MATHEMATIQUES FINANCIERES
SANS LARMES

Nicolas Bouleau
octobre 2005

L'engouement parmi les chercheurs et les jeunes scientifiques pour les mathématiques financières — très excessif — est-il un comportement induit par le néolibéralisme dominant et par l'influence progressive des marchés financiers sur les décisions de toutes sortes ? Certainement.

Il n'en reste pas moins qu'il existe une articulation réelle entre certains concepts mathématiques — relativement difficiles découverts au milieu du 20ème siècle —et la pratique financière, et que cet accrochage mérite d'être mieux connu.

Sans cela on critique sans connaître et on tombe dans le manichéisme. J'y vois donc les fondements d'une critique plus pertinente.

Je tente ici de présenter cette articulation le plus simplement possible.

Plan

I. DE BACHELIER A BLACK-SCHOLES

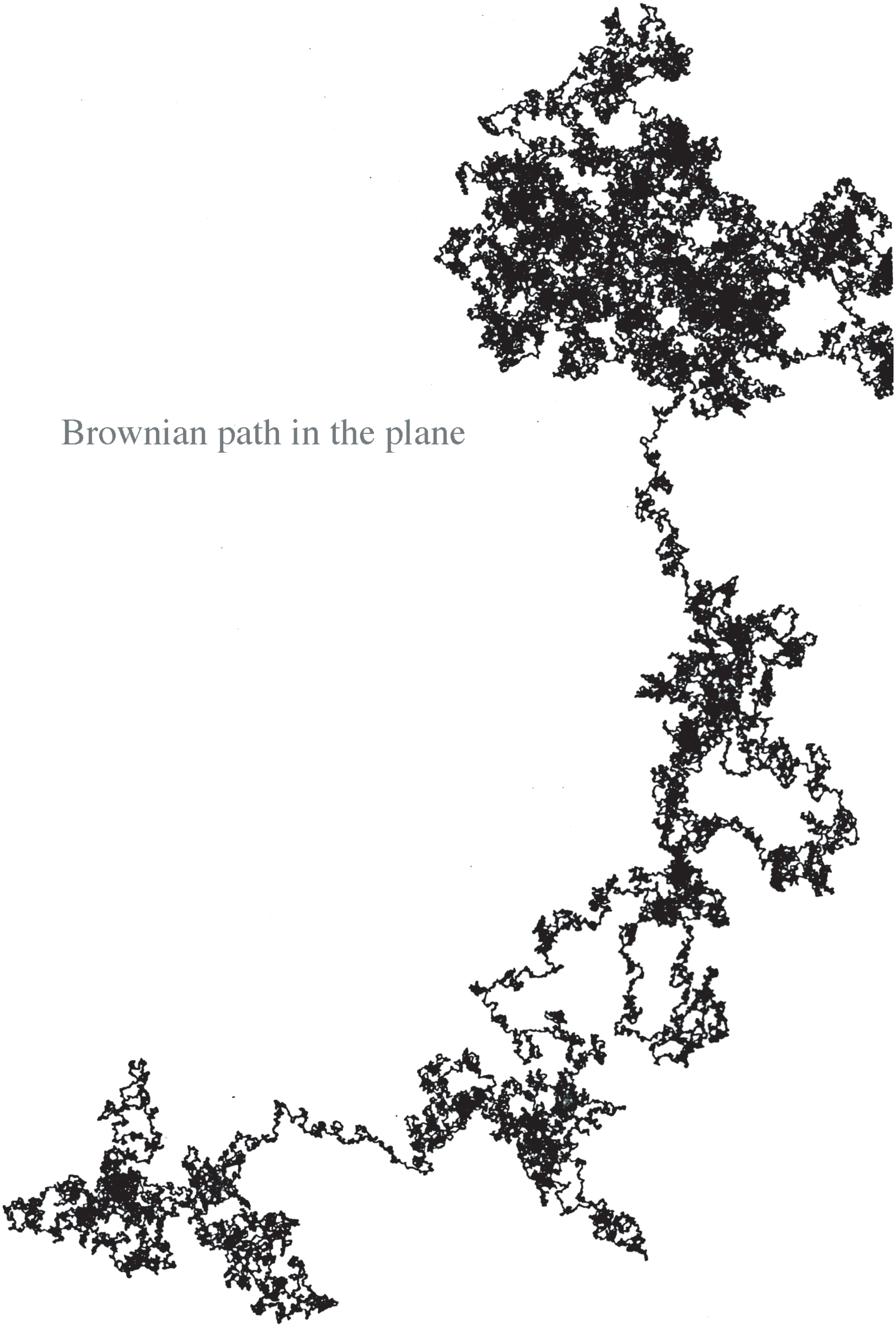
- **Les martingales des joueurs**
  doublement de la mise, etc.

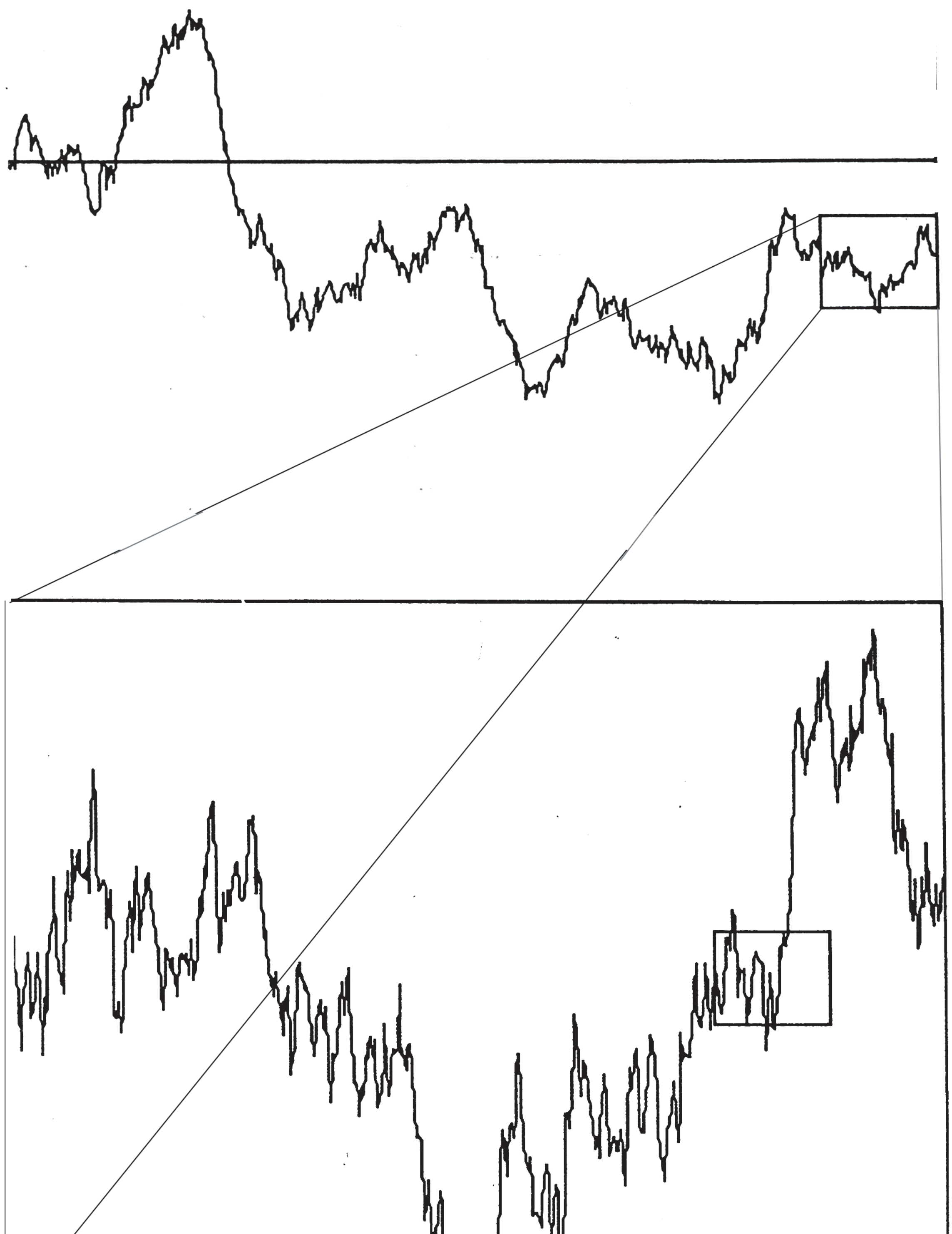
- **Les idées de Louis Bachelier (1900)**
  “la bourse ne croît ni à la hausse ni à la baisse”
  l’actif modélisé par un mouvement brownien

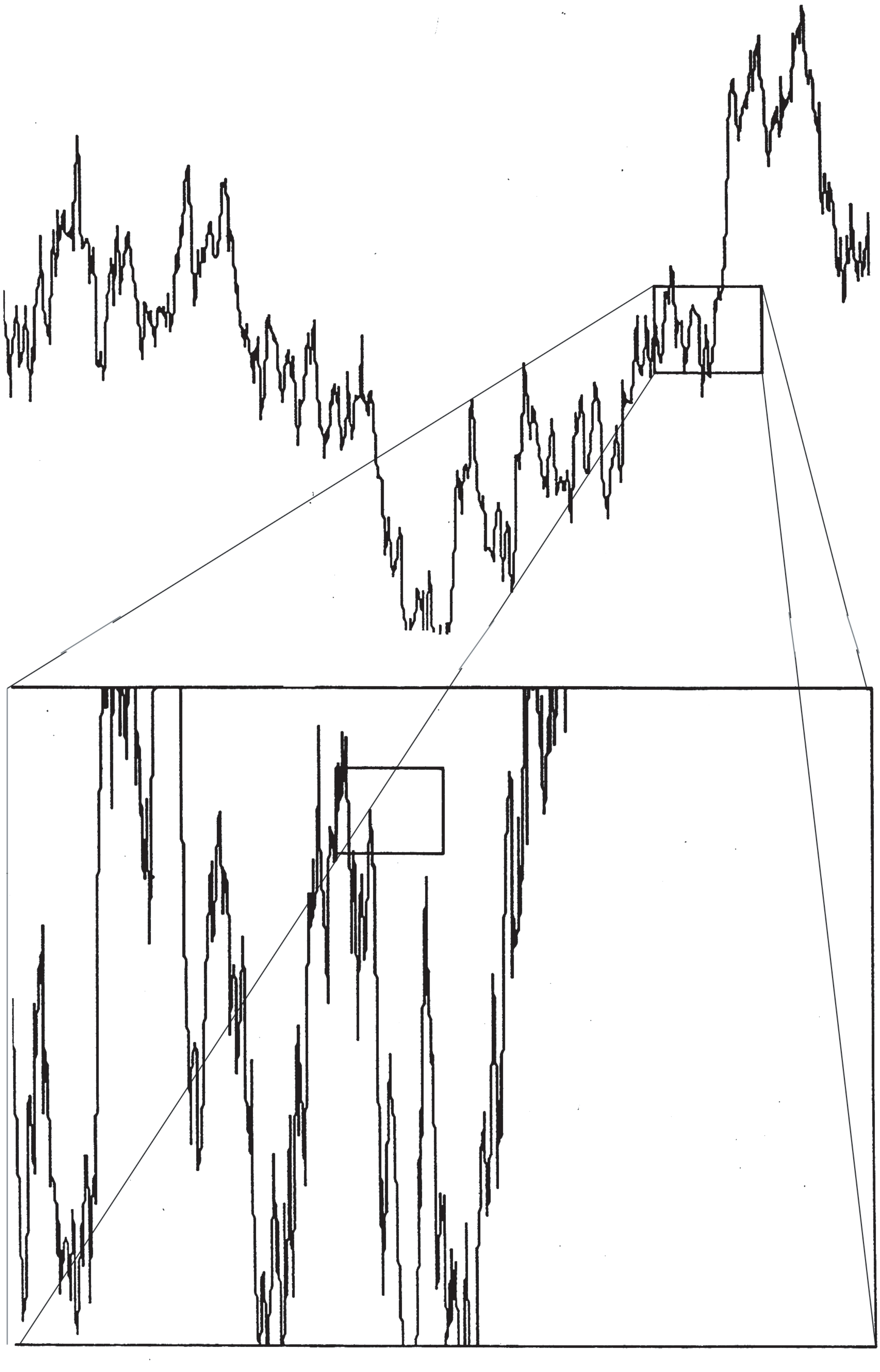
- **Les martingales des mathématiciens**
  processus ayant la propriété du centre de gravité
  transitivité de cette propriété
  thm d’arrêt de Doob

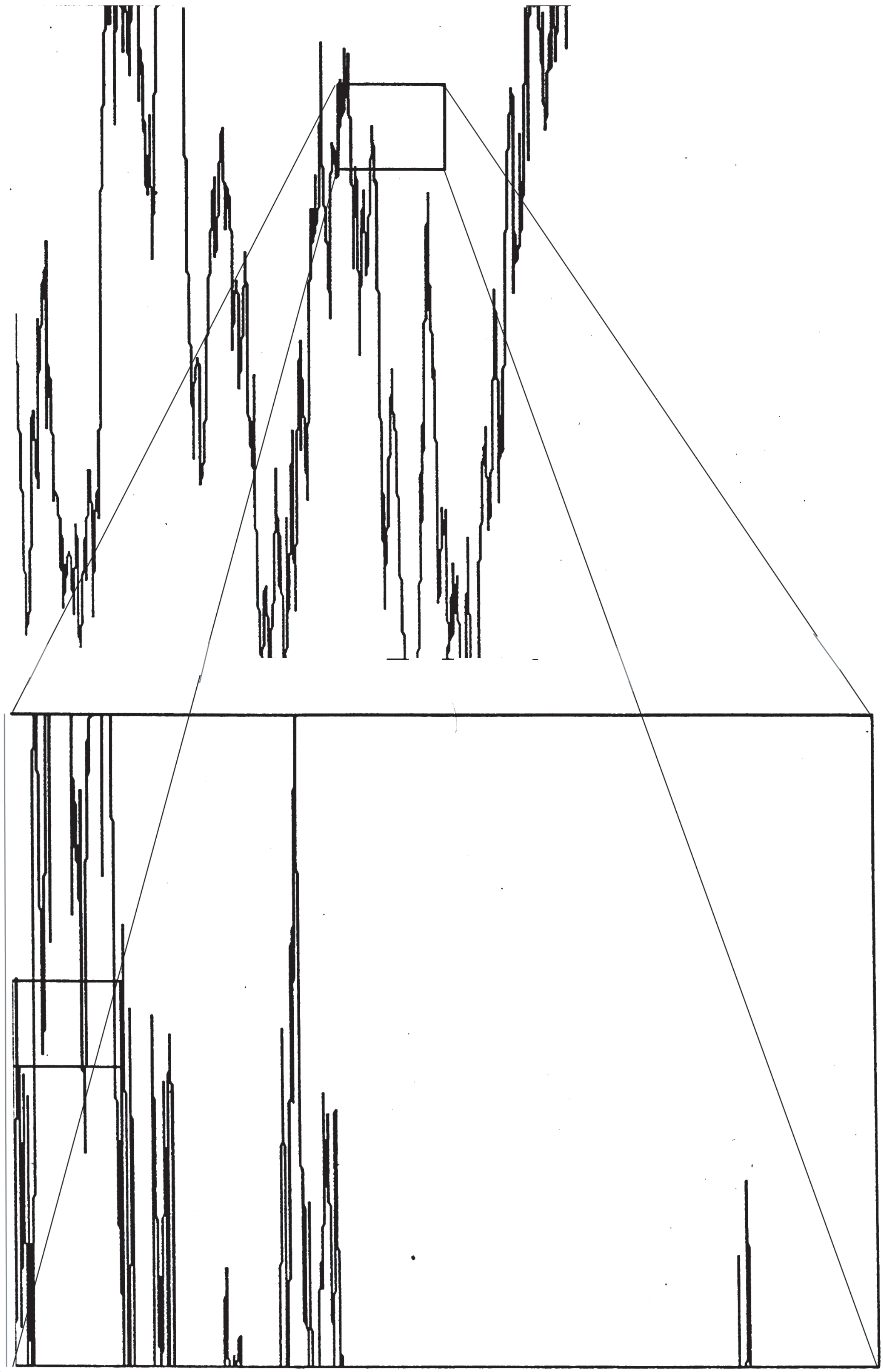
- **Le mouvement brownien**
  Brown (XIXe siècle)
  Einstein et Smoluchovski (1906)
  Norbert Wiener, années 1925-1930
  Kyosi Ito, années 1945-1960

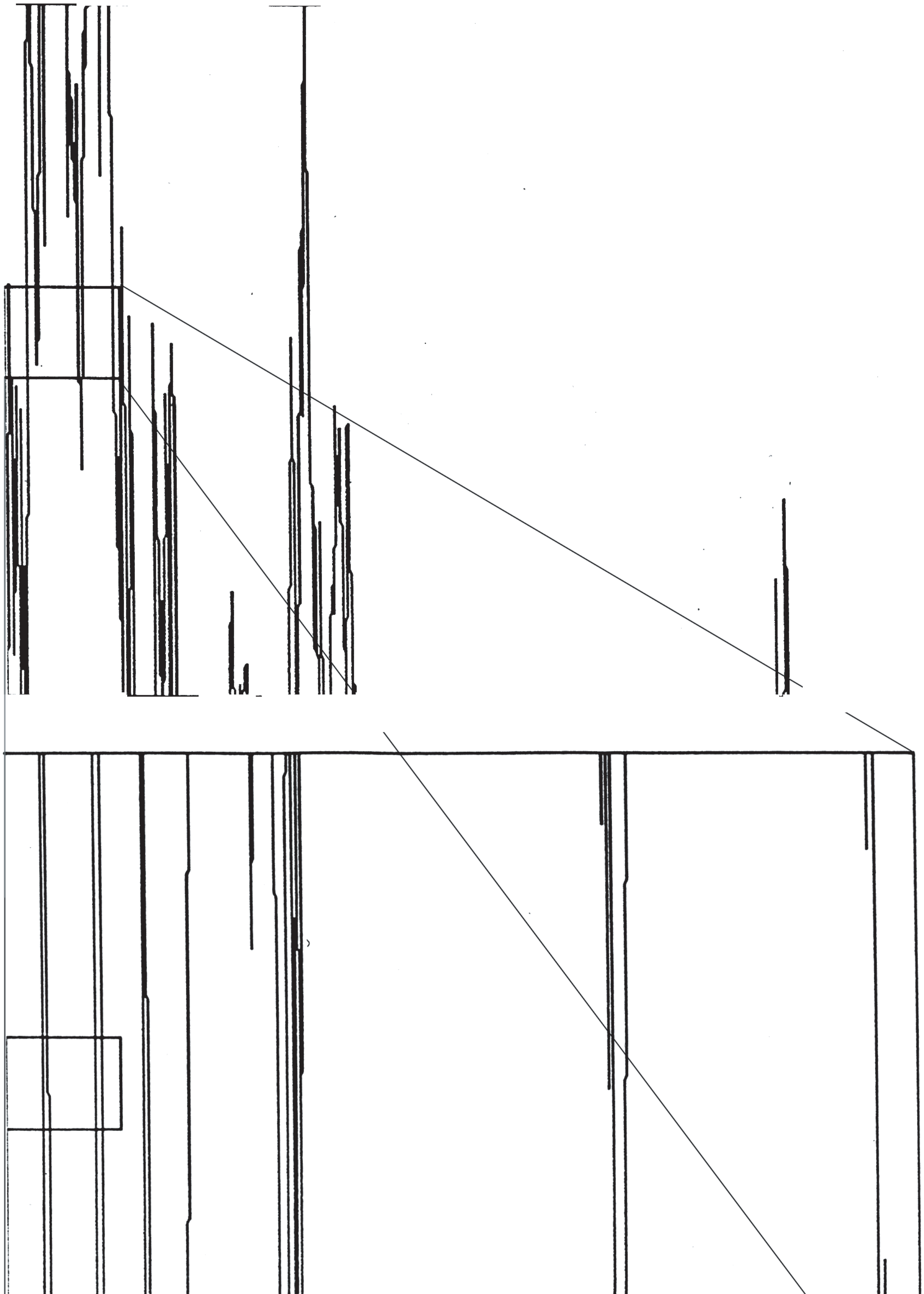
Brownian path in the plane

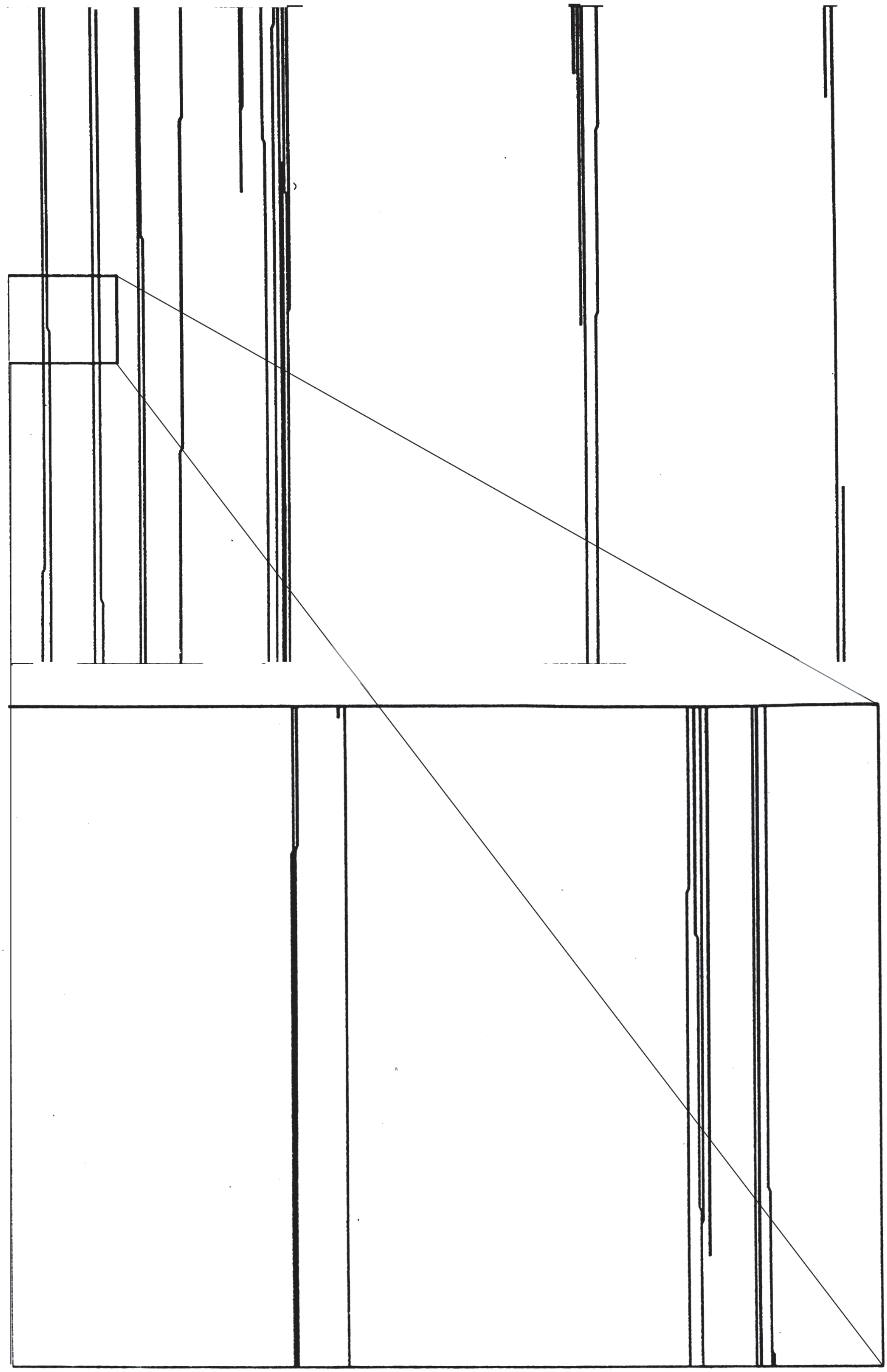


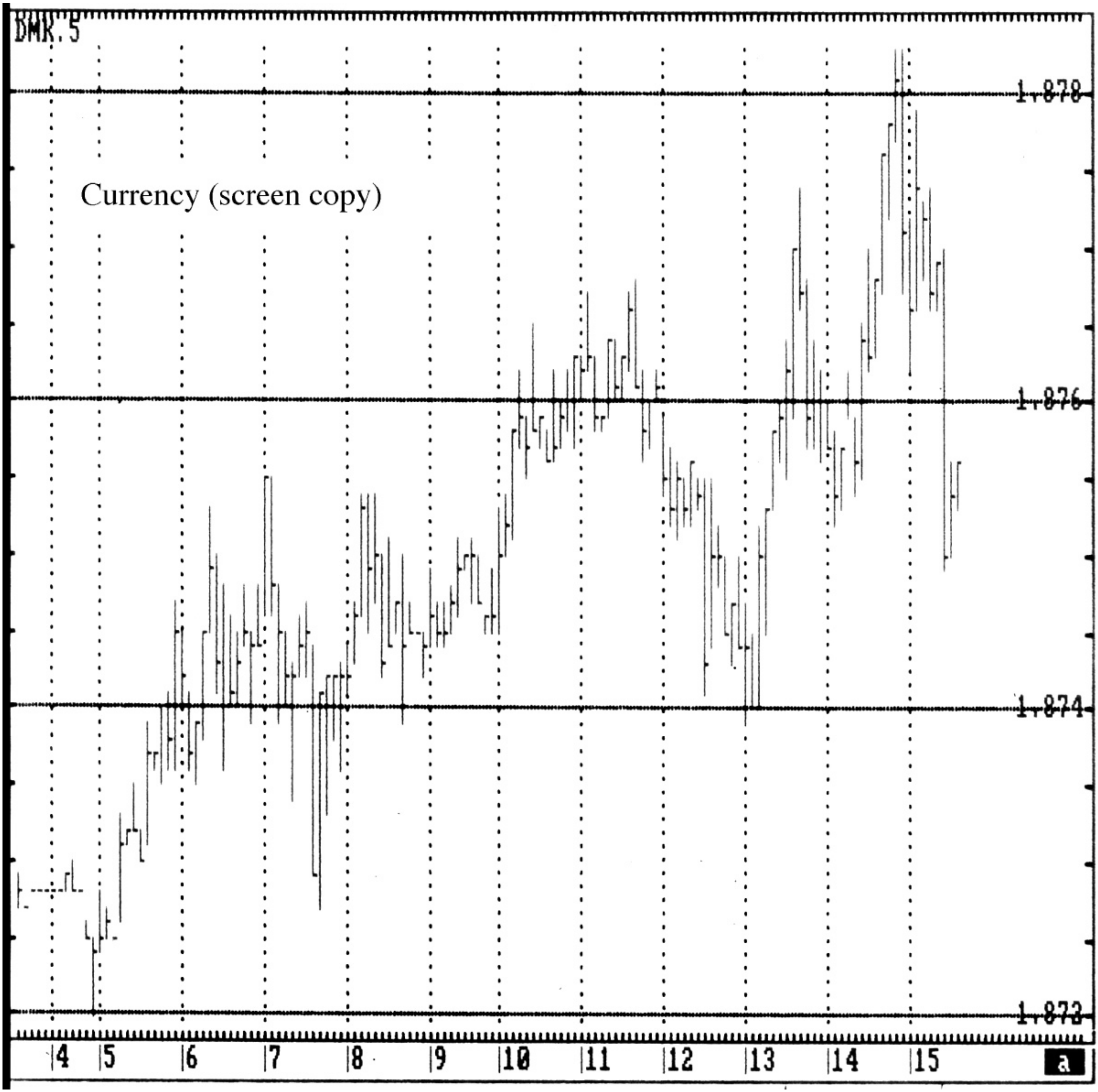












DMK.5
Currency (screen copy)
1.878
1.876
1.874
1.873
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
a

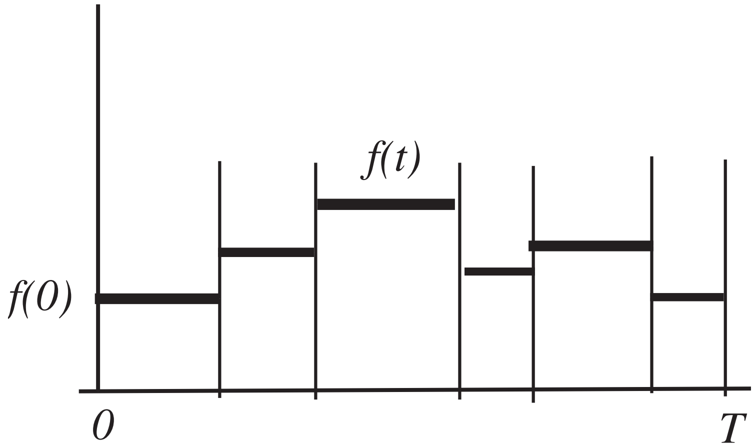
• **L'intégrale stochastique comme bénéfice du trader**

(cas du modèle de Bachelier mais c'est très général)
l'actif est B_t

instant 0	**instant 1**	**bénéfice**
achat d'une unité	**vente d'une unité**	$B_1 - B_0$
achat de $f(0)$ **unités**	**vente de** $f(0)$ **unités**	$f(0)(B_1 - B_0)$

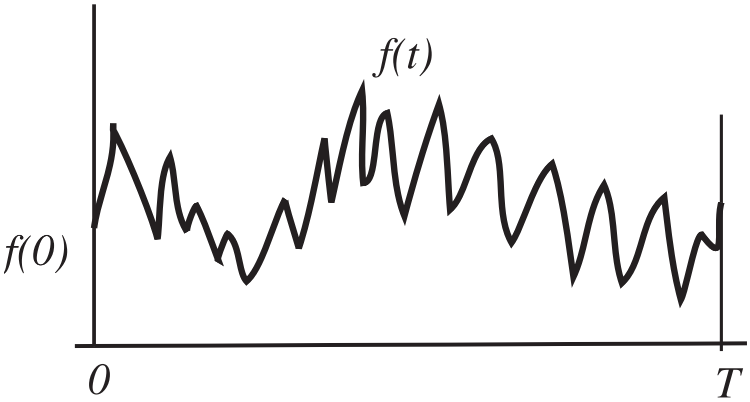
instant 0	**achats et ventes**	**vente finale**	**bénéfice**
achat de $f(0)$	$f(t_n)$ **sur** (t_n, t_{n+1})		$\sum_n f(t_n)(B_{t_{n+1}} - B_{t_n})$

• **L'intégrale stochastique comme bénéfice du trader**



$$\textbf{bénéfice} = \sum_n f(t_n)(B_{t_{n+1}} - B_{t_n}) = \int_0^T f(t)\,dB_t$$

- **L'intégrale stochastique comme bénéfice du trader**



$$\textbf{bénéfice} = \int_0^T f(t)\, dB_t \quad \textbf{(intégrale de Wiener(1930))}$$

intégrale de Wiener $\neq$ **intégrale de Riemann**

$\neq$ **intégrale de Lebesgue**

• **L'intégrale stochastique d'Ito (1950-...)**

f **déterministe** $\mapsto$ f **aléatoire adaptée (= non-anticipante)**

$dB_t \qquad \mapsto \quad dS_t$

où S_t **est une "semi-martingale" processus très généraux qui vérifient un calcul différentiel particulier le** *calcul d'Ito*

Formule d'Ito

$$F(B_t) = F(0) + \int_0^t F'(B_s)\, dB_s + \frac{1}{2}\int_0^t F''(B_s)\, ds$$

$$F(S_t) = F(0) + \int_0^t F'(S_s)\, dS_s + \frac{1}{2}\int_0^t F''(S_s)\, d < S, S >_s$$

• **Modèles d'actifs**

- modèle de Black-Scholes (1973)

La semi-martingale est donnée par

$$dS_t = \sigma S_t \, dB_t + \mu S_t \, dt$$

solution explicite :

$$S_t = S_0 e^{\sigma B_t + (\mu - \frac{\sigma^2}{2})t}$$

- modèles de diffusion

- modèles markoviens avec sauts

- modèles non markoviens

Résumé de la 1ère partie

Si le cours de l'actif à l'instant t est S_t le bénéfice du trader qui a constitué un portefeuille avec $f(t)$ actifs durant l'intervalle $0 \leq t \leq T$ puis l'a vendu à l'instant T est toujours

$$\int_0^T f(t)\, dS_t$$

ici $f(t)$ est une fonction aléatoire quelconque non-anticipante

S_t est un processus très général (semi-martingale)

$$\int_0^T f(t,\omega)\, dS_t(\omega)$$

(dans cette partie on a pris un taux d'actualisation égale à 1 pour simplifier)

II. LA COUVERTURE DES OPTIONS : UNE NOUVELLE LOGIQUE DE GESTION DES RISQUES

- **Les travaux de Bachelier, de Wiener et d'Ito furent ignorés**

- **Options et produits dérivés**

  - option

  - option d'achat ou *call*

  - exemple du jus d'orange

- 1ere question : le prix d'une option ?

- 2eme question : gestion d'une option ?

- **Marchés organisés**

- Chicago Board of Trade (1848) (céréales)
- Chicago Mercantile Exchange (1874)
- Paris 1884 options sur le sucre

- LIFFE Londres 1982
- SIMEX singapour 1984
- TIFFE Tokyo 1985
- MATIF Paris 1986
- DTB Francfort 1990

- en 2000 Paris+Amsterdam+Bruxelles = EURONEXT
- en 2002 EURONEXT achète le LIFFE et la BVLP (Portugal)

Pourquoi un tel développement ?

- Marchés organisés

- Chicago Board of Trade (1848) (céréales)
- Chicago Mercantile Exchange (1874)
- Paris 1884 options sur le sucre

- LIFFE Londres 1982
- SIMEX singapour 1984
- TIFFE Tokyo 1985
- MATIF Paris 1986
- DTB Francfort 1990

  - en 2000 Paris+Amsterdam+Bruxelles = EURONEXT
  - en 2002 EURONEXT achète le LIFFE et la BVLP (Portugal)

Pourquoi un tel développement ?

A cause des nouvelles idées sur la couverture des risques financiers :

Si le cours de l'actif à l'instant t est S_t
et si une grandeur aléatoire H peut s'écrire

$$H = k + \int_0^T h(t)\, dS_t$$

alors l'avantage de disposer de H à l'instant T a un juste prix aujourd'hui et ce prix est k.

par exemple pour un call $H = (S_T - K) \vee 0$ (noté aussi $(S_T - K)^+$)

C'est le raisonnement par absence d'arbitrage

• **Mise en oeuvre concrète**

- cas Black-Scholes : un seul paramètre intervient : *la volatilité* σ **agitation de l'actif** S_t

Tout actif conditionnel, toute option européenne, américaine, exotique, etc. H *est de la forme*

$$H = k + \int_0^T h(t)\,dS_t$$

le marché est dit *complet***.**

les formules sont explicites pour trouver k **et** $h(t)$ **à partir de** H **on n'a qu'à résoudre une équation différentielle elliptique en dimension 2.**

• **Pour les modèles où** S_t **est une diffusion les résultats sont similaires seuls les calculs sont un peu plus lourds**

• **Pour d'autres modèles (avec sauts ou à volatilité stochastique) le marché est incomplet et la couverture de certaines options laissent un risque résiduel.**

• meilleure estimée rationnelle et principe de couverture

methode classique
d'evaluation d'un actif
$\mathbb{E}[H]$
ou $\mathbb{E}[H|\mathcal{F}_t]$

ici c'est different
l'option est une assurance
mais elle est geree
client par client

rationalite d'experts
(agences d'evaluation)

rationalite de marche
domaine public

"les fondamentaux
sont la realite economique
sous jacente".
"Les marches sont capricieux"

"les prix sont ceux du marche"
"les interprétations de
politique economique
sont subjectives"

III.TROIS TYPES DE SPECULATION

- **La spéculation économique**

  = prise de position à terme

  $\Longrightarrow$ **échange de risque : cas d'une récolte vendue au printemps**

- **La spéculation psychologique**

- **La spéculation mathématique**

Retour sur la question de l'introduction

On sait par une analyse du type moyenne-variance que les situations de forte incertitude peuvent rapporter davantage et que l'information se dégrade par auto-référence : on préfére avoir peur que de vérifier soi-même les sources (D'où le slogan célébre "acheter la rumeur vendre le fait" qui est un principe de spéculation fondé sur l'efficacité des rumeurs). Ces comportements avaient été déjà notés par Keynes.

Les raisonnements par absence d'arbitrage sont parfaitement convaincants pour ce qui est de l'agissement d'un agent individuel dans un marché existant mais ils ne nous renseignent pas sur la façon qu'a le marché lui-même d'obtenir l'information économique pertinente. La gestion des risques par portefeuille simulant telle que nous l'avons exposée ci-dessus renforce le fait que les marchés financiers sont très fortement *autoréférentiels.* Ceci est une des causes des instabilités globales et cela va dans le sens d'une moins bonne allocation des ressources.

Si un agent économique est prêt à faire un investissement qui fait intervenir des actions d'entreprises cotées et des devises, il a deux façons de faire. Soit il se fie exclusivement au marché qui grâce à ses cotations d'actions, de devises, de matières premières et de produits à terme relatifs à tous ces actifs lui donne apparemment toute l'information sur les incertitudes du projet. Soit il dépense un budget spécifique pour s'enquérir lui-même de la rentabilité de l'affaire dans laquelle il entend s'impliquer ainsi que ses incertitudes. Cette seconde méthode est "l'ancienne logique économique" qui était la principale façon de faire avant les années 1970, qui consistait à utiliser des experts pour étudier les projets et des ingénieurs pour évaluer les chances de réussites des innovations des entreprises. Cette méthode est plus chère que la première qui est gratuite. Mais elle ne fabrique pas l'information de la même manière. Les deux voies sont d'autant plus différentes que la volatilité est grande.

Pour l'investisseur ne pas utiliser uniquement le marché fournit une information de meilleure qualité. Pourquoi ? Parce qu'elle peut tenir compte de facteurs que le marché ignore, par exemple les liens d'intérêts entre l'investisseur et la région géographique concernée ou encore les catégories de biens dont il est question dans le projet, enfin la qualité des hommes qui pilotent compte tenu des informations recueillies, etc.

Bibliographie

Lamberton D. et Lapeyre B., *Introduction au calcul stochastique appliquée à la finance* Ellipses 1992.

Bouleau N. *Martingales et marchés financiers*, O. Jacob 1998.