal{C}^\infty$ à support compact mais dans une classe de fonctions tests déduite des intégrales de Wiener. Cette méthode a donné plusieurs résultats nouveaux d'existence et de régularité $\mathcal{C}^\infty$ de densité cf [8] et se relie à la théorie des distributions sur l'espace de Wiener cf [13].

Considérer ces opérateurs est équivalent à considérer la structure d'erreur d'Ornstein-Uhlenbeck que nous avons utilisée dans l'exemple C. Elle a la propriété intéressante que toute variable aléatoire $X$ à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ dont la matrice d'erreur $\Gamma[X, X^t]$ est presque sûrement inversible a une loi absolument continue, ceci peut être démontré grâce à la formule de co-aire de H. Federer. Ceci donne des résultats de régularité de solutions d'équations différentielles stochastiques dans le cas de coefficients lipschitziens. Cette propriété est vraie pour plusieurs autres structures obtenues par image ou produit et est toujours vraie pour des fonctions à valeurs réelles cf [14]. Nous avons posé en 1986 avec Francis Hirsch la conjecture qu'elle était toujours vérifiée.

**Conjecture** *(conjecture de régularité des lois)*
*Pour toute structure d'erreur* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}, \mathbb{D}, \Gamma)$ *et tout entier* $d \geq 1$, *si* $X \in \mathbb{D}^d$

$$X_*(1_{\{\det\Gamma[X,X^t]>0\}}.\mathbb{P}) << \lambda_d$$

*où* $\lambda_d$ *est la mesure de Lebesgue sur* $\mathbb{R}^d$ *et* $X_*\mu$ *désigne l'image de la mesure* $\mu$ *par* $X$.

Déjà sur $\mathbb{R}^d$ si les composantes de l'application identité sont dans $\mathbb{D}$ cette conjecture se relie à la connaissance des formes quadratiques différentielles qui sont fermables qui sont malheureusement encore mal caractérisées :

**Conjecture** *(conjecture des formes fermées)*
*Soit* $\mu$ *une probabilité sur* $\mathbb{R}^n$. *Soit* $A(x)$ *une famille mesurable de matrices* $n \times n$ *symétriques telle que la forme définie pour* $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ *par*

$$\int \nabla f\, A\, (\nabla f)^t\, d\mu$$

*soit fermable dans $L^2(\mu)$, alors pour $1 \leq k \leq n$*

$$1_{\{\text{rang de } A=k\}}.\mu << \mathcal{H}^k$$

*où $\mathcal{H}^k$ est la mesure de Hausdorff $k$-dimensionnelle sur $\mathbb{R}^n$.*

Cette propriété a été prouvée dans le cas $n = 1$ par M. Hamza en 1975 cf [6]. Certains résultats partiellement non publiés de D. Preiss et G. Mokobodzki donnent le cas $n = k = 2$. On attend confirmation.

Qu'en est-il du calcul sur les erreurs moyennes dont nous avons dit qu'il fait intervenir les dérivées secondes ? Il n'est pas nécessaire d'introduire de nouveaux objets pour le traiter. Comme une forme de Dirichlet sur un espace $L^2(m)$ détermine son semi-groupe d'opérateurs et son générateur, l'opérateur $L$ vérifiant (4) est déterminé, y compris ses termes d'ordre 1, par la structure $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}, \mathbb{D}, \Gamma)$, simplement il opère sur des fonctions plus régulières et le calcul sur les biais utilise déjà le calcul sur les variances.

Mentionnons enfin que dès que l'espace $\Omega$ est muni d'une structure topologique qui se relie à la tribu $\mathcal{A}$, une structure d'erreur définit naturellement une notion de capacité cf [15] qui ouvre le "programme quasi-sûr" de raffinement des résultats probabilistes presque sûrs comme cela a été fait sur l'espace de Wiener avec la structure d'Ornstein-Uhlenbeck.

## Bibliographie


[1] H. A. Klein, *The science of measurement, a historical survey*, Dover, 1974.

[2] K. Itô, "Stochastic differential equations on a manifold" *Nagoya Math. J.* 1, 35-47, 1950. — P. A. Meyer, J. Azema, M. Yor, (eds) *Séminaire de probabilités XVI, supplément géométrie différentielle stochastique* Lect. Notes in Math. 921, Springer, 1982 — N. Ikeda, S. Watanabe, *Stochastic differential equations and diffusion processes* North Holland, 1989 — M. Emery, *Stochastic calculus in manifolds*, Springer, 1989 — D. Stroock, S. Tanigushi, "Diffusions as integral curves of vector fields, Stratonovitch diffusion without Itô integration" in *Prog. in Prob.* 34, 333-369, Birkäuser, 1994 — M. Emery, "Martingales continues dans les variétés différentiables" *in* Ec. d'été St Flour, L. N. in Math. vol. 1738 Springer 2000.

[3] A. Beurling, J. Deny, "Espaces de Dirichlet, I. le cas élémentaire" *Acta Math.* 99 (1958), 203-224; "Dirichlet spaces", *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.* 45 (1959), 206-215 — M. L. Silverstein, *Symmetric Markov processes*, L. N. in Math. vol 426, Springer, 1974 — M. Fukushima, *Dirichlet forms and Markov processes*, North-Holland-Kodansha, 1980.

[4] Cl. Dellacherie , P. A. Meyer, *Probabilités et potentiel*, Chap. XV §2 Hermann 1987 — N. Bouleau, F. Hirsch, *Dirichlet forms and analysis on Wiener space*, Chap.I §4, de Gruyter, 1991.

[5] Y. Le Jan, "Mesures associées à une forme de Dirichlet" *Bull. de la SMF*, 106, (1978), 61-112 — M. Fukushima *op. cit.* — J. Bertoin "Les processus de

Dirichlet en tant qu'espace de Banach" *Stochastics* 18, (1986), 155-168 — T. Lyons, Z. Weian, "A crossing estimate for the canonical process on a Dirichlet space and a tightness result", *Astérisque*, $n^0$ 157-158, (1988).

[6] M. Fukushima, Y. Oshima, M. Takeda, *Dirichlet forms and Markov processes*, de Gruyter, 1994 — Z. Ma, M. Röckner, *Dirichlet forms*, Springer, 1992.

[7] N. Bouleau, F. Hirsch, *op. cit.* Chap.V — N. Bouleau, "Construction of Dirichlet structures", *Potential theory ICPT 1994*, de Gruyter, 1995.

[8] D. W. Stroock, "The Malliavin calculus, a functional analytic approach", *J. Functional Analysis* 44, p212-257, 1981 — D. Ocone, "A guide to the stochastic calculus of variations", in *Stochastic Analysis and Related Topics*, H. Korezlioglu, S. Ustunel, eds, L. N. in Math. vol. 1316 Springer 1987 — J. Potthoff, "White noise approach to Malliavin calculus", *J. Functional Analysis*, 71, p207-217, 1987 — N. Bouleau, F. Hirsch, *ibid.* Chap.II, III et IV — D. Nualart, *The Malliavin calculus and related topics*, Springer 1995 — N. Privault, "Inégalités de Meyer sur l'espace de Poisson" *C. R. Acad. Sci. Paris*, sI, t.318, p559, 1994 — S. Ustünel, *An introduction to analysis on Wiener space*, L. N. in Math. 1610, Springer 1995 — P. Malliavin, *Stochastic analysis*, Springer, 1997.

[9] E. Hopf, "On causality, statistics and probability" *J. Math. and Physics* MIT, 13, 51-102, 1934 — E. Engel, "A road to randomness in physical systems" *Lect. notes in Stat.* 71, Springer 1992.

[10] O. Enshev, D. Stroock, "Toward a Riemannian geometry on the path space of a Riemannian manifold" *J. of Functional Analysis* 134, 392-416, 1996 — A. B. Cruzeiro, P. Malliavin, "Non perturbative construction of invariant measures through confinement by curvature", *J. Math. Pures et Appl.* 77, 527-537, 1998.

[11] D. Dacunha-Castelle, M. Duflo, *Probabilité et statistiques 1. Problèmes à temps fixe*, Masson, 1982.

[12] I. A. Ibragimov, R. Z. Has'minskii, *Statistical estimation*, Springer 1981 — V. Genon-Catalot, D. Picard, *Eléments de statistique asymptotique* SMAI-Springer 1993.

[13] I. Shigekawa, "Derivatives of Wiener functionals and absolute continuity of induced measures", *J. Math. Kyoto Univ.* 20-2, p263-289, 1980 — S. Watanabe, *Lectures on Stochastic differential equations and Malliavin calculus* Tata Institute, Springer 1984.

[14] N. Bouleau, "Décomposition de l'énergie par niveau de potentiel", *L. N. in Math.* Vol 1096, Springer 1984.

[15] A. Beurling, J. Deny, *op. cit.* — G. Choquet, "Theory of capacities" *Ann. Inst. Fourier*, 5, 1953-54 — J. Deny, "Théorie de la capacité dans les espaces fonctionnels" *Séminaire Brelot-Choquet-Deny*, 9ème année, 1, 1964-65 — P. Malliavin, "Implicit functions of finite corank on the Wiener space" *Tanigushi Int. Symp. Stoch. An., Katata 1982*, Kinoluniya, Tokyo, 1983 — D. Feyel, A. de la Pradelle,"Capacités gaussiennes" *Ann. Inst. Fourier* 41 (1991), 49-76.

Nicolas Bouleau
Direction de la Recherche

Ecole des Ponts, Paris
e-mail: bouleau@enpc.fr