Suite de points d'un espace de Hilbert distribuée selon la promesure gaussienne canonique

Nicolas BOULEAU

Résumé: On montre que dans un espace de Hilbert réel séparable H, il existe une suite a_n telle que pour tout $b \in H$ la suite réelle (b, a_n) soit répartie selon la probabilité $N(0, |b|^2)$. La méthode utilise une linéarisation du problème par développement sur l'espace de Fock de H. Ce résultat est appliqué à l'espace de Cameron-Martin d'un espace de Wiener.

Sequence of points in a Hilbert space distributed according to the canonical cylindrical Gaussian measure

Abstract: We show that there exists in every separable real Hilbert space a sequence a_n such that for all $b \in H$ the real sequence (b, a_n) be distributed according to the probability measure $N(0, |b|^2)$. The method uses a linearization by expansion on the Fock space of H. This result is applied to the Cameron-Martin space of a Wiener space.

I. Introduction. Soit H un espace de Hilbert réel séparable de produit scalaire $(.,.)$ et de norme $|.|$. On veut montrer l'existence d'une suite $(a_n)_{n\geq 1}$, $a_n \in H$, telle que

$$(1) \qquad \forall b \in H \ \forall u \in \mathbb{R} \qquad \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} e^{iu(b,a_n)} = e^{-\frac{u^2}{2}|b|^2}$$

En développant les exponentielles sur l'espace de Fock, on est ramené à montrer

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(iu)^m}{m!} < \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} a_n^{\otimes m} - z_m \ , \ b^{\otimes m} >= 0.$$

Cependant la quantité z_m qui doit être introduite dans cette formule n'est pas dans $H^{\otimes m}$ et une opération de troncature est nécessaire pour donner un sens dans cette expression au crochet $< .,. >$. Cette étape étant franchie, on est ramené à montrer que

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(iu)^m}{m!} < \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} a_n^{\otimes m} - z_{n,m} \ , \ b^{\otimes m} >= 0$$

où $z_{n,m} \in H^{\otimes m}$ est convenablement défini. Cette convergence est obtenue en montrant une convergence faible sur l'espace de Fock équipé d'une structure hilbertienne convenable, et celle-ci résulte du choix de la suite (a_n) et d'un résultat de convergence de martingale vectorielle.

II. Démonstration du résultat principal.

Nous introduisons la notation z_m par le lemme suivant:

Lemme 1 *Soit $(g_n)_{n\geq 0}$ une suite i.i.d. de gaussiennes réduites. On définit une application z_m de $\mathbb{N}^m$ dans $\mathbb{R}$ $(m \geq 1)$ en posant*

$$z_m(i_1,\ldots,i_m) = \mathbf{E}[g_{i_1}\ldots g_{i_m}].$$

Alors $z_m(i_1,\ldots,i_m) = 0$ si m est impair et $\forall b \in l^2$ $\forall k \in \mathbb{N}^*$

$$\frac{(2k)!}{2^k k!}|b|^{2k} = \sum_{i_1,\ldots,i_{2k}} b_{i_1}\ldots b_{i_{2k}}\ z_{2k}(i_1,\ldots,i_{2k}).$$

Ce lemme s'obtient en calculant terme à terme le développement de la fonction caractéristique de la variable aléatoire gaussienne $B = b_1 g_1 + \ldots + b_n g_n + \ldots$ de variance $|b|^2$.

Nous raisonnons en supposant $H = l^2$, nous noterons $H^{\odot m}$ le produit tensoriel algébrique et $H^{\otimes m}$ le produit tensoriel complété. On a

$$e^{iu(b,a_n)} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(iu)^m}{m!}(b,a_n)^m = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(iu)^m}{m!} < b^{\otimes m}, a_n^{\otimes m} >_{H^{\otimes m}} \tag{2}$$

$$e^{-\frac{u^2}{2}|b|^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(iu)^{2k}}{(2k)!}\frac{(2k)!}{2^k k!}|b|^{2k}$$

donc d'après le lemme 1,

$$\begin{aligned} e^{-\frac{u^2}{2}|b|^2} &= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(iu)^{2k}}{(2k)!} \sum_{i_1,\ldots,i_{2k}} b_{i_1}\ldots b_{i_{2k}}\ z_{2k}(i_1,\ldots,i_{2k}) \\ &= 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(iu)^m}{m!} \prec b^{\otimes m}, z_m \succ \end{aligned} \tag{3}$$

où z_m est l'application de $\mathbb{N}^m$ dans $\mathbb{R}$ introduite au lemme 1 qui définit un élément de $(H^{\odot m})^*$ et$\prec .,. \succ$ désigne la dualité entre $H^{\odot m}$ et $(H^{\odot m})^*$.

On suppose dorénavant que la suite des points $a_n = (a_{n,k})_{k\in\mathbb{N}} \in H$ est telle que $\forall n \quad a_{n,k} = 0 \quad \text{si} \quad k > \varphi(n)$ où φ est une fonction croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ telle que $\lim_{n\to\infty}\varphi(n) = +\infty$ et qui sera choisie ultérieurement.

On définit l'application $z_{n,m}$ de $\mathbb{N}^m$ dans $\mathbb{R}$ par

$$(z_{n,m})_{i_1,\ldots,i_m} = z_m(i_1,\ldots,i_m)1_{\{i_1\leq\varphi(n)\}}\ldots 1_{\{i_m\leq\varphi(n)\}}.$$

Lemme 2

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(iu)^m}{m!} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \prec b^{\otimes m}, z_{n,m} - z_m \succ = 0$$

Démonstration. On a

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{(iu)^m}{m!} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \prec b^{\otimes m}, z_{n,m} - z_m \succ =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(iu)^{2k}}{(2k)!} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \left[\sum_{i_1,\ldots,i_{2k}} b_{i_1}\ldots b_{i_{2k}}\ z_{2k}(i_1,\ldots,i_{2k}) 1_{\{\exists j\in\{1,\ldots,2k\}: i_j > \varphi(n)\}} \right].$$

Le terme entre les crochets [.] est une somme de termes positifs et

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{(iu)^{2k}}{(2k)!}\right|\sum_{i_1,\ldots,i_{2k}} b_{i_1}\ldots b_{i_{2k}}\; z_{2k}(i_1,\ldots,i_{2k}) = e^{\frac{u^2}{2}|b|^2}-1.$$

donc le théorème de convergence dominée s'applique et comme

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} 1_{\{\exists j\in\{1,\ldots,2k\}: i_j>\varphi(n)\}} \to 0$$

quand $N\to\infty$ pour $i_1,\ldots,i_{2k}$ fixés, le lemme est établi.

D'après les relations (2) et (3) et le lemme 2, on est ramené à établir

$$\lim_{N\to\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(iu)^m}{m!}\prec b^{\otimes m}, \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}(a_n^{\otimes m}-z_{n,m})\succ = 0. \tag{4}$$

Maintenant $z_{n,m}\in H^{\otimes m}$ et le crochet peut être pris au sens de $H^{\otimes m}$. Nous écrivons (4) sous la forme

$$\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\lambda^m}{(2m)!} < \frac{(2m)!}{m!\lambda^m}(iub)^{\otimes m}\ ,\ \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}(a_n^{\otimes m}-z_{n,m}) >_{H^{\otimes m}} . \tag{5}$$

L'espace

$$F_\lambda = \left\{ y\in\prod_{m=1}^{\infty} H^{\otimes m}\ :\ \sum_{m=1}^{\infty}\frac{\lambda^m}{(2m)!}|y_m|^2_{H^{\otimes m}} < +\infty\right\}$$

est un espace de Hilbert pour le produit scalaire

$$< x,y >_{F_\lambda} = \sum_{m=1}^{\infty}\frac{\lambda^m}{(2m)!} < x_m, y_m >_{H^{\otimes m}} .$$

et la suite $\left(\frac{(2m)!}{m!\lambda^m}(iub)^{\otimes}\right)_{m\geq 1}$ appartient à F_λ dès que

$$2|u|\,|b| < \sqrt{\lambda} \tag{6}$$

Définissons $y^N = (y_m^N)_{m\geq 1}$ par

$$y_m^N = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}(a_n^{\otimes m}-z_{n,m}).$$

Si la suite a_n est choisie de sorte que $y^N\in F_\lambda\ \forall N$, la relation (4) sera établie pour u et b vérifiant (6) si $y^N\to_{N\to\infty} 0$ pour la topologie $\sigma(F_\lambda,F_\lambda)$ donc si $y^N\to 0$ dans F_λ.

Choix de la suite (a_n). Considérons la suite aléatoire $\xi=(\xi_n)\quad \xi_n\in H=l^2$ définie par

$$\xi_n = (\xi_{n,k})_{k\geq 0}\quad \xi_{n,k} = g_{n,k}1_{\{k\leq\varphi(n)\}}$$

où $g_{n,k}$ est une suite double de variables gaussiennes réduites indépendantes.Nous allons montrer qu'on peut prendre pour (a_n) la suite $(\xi_n(\omega))$ pour presque tout ω. Considérons d'abord la suite aléatoire $\eta_n = (\eta_{N,m})_{m\geq 1}$ définie par

$$\eta_{N,m} = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n}(\xi_n^{\otimes m} - z_{n,m})$$

Autrement dit, posant

$$\begin{aligned} \underline{\xi}_n &= (\xi_n, \ldots, \xi_n^{\otimes m}, \ldots) \\ \zeta_n &= (z_{n,1}, \ldots, z_{n,m}, \ldots) \end{aligned}$$

on a

$$\eta_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n}(\underline{\xi}_n - \zeta_n).$$

Il résulte des estimations du lemme 3 ci-dessous qu'on peut choisir la fonction φ indépendamment de λ de sorte que η_N soit une variable aléatoire à valeurs F_λ et que $\sup_N \mathbf{E}[\|\eta_N\|_{F_\lambda}^2] < +\infty$. La martingale η_N converge donc dans F_λ p.s. et donc par le lemme de Kronecker la suite

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}(\underline{\xi}_n - z_n)$$

converge vers zéro dans F_λ p.s. Prenant une suite de valeurs de λ tendant vers $+\infty$, ceci établit que presque tout tirage de la suite $\underline{\xi}_n$ vérifie (1) et convient donc pour la suite a_n.

Lemme 3 *La fonction φ peut être choisie de sorte que* $\forall\lambda \ \ \sup_N \mathbf{E}[\|\eta_N\|_{F_\lambda}^2] < +\infty$

Démonstration. On a

$$\mathbf{E}(\|\eta_N\|_{F_\lambda}^2) = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2}\mathbf{E}\|\underline{\xi}_n - z_n\|_{F_\lambda}^2.$$

Par ailleurs

$$\|\underline{\xi}_n - z_n\|_{F_\lambda}^2 = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\lambda^m}{(2m)!} \sum_{i_1,\ldots,i_m} (\xi_{n,i_1}\ldots\xi_{n,i_m} - (z_{n,m})_{i_1,\ldots,i_m})^2$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\lambda^m}{(2m)!} \sum_{i_1,\ldots,i_m} (g_{n,i_1}\ldots g_{n,i_m} - z_m(i_1,\ldots,i_m))^2 1_{\{i_1\leq\varphi(n),\ldots,i_m\leq\varphi(n)\}}$$

donc par le lemme 1

$$\mathbf{E}\|\underline{\xi}_n - z_n\|_{F_\lambda}^2 = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\lambda^m}{(2m)!} \sum_{\substack{i_1 \leq \varphi(n) \\ \vdots \\ i_m \leq \varphi(n)}} var(g_{n,i_1}\ldots g_{n,i_m}).$$

Si X est une variable gaussienne réduite il résulte de l'inégalité élémentaire $\mathbf{E}X^{2p}\mathbf{E}X^{2q} \leq \mathbf{E}X^{2(p+q)}$ que

$$var(g_{n,i_1}\ldots g_{n,i_m}) \leq \mathbf{E}[g_{n,i_1}^2\ldots g_{n,i_m}^2] \leq \mathbf{E}X^{2m}$$

donc

$$\mathbf{E}\|\underline{\xi}_n - z_n\|^2_{F_\lambda} \leq \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\lambda^m}{(2m)!}\mathbf{E}[X^{2m}]\varphi(n)^m.$$

Ainsi

$$\mathbf{E}(\|\eta_N\|^2_{F_\lambda}) \leq \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2}\mathbf{E}\exp(\sqrt{\lambda\varphi(n)}|X|) \leq \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2}e^{\frac{\lambda\varphi(n)}{2}}$$

et la série est convergente si par exemple on prend $\varphi(n) = (\log\log n)^+$.

III. Application à l'espace de Wiener.

La propriété (1) se renforce d'elle même en

$$(7) \qquad \left\{ \begin{array}{c} \forall k \in \mathbb{N}^*, \ \forall \mathbf{b} = (b_1, \ldots, b_k) \in H^k \\ \text{la suite } ((b_1, a_n), \ldots, (b_k, a_n))_{n\geq 1} \text{ de } \mathbb{R}^k \text{ est répartie selon} \\ \text{la mesure } N(0, \Sigma) \text{ où } \Sigma \text{ est la matrice } (\mathbf{b}, \mathbf{b}^t). \end{array} \right.$$

On en déduit sur l'espace de Wiener avec des notations courantes (cf [1])

Corollaire 1 *Il existe une suite $(x_n)_{n\geq 1}$ de points de $L^2(\mathbb{R}_+)$ telle que*

$$\forall k \in \mathbb{N}^* \ \forall F \in C_b(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}) \ \forall h_1, \ldots, h_k \in L^2(\mathbb{R}_+)$$

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} F(\int_0^\infty h_1(s)x_n(s)ds, \ldots, \int_0^\infty h_k(s)x_n(s)ds)$$
$$= \mathbf{E}[F(\int_0^\infty h_1(s)dB_s, \ldots, \int_0^\infty h_k(s)dB_s)].$$

Bibliographie

[1] N. Bouleau et F. Hirsch, *Dirichlet forms and analysis on Wiener space*, de Gruyter (1991)

N. BOULEAU
Laboratoire de Mathématiques Appliquées
ENPC La Courtine
93167 Noisy-le-Grand cedex
FRANCE