

# Viscoelasticity and Lévy processes

## Visco-élasticité et Processus de Lévy

Nicolas BOULEAU

*Ecole des Ponts, ParisTech.*

**Abstract** We show that the linear viscoelastic materials, and more generally the physical phenomena to which Biot's relaxation theory is relevant, can be put in correspondance with the laws of processes with independent increments.

In the one dimensional case this correspondance is one to one with subordinators and gives rise naturally to a conjugation relation on subordinators.

**MSC:** 73Fxx, 60J30, 47D07

**Key words:** viscoelasticity, thermodynamics, rheology, Bernstein functions, Lévy processes, conjugation

### PRESENTATION

Certaines équations de la physique et les problèmes aux limites associés admettent une interprétation probabiliste. C'est le cas de l'équation de la chaleur associée au mouvement brownien, ou des équations elliptiques linéaires du second ordre associées aux processus de diffusion, ou encore des opérateurs linéaires intégro-différentiels vérifiant le principe du maximum positif auxquels sont associés des processus de Markov avec sauts. Ceci est étudié par la théorie probabiliste du potentiel (cf par exemple [4], [11], [12]). Le cas discontinu est une extension mathématique du cas continu et correspond à des problèmes non locaux plus rarement rencontrés par l'ingénieur. De nombreuses autres équations (cf [14]) possèdent aussi maintenant des interprétations probabilistes.

Nous montrons ici que les phénomènes viscoélastiques linéaires sont susceptibles d'une interprétation probabiliste par des processus discontinus. Cette interprétation est analogue aux précédentes, en ce sens, que les grandeurs physiques y apparaissent comme l'espérance de fonctionnelles du processus. Néanmoins, ici le temps qui régit le mouvement de la particule probabiliste n'est pas le temps qui régit le phénomène physique (comme c'est le cas lorsqu'on associe au semigroupe de la chaleur un mouvement brownien). Par ailleurs, cette correspondance peut être faite de deux façons qui sont duales et ceci conduit à dégager la notion de couple conjugué. La présente rédaction est une version détaillée de [6].

Une fonction  $\phi : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  est une fonction de Bernstein si  $\phi$  est  $C^\infty$ ,  $\phi \geq 0$  et  $(-1)^n D^n \phi \leq 0 \quad \forall n \geq 1$ . Ces fonctions interviennent dans la caractérisation des semi-groupes de convolution de probabilités sur  $\mathbb{R}_+$  avec lesquels elles sont en correspondance biunivoque (cf [1]) ainsi donc

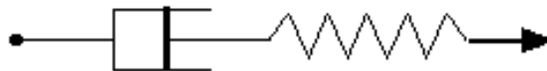
qu'avec les processus à accroissements indépendants croissants ou subordonateurs. Ces fonctions forment un cône stable par composition dont la structure est assez complexe (cf [7], [8]). Elles interviennent aussi, ceci est corrélatif, dans la théorie du calcul symbolique sur les générateurs infinitésimaux de semi-groupes de Markov (cf [1], [15], [18]).

Il est remarquable que ce soit exactement cette classe de fonctions qui intervienne dans les phénomènes de relaxation tels que la viscoélasticité linéaire qui sont régis par une mathématique *a priori* sans rapport avec les objets précédents mais qui se trouve mise en connexion avec eux par le raisonnement par variables cachées. Plus précisément: Les phénomènes de relaxation tels que la viscoélasticité linéaire sont décrits par des opérateurs dissipatifs et sont donc liés d'après le théorème de Lumer-Phillips ([23] p.250) à des semi-groupes à contraction mais ces semi-groupes n'ont aucune interprétation probabiliste en général car ils n'opèrent pas positivement sur les fonctions; dans cette situation c'est le raisonnement par variables cachées qui fait apparaître des objets liés à des semi-groupes de Markov.

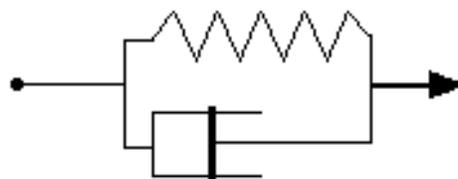
## 1 Thermodynamique et viscoélasticité

### 1.1 Notations

Les modèles visco-élastiques les plus simples sont les modèles de Maxwell (pour un liquide visco-élastique):



et de Kelvin-Voigt (pour un solide visco-élastique):



Lorsqu'un tel système est soumis à une force dépendant du temps  $Q(t)$ , la déformation  $q(t)$  qui en résulte dépend linéairement de  $Q$  et si les propriétés du corps ne varient pas avec le temps cette transformation est connue si on connaît la réponse pour l'impulsion unité appelée *réponse impulsionnelle*  $f(t)$  du système dont la réponse générale est alors

$$q(t) = \int_{[0,t]} f(t - \tau) dQ(\tau).$$

Pour un modèle de Maxwell on a

$$\dot{q} = \frac{\dot{Q}}{G} + \frac{Q}{\eta}$$

où  $G$  est la raideur du ressort et  $\eta$  la viscosité de l'amortisseur, et donc

$$f(t) = \left(\frac{1}{G} + \frac{t}{\eta}\right) \mathbf{1}_{\{t \geq 0\}}.$$

Par ailleurs on peut au contraire imposer une déformation au système et mesurer la force qui assure l'équilibre. Pour une déformation qui passe de 0 à 1 à l'instant 0 puis ne varie plus, la force mesurée est la *fonction de relaxation*  $r(t)$  du système dont la réponse générale est alors

$$Q(t) = \int_{[0,1]} r(t - \tau) dq(\tau)$$

pour le modèle de Maxwell  $r(t) = Ge^{-\frac{G}{\eta}t} \mathbf{1}_{\{t \geq 0\}}$ .

## 1.2 Limitations imposées par la thermodynamique

Les restrictions que la thermodynamique des phénomènes irréversibles impose aux phénomènes viscoélastiques ont été étudiés et dégagés par plusieurs auteurs parfois indépendamment (cf [13] [21] [2] [9] [16] [20]). Nous nous plaçons sous les hypothèses de la théorie de Biot [2] et de même que celle-ci les considérations qui suivent peuvent s'appliquer à d'autres phénomènes physiques (électriques ou chimiques) pourvu que les hypothèses (Principe d'Onsager, existence de variables normales, linéarité) soient acceptables au moins en première approximation. Pour la commodité, nous emploierons le langage de la mécanique des solides (cf [20]).

Soit un système soumis à des forces généralisées  $Q_i, i = 1, \dots, n$  et décrit par des paramètres géométriques associés  $q_i, i = 1, \dots, n$  tels que le travail des forces extérieures, s'écrive  $\sum_{i=1}^n Q_i dq_i$ .

Au voisinage d'une position d'équilibre stable où l'on a pris  $q_i = 0 \ \forall i$ , le potentiel thermodynamique du système s'écrit :

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i,j} a_{ij} q_i q_j$$

où la matrice  $(a_{ij})$  est symétrique semi-définie positive (le terme stable est pris au sens large). En calculant la variation d'entropie durant un court intervalle de temps (cf [16] chapitre 13) on obtient, pour des vitesses  $q_i$  supposées petites et en négligeant les forces d'inertie, que la puissance dissipée peut s'écrire :

$$D = \frac{1}{2} \sum_{i,j} b_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j$$

où la matrice  $(b_{ij})$  est symétrique d'après le principe d'Onsager et semi-définie positive par le second principe de la thermodynamique. L'équation d'évolution est alors:

$$\frac{\partial D}{\partial \dot{q}_i} + \frac{\partial W}{\partial q_i} = Q_i$$

soit

$$(1) \quad Q_i = \sum_j a_{ij} q_j + b_{ij} \dot{q}_j$$

Le cas de la viscoélasticité linéaire est celui où les coefficients  $(a_{ij})$  et  $(b_{ij})$  sont constants. Dans ce cas, la relation linéaire entre les histoires des forces  $(Q_i(t))$  et celles des paramètres

$(q_j(t))$  commute avec les translations du temps et est connue par la réponse impulsionnelle  $f_{ij}(t)$  du paramètre  $q_i$  à la force  $Q_j$ .

Ecrivons l'équation (1) sous la forme

$$(2) \quad Aq + B\dot{q} = Q$$

où  $A$  et  $B$  sont des matrices  $n \times n$  symétriques semi-définies positives et supposons d'abord que  $B$  est définie positive. Considérons sur  $\mathbb{R}^n$  la structure euclidienne associée à  $B$  dont le produit scalaire est

$$(u, v)_B = \langle u, Bv \rangle = {}^t u B v$$

( $\langle \cdot, \cdot \rangle$  étant le produit scalaire usuel sur  $\mathbb{R}^n$ ). Pour cette nouvelle structure euclidienne l'opérateur  $B^{-1}A$  est auto-adjoint:

$$(u, B^{-1}Av)_B = \langle u, Av \rangle = \langle Au, v \rangle = (v, B^{-1}Au)_B$$

Donc il existe une base  $B$ -orthonormale  $(\psi_k)_{k=1, \dots, n}$  sur laquelle  $B^{-1}A$  est diagonale, c'est à dire

$$(\psi_j, B^{-1}A\psi_k)_B = \langle \psi_j, A\psi_k \rangle = \begin{cases} 0 & \text{if } j \neq k \\ \lambda_k \geq 0 & \text{if } j = k \end{cases}$$

$$(\psi_j, \psi_k)_B = \langle \psi_j, B\psi_k \rangle = \begin{cases} 0 & \text{if } j \neq k \\ 1 & \text{if } j = k \end{cases}$$

en particulier

$$A\psi_k - \lambda_k B\psi_k = 0 \quad \forall k.$$

Soit  $\hat{q}(\theta)$  [resp.  $\hat{Q}(\theta)$ ] la transformée de Laplace de  $q(t)$  [resp.  $Q(t)$ ] ( $\hat{q}(\theta) = \int_0^\infty e^{-\theta t} q(t) dt$ ).

L'équation (2) donne

$$(3) \quad (A + \theta B)\hat{q} = \hat{Q}.$$

Donc, si  $\hat{q}(\theta)$  est représentée sur la base  $(\psi_k)$ ,

$$(4) \quad \hat{q}(\theta) = \sum_{k=1}^n \xi_k(\theta) \psi_k$$

on a

$$(\lambda_k + \theta)\xi_k = (\hat{Q}, \psi_k)_B.$$

Si nous supposons maintenant que seulement  $m$  des  $n$  paramètres ( $m < n$ ) sont observables, i.e. if  $\hat{Q} = (\hat{Q}_1, \dots, \hat{Q}_m, 0, \dots, 0)$  il vient

$$\xi_k = \frac{1}{\lambda_k + \theta} \sum_{j=1}^m \hat{Q}_j (B\psi_k)_j$$

et par (4)

$$\hat{q}_i = \sum_{j=1}^m \hat{Q}_j \left[ \sum_{k=1}^n \frac{1}{\lambda_k + \theta} (B\psi_k)_j \psi_{ki} \right].$$

Ainsi, désignant par  $f_{ij}(t)$  the réponse de  $q_i$  à l'impulsion unité de  $Q_j$ , on a

$$\hat{f}_{ij} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\lambda_k + \theta} \psi_{k_j} (B\psi_k)_j \psi_{ki}$$

et donc

$$f_{ij}(t) = \sum_{k=1}^n \int_0^t e^{-\lambda_k s} ds J_{ij}^{(k)}.$$

On voit facilement que si des hypothèses plus larges sont prises sur la matrice  $B$  autorisant des valeurs propres nulles ou infinies, on obtient la forme plus générale

$$(5) \quad f_{ij}(t) = \sum_{k=1}^n (1 - e^{-\lambda_k t}) J_{ij}^{(k)} + tL_{ij} + K_{ij}$$

où les matrices  $(J^{(k)})_{k=1, \dots, n}$ ,  $L, K$  sont symétriques semi-définies positives.

Partant de l'équation (5) et passant à la limite on obtient que les réponses impulsionnelles des systèmes visco-élastiques sont dans le cas d'un seul paramètre observable

$$(6) \quad f(t) = \int_{\mathbb{R}_+^*} (1 - e^{-\lambda t}) \nu(d\lambda) + bt + c$$

où  $\nu$  est une mesure  $\sigma$ -finie positive on  $\mathbb{R}_+^* = ]0, \infty[$  telle que  $\int_0^\infty \frac{x}{1+x} d\nu(x) < +\infty$ , et  $b \geq 0$ ,  $c \geq 0$ ;

et dans le cas de  $m$  paramètres observables de la forme

$$(7) \quad f_{ij}(t) = \int_{\mathbb{R}_+^*} (1 - e^{-\lambda t}) \nu_{ij}(d\lambda) + tL_{ij} + K_{ij},$$

où  $\nu = (\nu_{ij})$  est une matrice semi-définie positive de mesures  $\sigma$ -finies sur  $\mathbb{R}_+^*$  satisfaisant

$$\int_{\mathbb{R}_+^*} \frac{x}{1+x} d|\nu_{ij}|(x) < +\infty \quad \forall i, j = 1, \dots, n$$

et où les matrices  $L$  and  $K$  sont symétriques semi-définies positives.

Ce passage à la limite peut se faire selon des arguments physiques, en prenant l'ensemble des limites simples des fonctions de la forme (5), ou en considérant un continu visco-élastique, les matrices  $A$  et  $B$  étant remplacées par des opérateurs auto-adjoints non bornés sur un espace de Hilbert. Alors l'argument ci-dessus s'étend et donne directement les formes (6) et (7) par la représentation spectrale des opérateurs auto-adjoints.

Réciproquement, les systèmes caractérisés par (7) vérifient les exigences de la thermodynamique et de la stabilité (cf [20] annexe XXI-20 ou [16] chapitre 13).

**Remarque.** Dans le cas d'un seul paramètre observable (6) montre que la réponse impulsionnelle générale est une fonction de Bernstein. *Il est donc faux de croire (comme il est écrit dans certains manuels) que le groupement en parallèle d'une suite infinie de modèles de Maxwell (ou le groupement en série d'une suite infinie de modèles de Kelvin-Voigt) donne le modèle rhéologique visco-élastique général, de même que les mesures discrètes ne sont pas les mesures générales.* On perd en particulier tous les modèles où la mesure  $\nu$  est absolument continue. Ainsi, de nombreux modèles sont analytiquement calculables qui ne correspondent pas à des groupements d'amortisseurs et de ressorts.

## 2 Processus à Accroissements Indépendants Stationnaires

Pour la commodité de la suite, tous les processus aléatoires seront indexés par des lettres grecques.

Nous dirons qu'un processus  $(Y_\tau)_{\tau \geq 0}$  défini sur un espace de probabilité  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$  est un P.A.I.S. s'il est continu à droite et tel que  $\forall \tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_n$  les variables  $Y_0, Y_{\tau_1} - Y_0, \dots, Y_{\tau_n} - Y_{\tau_{n-1}}$  sont indépendantes et si la loi de  $Y_\tau - Y_\sigma$  ne dépend que de  $\tau - \sigma$ .

On note  $\mathcal{F}_\tau = \sigma(Y_\sigma, \sigma \leq \tau)$ . Un processus  $(Y_\tau)$  défini sur  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ , continu à droite, à valeurs  $\mathbb{R}$ , est un P.A.I.S. si et seulement si (formule de Lévy-Khintchine) (cf [15] [19]).

$$(8) \quad \begin{aligned} & \forall u \in \mathbb{R}^m, \forall \tau \geq \sigma \geq 0 \\ & \mathbb{E}[\exp\{i \langle u, Y_\tau - Y_\sigma \rangle\} | \mathcal{F}_\sigma] \\ & = \exp\left\{(\tau - \sigma) \left[ -\frac{1}{2} \langle u, \Sigma u \rangle + i \langle u, \eta \rangle + \int (e^{i \langle u, x \rangle} - 1 - i \langle u, x \rangle 1_{\{|x| \leq 1\}}) d\nu(x) \right] \right\} \end{aligned}$$

où  $\Sigma$  est une matrice  $m \times m$  symétrique semi-définie positive,  $\eta \in \mathbb{R}^m$ , et  $\nu$  est une mesure positive sur  $\mathbb{R}^m$  vérifiant  $\nu\{0\} = 0$  et  $\int 1 \wedge |x|^2 d\nu(x) < +\infty$ . ( $\nu$  est donc  $\sigma$ -finie sur  $\mathbb{R}^m \setminus \{0\}$ ).

Dans cette formule, le triplet  $(\Sigma, \eta, \nu)$  est déterminé de façon unique et s'appelle les caractéristiques locales de  $Y$ . Notons, cependant, que d'autres formes peuvent être données à la formule de Lévy-Khintchine (cf [15]) et que le coefficient  $\eta$  s'en trouve modifié. En revanche,  $\Sigma$  et  $\nu$  ont une signification intrinsèque :  $Y$  est une semi-martingale pour  $(\mathcal{F}_\sigma)$  et sa partie martingale continue  $Y^c$  (nulle en zéro) à pour crochet matriciel :

$$(9) \quad \langle Y^c, Y^c \rangle_\tau = \tau \Sigma,$$

et la mesure de Lévy  $\nu$  est déterminée par les sauts de  $Y$  : la mesure  $d\tau \times d\nu$  sur  $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^m$  est la projection prévisible duale de la mesure aléatoire :

$$\mu(d\tau, dx) = \sum_{\sigma > 0} 1_{\{Y_\sigma \neq Y_{\sigma-}\}} \delta_{(\sigma, \Delta Y_\sigma)}(d\tau, dx).$$

où  $\Delta Y_\sigma = Y_\sigma - Y_{\sigma-}$ . C'est-à-dire qu'on a la formule:

$$(10) \quad \mathbb{E} \sum_{\sigma > 0} H(\omega, \sigma, \Delta Y_\sigma) = \mathbb{E} \int_0^\infty d\tau \int_{\mathbb{R}^m} H(\omega, \tau, y) d\nu(y)$$

pour tout processus  $H$  prévisible positif.

Un cas particulier important est celui des P.A.I.S. à valeurs réelles positives, ou subordinateurs. Ils sont caractérisés par (cf par exemple [5]).

$$(11) \quad \begin{aligned} \forall \lambda \geq 0, \tau \geq \sigma \geq 0 \\ \mathbb{E}[e^{-\lambda(Y_\tau - Y_\sigma)} | \mathcal{F}_\sigma] = e^{-(\tau - \sigma)\varphi(\lambda)} \end{aligned}$$

$$\varphi(\lambda) = b\lambda + \int (1 - e^{-\lambda x}) d\nu(x)$$

$b \in \mathbb{R}_+$ ,  $\nu$  mesure positive sur  $\mathbb{R}_+$  telle que  $\int (1 \wedge x) d\nu(x) < +\infty$ .

Les fonctions  $\varphi$  de la forme indiquée en (11) sont les fonctions de Bernstein nulles en zéro, elles sont en correspondance bi-univoque avec les semi-groupes de convolution de probabilités sur  $\mathbb{R}_+$ , continus pour la convergence étroite (cf [1]).

### 3 Viscoélasticité et P.A.I.S.

#### 3.1 Cas d'un paramètre observable

Un matériau viscoélastique linéaire sans vieillissement ne présentant qu'un paramètre observable  $q$  a pour réponse impulsionnelle (formule (6)) :

$$(12) \quad f(t) = L + Kt + \int (1 - e^{-tx}) d\nu(x)$$

où  $L$  et  $K$  sont positifs et  $\nu$  est une mesure de Lévy de subordonateur.

On définit une bijection si on associe à ce matériau le subordonateur  $X$  tel que  $X_0 = L$  et dont la fonction de Bernstein est  $f(t) - L$  (on pourrait aussi considérer un subordonateur à durée de vie exponentielle pour traiter la constante  $L$ ).

Remarquons que si on se donne un P.A.I.S.  $Y$  réel quelconque,  $Y$  est une semi-martingale pour sa filtration naturelle. Soit  $Y^c$  sa partie martingale continue. On peut associer à  $Y$  un matériau visco-élastique en posant  $Y_0^2 = L$  et

$$(13) \quad f(t) = Y_0^2 + \mathbb{E}[tY_1^{c2} + \sum_{0 < \sigma \leq 1} (1 - e^{-t\Delta Y_\sigma^2})]$$

#### 3.2 Cas de plusieurs paramètres observables

Considérons un P.A.I.S.  $Y$  à valeur  $\mathbb{R}^m$  tel que  $Y_0$  soit une constante de  $\mathbb{R}^m$ . On note  $(\Sigma, \eta, m)$  les caractéristiques de  $Y$  (formule (8)).  $Y$  est une semi-martingale pour sa filtration naturelle, soit  $Y^c$  sa partie martingale continue.

On peut associer alors à  $Y$  le matériau viscoélastique à  $m$  paramètres observables dont les réponses impulsionnelles sont

$$(14) \quad f_{ij}(t) = Y_0^i Y_0^j + \mathbb{E}[tY_1^{ci} Y_1^{cj} + \sum_{0 < \sigma \leq 1} (1 - e^{-t|\Delta Y_\sigma|^2}) \frac{\Delta Y_\sigma^i \Delta Y_\sigma^j}{|\Delta Y_\sigma|^2}]$$

En effet cela donne

$$(15) \quad f_{ij}(t) = Y_0^i Y_0^j + t \Sigma_{ij} + \int_{\mathbb{R}^m \setminus \{0\}} (1 - e^{-t|y|^2}) \frac{y^i y^j}{|y|^2} dm(y)$$

et les matrices  $(\nu_{ij})$  où  $\nu_{ij}$  est l'image par  $y \rightarrow |y|^2$  de la mesure  $\frac{y_i y_j}{|y|^2} \cdot m(dy)$  sont toutes les matrices symétriques semi-définies positives de mesures sur  $\mathbb{R}_+^*$  vérifiant  $\int_{\mathbb{R}_+^*} (x \wedge 1) d|\nu_{ij}|(x) < +\infty$ .

**Remarque** Notons que, si le matériau 1 [resp. 2] est associé au processus  $Y^{(1)}$  [resp.  $Y^{(2)}$ ] et si  $Y^{(1)}$  et  $Y^{(2)}$  sont pris indépendants, le matériau dont le modèle rhéologique est la mise en série des modèles des matériaux 1 et 2 (c'est-à-dire qui a les mêmes paramètres observables et tel que

$$f_{ij}(t) = f_{ij}^1(t) + f_{ij}^2(t)) \text{ est associé au processus } Y^{(1)} + Y^{(2)}.$$

## 4 Matériaux conjugués et dictionnaires

### 4.1 Etude des fonctions de relaxation

Pour voir à quoi correspond la mise en parallèle des modèles rhéologiques, considérons les fonctions de relaxation, en nous plaçant d'abord dans le cas d'un seul paramètre observable :

Considérées comme distributions sur  $\mathbb{R}$  nulles pour  $t < 0$ , la réponse impulsionnelle  $f$  et la fonction de relaxation sont liées par la relation :

$$(16) \quad f' * r' = \delta_0.$$

où  $*$  désigne le produit de convolution. Notant  $\widehat{\phantom{x}}$  la transformation de Laplace, la formule (6) donne :

$$(17) \quad \widehat{(f')}(\theta) = L + \frac{K}{\theta} + \int_{\mathbb{R}_+} \frac{x}{\theta + x} d\nu(x) \quad \theta > 0.$$

Ceci nous conduit à la définition suivante :

**Definition 1** Une fonction  $h$  de  $\mathbb{R}_+^*$  dans  $\mathbb{R}$  est appelée transformée de Stieltjes s'il existe  $a \geq 0$  et une mesure  $\mu$  positive sur  $\mathbb{R}_+$  tels que :

$$\forall \theta > 0 \quad h(\theta) = a + \int \frac{1}{\theta + x} d\mu(x).$$

Si  $h$  est une transformée de Stieltjes le couple  $(a, \mu)$  est uniquement déterminé (cf [18]). La relation (17) exprime que  $\widehat{(f')}$  est transformée de Stieltjes du couple  $(L, K\delta_0 + x \cdot \nu(x))$ .

D'après le théorème 2 de [18], si  $h$  est une transformée de Stieltjes non nulle, il en est de même de  $\frac{1}{h(1/\theta)}$ . Il existe donc un couple  $(\alpha, \mu)$  unique non nul tel que :

$$\frac{1}{\widehat{(f')}\left(\frac{1}{\theta}\right)} = \alpha + \int_{\mathbb{R}_+} \frac{1}{\theta + x} d\mu(x)$$

avec  $\alpha \geq 0$  et  $\int_{\mathbb{R}_+} \frac{1}{1+x} d\mu(x) < +\infty$ .

Par (16), on a donc :

$$\widehat{(r')}(\theta) = \frac{1}{\widehat{(f')}(\theta)} = \alpha + \int_{\mathbb{R}} \frac{\theta}{1 + \theta x} d\mu(x)$$

d'où l'on tire :

$$r(t) = \left( \alpha + \mu\{0\}\delta_0 + \int_0^\infty \frac{e^{-tx}}{x} d\mu(x) \right) 1_{\{t \geq 0\}}.$$

Ce qui établit la :

**Proposition 2** *Les fonctions de relaxation sont de la forme*

$$r(t) = \alpha + \beta\delta_0 + \int_{\mathbb{R}_+^*} e^{-tx} d\rho(x)$$

où  $\alpha, \beta \geq 0$  et  $\rho$  est une mesure positive sur  $\mathbb{R}_+^*$  telle que  $\int_{\mathbb{R}_+^*} \frac{1}{1+x} d\rho(x) < +\infty$ .

En effet, il suffit de poser  $\rho(dy) = y\tilde{\mu}(dy)$  où  $\tilde{\mu}$  est l'image de  $\mu|_{\mathbb{R}_+^*}$  par  $x \rightarrow \frac{1}{x}$ . La condition  $\int \frac{1}{1+x} d\mu(x) < +\infty$  impose alors :

$$(18) \quad \int_{\mathbb{R}_+^*} \frac{1}{1+y} d\rho(y) < +\infty.$$

**Remarque.** Ainsi les restrictions  $t > 0$  des fonctions de relaxation ne sont pas toutes les fonctions complètement monotones, à cause de la condition (18) (qui garantit que  $r$  est une distribution au sens de Schwartz).

## 4.2 Relation de conjugaison

De même, dans le cas de  $m$  paramètres observables, les réponses impulsionnelles et les fonctions de relaxation sont reliées par :

$$(19) \quad \left( \sum_k f'_{ik} * r'_{kj} \right)_{ij} = \delta_0 \cdot I$$

en notant  $I$  la matrice identité  $m \times m$ . Et par le même raisonnement, on obtient que les fonctions de relaxation sont les distributions de la forme

$$(20) \quad r_{ij}(t) = A_{ij} + B_{ij}\delta_0 + \int_{\mathbb{R}_+^*} e^{-tx} d\rho_{ij}(x)$$

où  $(A_{ij}, (B_{ij})$  et  $(\rho_{ij})$  sont des matrices symétriques semi-définies positives, les  $\rho_{ij}$  étant des mesures telles que :

$$(21) \quad \int_0^\infty \frac{1}{1+x} d|\rho_{ij}|(x) < +\infty.$$

Il résulte de (20) que *les primitives  $R_{ij}(t)$  nulles pour  $t < 0$  des  $r_{ij}(t)$  sont exactement les fonctions de la forme (7). Et par conséquent sont les réponses impulsionnelles d'un matériau*

*viscoélastique linéaire sans vieillissement que nous appellerons **matériau conjugué** du matériau initial.*

La relation de conjugaison s'exprime sur les réponses impulsionnelles par

$$(22) \quad \sum_k f_{ik}^{(1)} * f_{kj}^{(2)}(t) = \delta_{ij} \cdot \frac{t^2}{2} 1_{\{t \geq 0\}}.$$

La relation de conjugaison est symétrique et la mise en série des modèles rhéologiques de deux matériaux correspond à la mise en parallèle des matériaux conjugués et réciproquement.

### Dictionnaires et exemples

Nous nous limitons ici, pour simplifier, au cas d'un seul paramètre observable

Matériaux	Réponses impulsionnelles	processus
mise en série	addition des réponses impulsionnelles	addition de processus indépendants
mise en parallèle	addition des fonctions de relaxation	addition des Processus conjugués indépendants
matériau élastique	$f(t) = \frac{1}{a} 1_{\{t \geq 0\}}$	processus constant de valeur $\frac{1}{a}$
amortisseur (conjugué du précédent)	$f(t) = at 1_{\{t \geq 0\}}$	translation uniforme de vitesse $a$
matériau de Maxwell	$f(t) = (at + b) 1_{\{t \geq 0\}}$	translation uniforme de vitesse $a$ issue du point $b$
matériau de Kelvin-Voigt (conjugué du précédent)	$f(t) = \frac{1}{a}(1 - e^{-\frac{a}{b}t}) 1_{\{t \geq 0\}}$	processus de Poisson de saut d'amplitude $\frac{a}{b}$ et d'intensité $\frac{1}{a}$

Matériaux	Réponses impulsionnelles	processus
combinaison finie d'amortisseurs et de ressorts	$f(t) = (\sum_i \alpha_i (1 - e^{-\lambda_i t}) + at + b) 1_{\{t \geq 0\}}$	somme de processus de Poissons indépendants de sauts d'amplitude $\lambda_i$ et d'intensité $\alpha_i$ et d'une translation de vitesse $a$ issue de $b$
combinaison finie d'amortisseurs et de ressorts (conjugué du précédent)	$f(t) = (\sum_i \beta_i (1 - e^{-\mu_i t}) + ct + d) 1_{t \geq 0}$ $(\lambda_1 < \mu_1 < \lambda_2 < \mu_2 < \dots$ si $c \neq 0$ ou $\mu_1 < \lambda_1 < \mu_2 < \lambda_2 < \dots$ si $a \neq 0)$	somme de processus de Poissons indépendants de sauts d'amplitude $\mu_i$ et d'intensité $\beta_i$ et d'un translation de vitesse $c$ issue de $d$

La relation de conjugaison attire l'attention sur le cas suivant

Réponses impulsionnelles	Processus
$f(t) = \frac{t^\alpha}{\alpha \Gamma(\alpha)} 1_{\{t \geq 0\}}$ $\alpha \in ]0, 1[$ conjugué avec le matériau d'indice $1 - \alpha$	processus stable unilatéral d'ordre $\alpha$
seul matériau qui est son propre conjugué $f(t) = 2\sqrt{\frac{t}{\pi}} 1_{\{t \geq 0\}}$	processus stable unilatéral d'ordre $\frac{1}{2}$

### Autres remarques.

1 - L'importante propriété du cône des fonctions de Bernstein d'être stable par composition (cf [1]) fait que si  $f_1(t)$  et  $f_2(t)$  sont prises dans les tableaux ci-dessus,  $f_1((f_2(t)))$  est encore la réponse impulsionnelle d'un matériau viscoélastique linéaire sans vieillissement, ce qui fournit une grande variété de fonctions.

2 - La réponse impulsionnelle d'un matériau viscoélastique à un paramètre observable peut être considérée comme une horloge. C'est, en effet, un phénomène déclenché à l'instant 0 et qui évolue ensuite indéfiniment selon une dynamique propre. Ces horloges ont la propriété suivante :

Considérons :

- a) un mobile  $A$  animé d'une vitesse rectiligne uniforme, en zéro à l'instant 0.
- b) deux curseurs  $B$  et  $C$  liés respectivement aux réponses impulsionnelles de matériaux (1) et (2) et pouvant se déplacer parallèlement à  $A$ .

Si on note les positions successives  $a_0 = 0, a_1, \dots, a_n, \dots$  de  $A$  lorsque  $B$  atteint des distances régulières  $0, h, 2h, \dots, nh, \dots$ , alors les positions successives  $\alpha_0 = 0, \alpha_1, \dots, \alpha_n, \dots$  de  $A$  lorsque  $C$  atteint les  $a_n$  sont aussi celles qu'il atteindrait lorsqu'un corps viscoélastique  $D$  voit son index atteindre les distances  $nh$ . Cette propriété est due à la stabilité par composition du cône des fonctions de Bernstein.

3 - La théorie de Biot a fait l'objet de nombreuses extensions, d'abord au cas avec vieillissement, également avec des concepts de géométrie différentielle les paramètres cachés étant supposés tensoriels cf [22] et à des cas non linéaires cf [17]. Il est vraisemblable qu'une partie de ces extensions peut recevoir une interprétation à partir des caractéristiques locales des semi-martingales.

## Bibliographie

- [1] Ch. Berg, G. Forst *Potential theory on locally compact abelian groups*. Springer (1975).
- [2] M. Biot Theory of stress-strain relations in anisotropic viscoelasticity and relaxation phenomena. *J. Appl. Phys.* 25, 11, 1385-1391 (1954).
- [3] M. Biot Thermoelasticity and irreversible thermodynamics. *J. Appl. Phys.*, 27, 3, 240-253 (1956).
- [4] J.M. Bony, Ph. Courrège, P. Priouret, Semigroupes de Feller sur une variété à bord compacte *Ann. Inst. Fourier*, 18, 369-521, (1968)
- [5] N. Bouleau *Processus stochastiques et applications*. Hermann (1988).
- [6] N. Bouleau Interprétation probabiliste de la viscoélasticité linéaire, *mechanics Research Comm.* vol 19, 16-20, (1992)
- [7] N. Bouleau et O. Chateau, Le processus de la subordination, *Note C. R. Acad. Sci. Paris.* t. 309, sI, 955-958, (1989)
- [8] O. Chateau, "Quelques remarques sur les PAIS et la subordination au sens de Bochner", Thèse Univ. Paris VI, (1990)
- [9] B.D. Coleman On thermodynamics, strain impulses and viscoelasticity. *Arch. Rat. Mech. Anal.* Vol. 17, 230-254 (1964).
- [10] C. Dellacherie, P.A. Meyer *Probabilités et Potentiel*, Chapitres V à VIII, Théorie des martingales, Hermann(1980).
- [11] C. Dellacherie, P.A. Meyer *Probabilités et potentiel*, chapitres XII à XVI, Hermann (1987).
- [12] R. Durrett *Brownian motion and martingales in analysis*, Wadsworth (1984).
- [13] C. Eckart Theory of elasticity and anelasticity, *Phys. Rev.* Vol. 73, 373-382 (1948).
- [14] S.M. Ermakov, V.V. Nekrutkin, A.S. Sipin *Random processes for classical equations of mathematical physics*, Kluwer (1989).
- [15] W. Feller *Introduction to probability theory and its applications*. Tome II, Wiley (1966).
- [16] Y.C. Fung, *Foundations of solid mechanics*. Prentice Hall (1965).

- [17] B. Halphen, N. Guyen Quoc-Son Sur les matériaux standard généralisés. *J. Mécanique*, 14, 1 39-63 (1975).
- [18] F. Hirsch, Intégrales de résolvantes et calcul symbolique. *Ann. Inst. Fourier* XXII, 4, 239-264 (1972).
- [19] J. Jacod, *Calcul stochastique et problèmes de martingales*. Lecture Notes in Math. 714, Springer (1979).
- [20] J. Mandel, *Mécanique des milieux continus*. Tome II, Gauthier-Villars (1966).
- [21] J. Meixner, Die thermodynamische theorie der Relaxationser-Scheinunger und ihr zuzammenhang mit der Nachwirkungstheorie, *Kolloid Z.* Vol. 14, 2-9 (1953).
- [22] F. Sidoroff, *Journal de Mécanique*, Vol. 14, 3 (1975).
- [23] K. Yosida, *Functional Analysis* . Springer 1974.