VERS LE CONCEPT DE FONCTION ANALYTIQUE L'ECHAPPEE D'AUGUSTIN CAUCHY*

Nicolas BOULEAU

Augustin Cauchy est le fils aîné d'une famille dont l'ascension sociale fut surprise par la révolution. Son père Louis-François Cauchy avait fait d'excellentes études, il était secrétaire de l'intendant de Rouen Thiroux et l'avait suivi à Paris quand ce dernier fut nommé lieutenant général de police de la ville de Paris en tant que premier commis. Louis-François Cauchy avait épousé une Parisienne Marie-Madeleine Desestre d'une famille d'officiers parisiens ayant une fortune personnelle confortable.

La position administrative relativement importante de Louis-François Cauchy lui permettait d'avoir des relations avec beaucoup de monde, ingénieurs, médecins et autorités diverses liées à la gestion de la ville de Paris où les travaux abondaient. Visiblement, ces relations lui plaisaient et lui permettaient de mettre en valeur ses qualités et compétences.

Le premier enfant du jeune couple, Augustin, naquit le 21 août 1789. La révolution était là. Elle allait bouleverser cette belle ascension. Louis-François était compromis, il dut se faire oublier ; son protecteur Thiroux fut exécuté en avril 1794, Augustin n'avait pas cinq ans. Ils quittèrent la capitale pour une maison à Arcueil achetée avec la dot de Marie-Madeleine où ils passèrent la Grande Terreur.

Il faut imaginer cette période de la vie de Cauchy. Son père dans la crainte d'une dénonciation, les privations, les maladies. L'amour maternel était certainement grand et sécurisant, mais dans les bras de la mère, il y avait un petit frère né en mars 92, dont la santé était évidemment menacée par ces conditions précaires.

Nous disposons d'une biographie de Cauchy réalisée à la demande de la famille du savant, dix ans après sa mort, sous le Second Empire, par C. A. Valson. Il ne s'agit pas d'un travail d'histoire des sciences ; Valson n'avait pas semble-t-il le recul scientifique suffisant pour accorder leur juste place aux divers apports de Cauchy à l'évolution des mathématiques. Au

* Cet article s'inspire du chapitre "L'exil mathématique" de l'ouvrage *La règle, le compas et le divan*, N. Bouleau, Le Seuil 2003.

demeurant, Valson s'est imprégné du climat de l'entourage familial, et ce qu'il dit est aussi un témoignage, indirect, mais intéressant. On y apprend qu'à Arcueil, les Cauchy, pour la bouillie des enfants, utilisaient de la farine faite avec du blé et de la fécule de pomme de terre récoltés dans le jardin : « au dire de sa mère, Augustin se ressentit longtemps des privations qu'il avait dû supporter à cette époque de sa vie. »¹ Valson valorise exagérément dans son livre le rôle du père Louis-François Cauchy qu'il compare au père de Pascal ; il en fait un savant, qu'il n'était pas. Une biographie se devait probablement de revêtir ce bon ton à cette époque. Mais il ressort d'une lecture plus attentive que c'est la mère d'Augustin qui eut un rôle primordial dans l'élaboration de sa personnalité.

Augustin a cinq ans à la chute de Robespierre. Il en a quinze lorsque Napoléon est sacré empereur. Période de jaillissement historique où les choses vont très vite. Louis-François Cauchy retrouve un emploi à Paris : chef de bureau des Arts et manufactures du Ministère de l'intérieur. Après le coup d'état du 18 brumaire auquel il adhère avec enthousiasme, il est élu par le Sénat en janvier 1800 secrétaire chargé de la rédaction des procès-verbaux, archiviste et garde des sceaux de la Haute Assemblée. La situation s'est retournée, il est considéré et influent. Ses fonctions lui permettent de côtoyer les grands du moment. Il se servira de ces relations pour favoriser la carrière de son fils Augustin. Celui-ci prépare l'Ecole Polytechnique où il est reçu en 1805 à 16 ans, second des 125 admis sur 293 candidats. Il en sort troisième et premier admis à l'École des Ponts et Chaussées qu'il place en tête de ses préférences.

Aspirant-ingénieur des Ponts et Chaussées, il est affecté pour son premier poste à Cherbourg, site fameux où de grands travaux étaient en cours. Valson insiste à l'extrême dans sa monographie, sur le climat catholique et pieux créé par ses parents, cite les textes bibliques et l'évangile avec lesquels ils apprenaient à lire à leurs enfants : « son éducation fut essentiellement chrétienne » et Valson va jusqu'à présenter le père comme un saint homme ce qui est peu conforme à l'image qui ressort de sa carrière et de son goût pour les influences et les recommandations. Il semble au contraire que si, en effet, Augustin fut élevé dans un milieu pratiquant, sa foi religieuse était si profonde qu'elle en gênait sa famille qui s'inquiétait du qu'en dira-t-on et semblait avoir une conception plus accommodante de la vie chrétienne. Valson rapporte qu'à l'Ecole Polytechnique « il ne dissimulait rien, et s'acquittait comme dans sa famille de ses pratiques de piété. On

¹ C. A. Valson, *La vie et les travaux du baron Cauchy*, Albert Blanchard, 1970.

pouvait le voir, matin et soir, au milieu de l'indifférence générale, modestement agenouillé au fond de son lit et répétant, dans le recueillement, les prières qu'il avait apprises autrefois sur les genoux de sa mère. La manière dont il s'acquittait de ce devoir semblait si naturelle, qu'on eût pu croire qu'il était écrit, comme les heures d'études, dans la règle de l'école, et jamais il ne vint à l'esprit de ses camarades de l'inquiéter à ce sujet. Il faut bien dire que son mérite hors ligne servait de passeport à sa piété ; la supériorité de l'intelligence faisait accepter volontiers celle de la vertu. »

Le site de Cherbourg jouissait d'un grand prestige parmi les ingénieurs des Ponts et Chaussées. Louis XVI y avait en effet engagé des travaux importants de construction d'une rade pour abriter une flotte de guerre de cent vaisseaux. Un ouvrage de 4000 mètres avait été partiellement réalisée pour la mise en œuvre d'un audacieux projet dû à Louis Alexandre de Cessart. Cet ingénieur avait imaginé une digue, en quelque sorte en pointillés, constituée de 90 cônes tronqués immergés et formant autant d'îles artificielles fortifiées et reliées entre elles par des chaînes pour empêcher le passage des navires ennemis. Dix-huit de ces cônes de 50 mètres à la base furent réalisés et mis en place par flottaison puis échouage. Le roi lui-même vint visiter ce chantier spectaculaire en juin 1786 et monta sur l'un des cônes où il dîna. A l'Ecole des Ponts et Chaussées, Augustin Cauchy était imprégné de la fierté qui régnait à l'égard de Louis Alexandre de Cessart et du chantier de Cherbourg. Bien noté, il fut affecté à Cherbourg où l'ingénieur Cachin avait succédé à Cessart. La réalité du travail de l'ingénieur sur le terrain était bien différente de ce qu'on pouvait imaginer de Paris.

Le chantier du Port Napoléon était un grand projet, où l'encadrement du travail des hommes constituait la préoccupation essentielle. L'historien Bruno Belhoste nous donne une peinture de la réalisation de cet ouvrage qui permet d'imaginer combien les conditions de vie y étaient dures : « Depuis près de trente ans, on s'acharnait ici à construire un établissement de marine de première grandeur face à l'Angleterre. L'énorme digue qui fermait la rade du côté de la mer, commencée sous Louis XVI, était terminée depuis 1786. Il restait à construire le port de carénage et de radoub distinct du port de commerce. Les travaux avaient commencé en avril 1803 sous la direction de l'inspecteur général des Ponts et Chaussées Cachin qui en avait dressé les plans. Le projet comprenait un avant-port, baptisé port Napoléon, "capable de contenir douze vaisseaux de guerre avec un nombre proportionné de

frégates et trois formes de construction" ainsi que des fortifications nécessaires pour mettre le port à l'abri de l'ennemi. [...] Deux à trois mille manœuvres travaillèrent de front, surtout des prisonniers de guerre et dans des conditions si difficiles que sur 20000 prisonniers passés à Cherbourg en quinze ans de travaux, 2000 environ, selon Cachin, seraient morts à la tâche. Il fallait en effet creuser dans le roc l'avant-port et le bassin de radoub à une profondeur suffisante pour que les vaisseaux puissent être maintenus à flot même aux plus basses marées. Deux machines à vapeur servaient en permanence à l'épuisement des eaux d'infiltration. »

Une des lettres d'Augustin Cauchy à sa famille, de juillet 1811, décrit précisément ce qu'on attend de lui:

Je me lève à 4 heures du matin et je suis occupé du matin au soir. Ma besogne ordinaire s'est trouvée augmentée dans ce mois par l'arrivée des prisonniers espagnols. On en a été prévenu seulement huit jours à l'avance, et il fallait, pendant ces huit jours, bâtir des logements et préparer des lits de camp pour douze cents hommes. Les logements consistent en deux corps de bâtiment de 360 pieds de long sur 45 de large, contenant chacun dix-neuf salles, et en tout trente-huit salles. Douze salles étaient préparées; il fallait en préparer douze autres dont les murs n'étaient pas encore élevés à leur hauteur. Nous n'avions pas d'ardoises, j'ai été visiter les carrières des environs ; nous n'avions pas de cuisines, j'ai fait faire des fourneaux provisoires. Enfin nos Espagnols sont logés et couverts depuis deux jours. Ils ont des lits de camp, de la paille, de la nourriture et s'estiment fort heureux. Je n'ai pas eu plutôt terminé ce travail qu'il a fallu s'occuper d'un autre. Aujourd'hui j'ai tracé des forges que je vais faire exécuter en granit. Je fais aussi construire deux phares sur les moles d'entrée.

Le travail ne me fatigue pas; au contraire je suis en parfaite santé.

Après son travail ou ses jours de repos, Augustin se livre à des activités dont le registre est en contraste saisissant avec ce qu'on pourrait penser être les loisirs d'un membre du commandement d'un tel chantier : les mathématiques, la botanique, la poésie française et latine, la religion et les devoirs mondains. Dans une lettre à sa mère d'août 1810, l'enfer du grand chantier est sublimé en un poème aux accents parnassiens:

*Ces immenses bassins qui sans cesse résonnent
sous les coups de l'acier,*

...

*... Ces réservoirs, ces digues, ce barrage
Des flots toujours vainqueur,*

*Oui contient l'Océan, l'aquilon et l'orage,
Et brave leur fureur.*

A Cherbourg, Augustin avait emmené, en plus de quelques livres religieux et de poésie, la *Mécanique céleste* de Laplace et le *Traité des fonctions analytiques* de Lagrange, et il y poursuit des recherches mathématiques qui lui permettront d'adresser en 1811 et 1812 deux mémoires à l'Académie sur la géométrie des polyèdres. Comment était-il possible que ce jeune ingénieur de 22 ans pût pratiquer les mathématiques à un tel niveau qu'il soit remarqué par Biot, Carnot, Legendre et Poisson, et élu correspondant de la Société Philomatique, société fondée en 1788 qui jouait un rôle important dans la vie scientifique ?

En créant en 1794 l'École Polytechnique, alors appelée École Centrale des Travaux Publics, la révolution française accorda, curieusement, une place importante aux mathématiques dans la formation des ingénieurs, place qui sera renforcée sous l'empire et la restauration. À côté de Monge et sa géométrie descriptive, Lagrange, l'un des esprits les plus profonds du temps, y enseigne un cours d'analyse confié ensuite à Jean-Baptiste Joseph Fourier qui occupe près du quart du nombre des leçons. Laplace est examinateur de sortie. La République avait besoin de savants et les mathématiques, science pure et incontestable, conférait à ceux qui la connaissaient une légitimité où le mérite remplaçait la naissance. Puis le jeu des concours d'entrée et de sortie renforça encore le rôle de l'Analyse.

Après l'École Polytechnique, Augustin Cauchy, en entrant à l'École des Ponts et Chaussées, plus archaïque, ayant conservé de l'ancien régime une formation empirique s'apparentant à un long noviciat², était invité à quitter les hautes sphères de l'esprit pour des savoirs plus pratiques. C'est à cette époque qu'il avait commencé à lire des mathématiques pour lui-même.

Durant l'année 1812, la santé physique et morale d'Augustin se dégrade. « On ignore tout de sa maladie qui s'éternisa, durant, de congé en congé, environ un an. Sa convalescence interminable, entrecoupée d'ailleurs de semaines de travail, s'expliquerait assez bien, écrit Bruno Belhoste, par une origine nerveuse. Il s'agissait probablement davantage d'un état dépressif que d'une véritable affection »³. Malgré sa pieuse éducation, bien faire ce qu'on attend de lui comme ingénieur ne lui donne aucune satisfaction véritable, aider les ouvriers à surmonter leurs souffrances par le jeu d'un commandement chaleureux et motivant ne gratifie pas sa nature. La

² Cf. A. Picon, *L'invention de l'ingénieur moderne, l'École des Ponts et Chaussées 1747-1851*, Presses de l'ENPC 1992.

³ Cf. B. Belhoste, *Cauchy mathématicien légitimiste au XIXe siècle*, Belin, 1985.

nostalgie de sa mère se confond avec celle des mathématiques et finalement de Paris. Il rédige un troisième article sur les directrices des coniques, qui est considéré par Poisson comme un résultat connu. Il en est évidemment déçu.

Mme Cauchy entendait bien conserver un rôle directeur dans la vie sentimentale d'Augustin et se méfiait des décisions que celui-ci pût prendre dans l'état dépressif dans lequel il était. « Durant l'été 1812 son état empira graduellement. Ses parents étaient très soucieux pour sa santé. Vers le milieu de septembre, ils reçurent une lettre du confesseur du père de Cauchy les informant que leur fils avait l'intention de se marier. Mme Cauchy, alors très inquiète, quitta Paris immédiatement avec son second fils Alexandre. Elle arriva à Cherbourg le 24 septembre et trouvant son fils en très mauvaise santé, le ramena rue de Tournon. »⁴ De retour à Paris, Cauchy, en congé "pour soin pour sa santé", se consacre aux mathématiques et commence à publier des travaux de première importance.

Un mathématicien était né, qui deviendra une grande figure de son temps et des mathématiques. L'immensité de son œuvre (782 publications réunies dans 27 tomes) illustre une énergie créatrice peu commune. Par une pratique différente de cette discipline, il marque un tournant dans l'histoire des mathématiques: la finesse et la rigueur deviennent des conditions de la fécondité.

Encouragé par un début de notoriété mathématique acquise durant son séjour à Cherbourg grâce à ses résultats sur les polyèdres et la résolution du problème de la représentation de tout nombre comme somme de n nombres polygonaux d'ordre n , déjà énoncé par Fermat, il se consacre à la mécanique des fluides, naissante à cette époque. Il reçoit un prix de l'Académie sur la propagation des ondes de surface et introduit en 1819 la méthode dite "des caractéristiques", devenue fondamentale pour les équations différentielles hyperboliques, puis il jette les bases de la théorie de l'élasticité⁵. Il obtient un poste de répétiteur puis de professeur à l'Ecole Polytechnique et est nommé à l'Académie des Sciences en 1816 après l'éviction de celle-ci de plusieurs républicains et bonapartistes notoires. Son œuvre mathématique se développe dès lors sur plusieurs fronts à un rythme impressionnant :

⁴ Cf. B. Belhoste , *Augustin-Louis Cauchy, a biography*, Springer, 1991. A 29 ans Cauchy épousera Melle Aloïse de Bure de laquelle il aura deux filles.

⁵ Le mémoire de 1823 est considéré comme l'acte fondateur de la mécanique des milieux continus au sens moderne, avec notamment l'apparition des concepts de matrices de quadriques pour les contraintes et les déformations qui deviendront les tenseurs fondamentaux, Cf. A. Dahan-Dalmedico, *Mathématisations, Augustin-Louis Cauchy et l'Ecole française*, Ed. du choix, 1992.

fondements de l'analyse, fonctions de variable complexe, équations aux dérivées partielles, interpolation, mécanique des milieux continus, optique, erreur et probabilités, etc.

Certains historiens en tentant hâtivement de se faire une idée du personnage ont cru pouvoir déduire de ses opinions royalistes, catholiques et conservatrices et de traits enfantins de son caractère attestés par plusieurs anecdotes, que sa production mathématique présentait la même physionomie⁶. Il serait agréable que la meilleure science soit produite par ceux qu'on aime ou qu'on admire. La réalité est plus complexe. Les idées mathématiques de Cauchy ne sont ni réactionnaires ni naïvement idéalistes, et certainement pas superficielles. La rigueur qu'il recherche en permanence s'allie toujours avec la fécondité et les mathématiciens des dix-neuvième et vingtième siècles ne s'y sont pas trompés ; ils y trouvèrent d'innombrables sources d'inspiration, ce qui n'est pas le moindre critère d'une œuvre scientifique. Plus juste est l'analyse historique de J. V. Grabiner : « En un sens très profond, on peut dire que Cauchy réunit les mathématiques anciennes et modernes. Son calcul rigoureux est fait du même moule caractéristique de l'ancienne géométrie. Et contrairement à ses prédécesseurs, il en fit un succès [...] Ce faisant Cauchy réunit trois éléments : les *résultats* majeurs de l'analyse dont la plupart peuvent alors être démontrés ; quelques *notions* et *techniques* fécondes de l'algèbre (en particulier l'approximation algébrique) et de l'analyse ; la *rigueur* et la *structure démonstrative* de la géométrie grecque [...] Il y a peu dans l'analyse du dix-neuvième siècle qui ne fut pas marqué directement ou indirectement, par ses idées. La structure logique de base que Cauchy construisit fournit le cadre dans lequel nous pensons encore les calculs rigoureux ».⁷

L'échappée

La carrière brillante qui accompagnait cette forte activité productrice fut interrompue par un événement imprévu qui se présenta à Augustin Cauchy comme un cas de conscience. La révolution des Trois Glorieuses de 1830 ayant évincé Charles X, Louis-Philippe accédant au trône fit voter une

⁶ Notamment en reprenant les jugements de Hans Freudenthal dans une biographie mathématique au demeurant erronée par endroit, qui n'hésite pas à conclure « In all that Cauchy achieved there is an unusual lack of profundity [...] he was the most superficial of the great mathematicians », in *Dictionary of scientific biography*, ed. Ch. Scribner's sons, N.-Y. 1970-1980, t. III p131-148.

⁷ J. V. Grabiner, *The origins of Cauchy's rigorous calculus*, MIT Press, 1981.

loi exigeant pour qui voulait remplir des fonctions publiques un serment de fidélité au roi des Français. Cauchy légitimiste préféra l'exil. Quittant femme et enfants, il partit pour Fribourg en Suisse. Après plusieurs péripéties et contacts divers, il obtint un poste à l'Université de Turin et enfin se rendit à Prague auprès de Charles X où il fut chargé de l'éducation mathématique du prince héritier, futur duc de Bordeaux. Son exil dura huit ans pendant lesquels il connut une grande solitude affective dont témoigne sa correspondance.

Cette décision n'était pas indispensable. Elle fut prise avant même que la loi en question ne fût promulguée. La plupart des fonctionnaires, dans le corps des Ponts et Chaussées, à l'École Polytechnique et à la Faculté des Sciences prêtèrent serment et parmi les royalistes intransigeants qui s'y refusèrent, rares sont ceux qui s'expatrièrent. Sans doute ses prises de positions politiques et religieuses et son sens de l'honneur dessinaient une attitude à la Chateaubriand qui seyait fort bien à Cauchy ; au demeurant il y avait d'autres moyens de se draper dans sa dignité, il n'était pas seul de son bord et eût facilement trouvé des subsides par l'enseignement dans les institutions religieuses.

Il quitte la France et se sépare des siens, mais évidemment n'abandonne pas les mathématiques, son véritable royaume. Au contraire, il compte sur sa réputation internationale pour trouver les appuis et les reconnaissances susceptibles de lui fournir des fonctions auprès des cours d'Europe. Les mathématiques ne nécessitent pas d'instruments, il emporte avec lui son capital qui est purement conceptuel ainsi que des malles remplies de livres, dont il vend quelques volumes ici ou là, pour subvenir à ses frais. Il est vrai qu'on peut faire des mathématiques en voyage, en prenant l'omnibus (Poincaré), en marchant dans la campagne, en montagne, en prison..., etc.

Lorsque la révolution de 1830 éclate, Cauchy est sous l'empire de très fortes motivations mathématiques. Une de ses préoccupations concerne le développement des fonctions $f(x)$ en séries de puissances de x , dites séries entières, et la question des intégrales lorsque les fonctions qu'on intègre ont des pôles, c'est-à-dire des points où elles deviennent infinies. Il avait significativement avancé dans cette voie en montrant que le saut de la valeur d'une intégrale (le long d'un trajet variable du plan à extrémités fixes) lorsqu'on franchissait un pôle était proportionnel au coefficient de $1/(z-z_1)$ dans le développement de f au voisinage du point z_1 . Il appela ces coefficients des "résidus". Mais l'ensemble de ses résultats ne constituait pas

une vision totalement claire. Par exemple, pourquoi la fonction très régulière $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ se développe-t-elle par la série $1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots$ qui n'est convergente que pour $|x| \leq 1$? Il connaissait une réponse, grâce à l'étude de la même fonction avec un argument complexe, mais ne disposait pas d'une preuve complète.

Est-ce que les fonctions de nombres complexes pouvaient servir à démontrer des résultats d'analyse concernant les nombres réels, les équations différentielles, la mécanique ? On savait depuis longtemps (d'Alembert, Euler, Gauss) que les nombres complexes éclairaient la théorie des polynômes en permettant de les factoriser en facteurs du premier degré, et, sans aucun doute, Cauchy entrevoyait une théorie générale des fonctions de variables complexes qui aurait été la clef cachée de toute l'analyse transcendante, comme on l'appelait, c'est-à-dire des fonctions définies par des séries entières réelles. C'est à ce moment-là, précisément, qu'il décide de quitter la France.

La rupture pour Cauchy est certainement une échappée hors des références familiales, dominées par la personnalité de son père, qui lui pèsent et l'étouffent. Il a besoin de vivre en fonction de critères choisis par lui, dût-il en pâtir professionnellement et en souffrir matériellement.

Ses relations avec son père sont particulièrement pénibles. Celui-ci, qui a promptement prêté serment, ce qui lui valut d'être mentionné dans le *Nouveau Dictionnaire des Girouettes* de 1832, s'adresse à Augustin qui a 42 ans, comme à un enfant, en s'appropriant les bons sentiments et la bonne morale. Dès lors, au lieu de faire front et de retourner à son père un jugement net et mérité sur son comportement accommodant et arriviste, Augustin s'échappe vers les idéalités pures, trait typique de sa personnalité. Pour faire accepter sa conduite et écarter les reproches paternels, il se réfère à l'apôtre Saint Paul qui assure que la providence « ne permet pas que ses fidèles serviteurs soient tentés au-dessus de leurs forces ». Les lettres se succèdent, Augustin n'envisage pas de revenir, il a obtenu un cours de physique mathématique à Turin grâce à l'intervention du roi de Sardaigne et quelque temps plus tard, il a l'honneur d'être nommé membre de la Société Royale de Londres.

Un nouvel argument pour ne pas revenir à Paris lui est fourni par l'épidémie de choléra qui s'y développe en 1832. « En allant à Paris, je risque d'abord d'y être enlevé par le choléra pour lequel, le genre particulier de malaise que j'éprouve quelque fois, puisque les intestins sont ma partie

faible, me donne une prédisposition toute particulière »⁸. Cet argument est avancé à plusieurs reprises. Augustin montre des signes profonds d'inquiétude : « j'ai une prédisposition au choléra que vous n'avez certainement pas » et il ajoute : « l'étude des sciences abstraites fatigue beaucoup plus les organes digestifs que les autres travaux, surtout quand on les étudie avec l'application que j'y ai mise et dont vous trouverez bien peu d'exemples ». Le prix à payer d'avoir donné la priorité à l'abstraction mathématique et d'y consacrer tout le temps et l'esprit disponible est que cela ne réchauffe guère le cœur. Il fait à son frère cet aveu touchant : « Or je sens que je ne peux plus vivre sans Aloyse, et qu'au milieu des grands travaux qui m'occupent, j'ai besoin pour ne pas tomber malade, d'être distrait de temps en temps par les embrassements de ma femme et de ma fille ». Elles viendront finalement le rejoindre à Prague.

Le départ de Cauchy reste étonnant si l'on ne considère que les circonstances ordinaires, politiques et familiales. Il a une *Utopie* en tête.

Durant l'exil, la production mathématique de Cauchy est moindre quantitativement. Il est dans de mauvaises conditions matérielles pour travailler et pour publier. Mais elle est de toute première grandeur. Par deux articles faits à Turin et un à Prague, il fonde véritablement la théorie des fonctions analytiques d'une ou plusieurs variables complexes, telle qu'elle sera utilisée et développée par la suite durant tout le dix-neuvième siècle fournissant une énorme moisson de formules nouvelles, et telle que, pour l'essentiel, elle est encore enseignée de nos jours.

Les deux mémoires de Turin sont rédigés un an après son départ⁹. Ils sont la maturation d'idées bien antérieures. Cauchy a trouvé *le mode d'argumentation* permettant d'établir rigoureusement la convergence des séries et les propriétés des fonctions de variables complexes : *les inégalités*. Il majore les termes des séries, en module, par des termes positifs. Il obtient une première inégalité remarquable qui borne la dérivée n -ième d'une fonction analytique dans un disque du plan complexe. Grâce à elle il peut clarifier, enfin, la question du rayon de convergence des séries entières des fonctions réelles de variables réelles. L'explication se trouve bien dans le comportement de ces fonctions pour des arguments complexes : une fonction analytique est développable en série dans tout disque où elle est bornée en module et cette série n'est pas convergente au delà. Ainsi par

⁸ Lettre du 25 juillet 1832

⁹ Mémoires présentés oralement à l'Académie de Turin les 11 octobre et 27 novembre 1831.

exemple la fonction $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ se développe suivant une série de puissances de x qui ne converge que pour $|x| \leq 1$, parce qu'avec un argument complexe $z=x+iy$, elle s'écrit $f(z) = \frac{i/2}{z+i} - \frac{i/2}{z-i}$ qui possède deux pôles en $z=i$ et $z=-i$ situés à la distance 1 de l'origine¹⁰. Le terme de "fonction analytique" que nous employons ici est évidemment impropre. La notion est en cours d'élaboration et chaque résultat général de Cauchy contribue à lui donner un sens plus précis. C'est le cas en particulier de la fameuse "formule intégrale de Cauchy" présentée à Turin :

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\rho e^{i\theta} f(\rho e^{i\theta})}{\rho e^{i\theta} - z} d\theta$$

où est ρ un nombre positif inférieur au rayon de convergence du développement de f au voisinage de z , formule à partir de laquelle on peut montrer que lorsque des fonctions convergent dans un disque en restant bornées dans leur ensemble, elle convergent uniformément ainsi que leurs dérivées. Cauchy confirme ainsi une intuition antérieure qu'il avait avancée sans prendre la précaution d'hypothèses précises. En dérivant la formule ci-dessus par rapport à z , Cauchy montre que les coefficients de la série de Taylor de f s'obtiennent par des intégrales, résultat présentant une certaine analogie avec celui de Joseph Fourier (1806) concernant les coefficients de la série de Fourier d'une fonction périodique¹¹. Ces intégrales sont d'un type particulier, elles sont prises selon un contour qui tourne autour d'un pôle : ce sont des *calculs de résidus*, qui viennent donc prendre place au cœur du dispositif. A propos de ces travaux, Kolmogorov et Yushkevich écrivent « la théorie des fonctions de variables complexes qu'il a construite a complètement changé ses sujets d'intérêt. Le concept de fonction analytique a pris une place centrale en analyse mathématique »¹².

Il va en donner une preuve spectaculaire quelque temps plus tard à Prague en montrant l'existence et l'unicité des solutions des équations différentielles de la forme $\frac{dy}{dx} = F(x,y)$ pour F analytique¹³. La question des équations différentielles prenait de plus en plus d'importance avec le

¹⁰ Ce résultat, dans son principe, était dans l'air depuis longtemps, ainsi que l'atteste une lettre de Gauss à Bessel du 19 décembre 1811 (Cf. A. N. Kolmogorov et A. P. Yushkevitch *Mathematics of the 19th century*, Birkhäuser, 1998). On imagine donc l'enjeu que constituait l'obtention d'une démonstration générale.

¹¹ Pour une compréhension intuitive de ce dernier résultat, voir J.-M. Lévy-Leblond "If Fourier had known Argand... A Geometrical Point of View on Fourier Transforms" *The Mathematical Intelligencer*, Vol 19, N4, 1997.

¹² A. N. Kolmogorov et A. P. Yushkevich, *op. cit.*

¹³ Mémoire lithographié "Sur l'intégration des équations différentielles", Prague, 1835.

développement des outils mathématiques pour l'écriture de la mécanique newtonienne. On savait résoudre les équations différentielles pour F régulière par la méthode d'approximation par des fonctions affines par morceaux, méthode dite d'Euler et précisée par Cauchy lui-même dans son cours de l'Ecole Polytechnique, mais cette méthode ne renseignait guère sur la représentation de la solution en série entière convergente. On faisait pour cela une identification de coefficients indéterminés dont les passages à la limite n'étaient établis que dans des cas très particuliers. Dans le mémoire de Prague, Cauchy élabore la *méthode des fonctions majorantes* qui lui permet de traiter complètement la question grâce à un détour par les variables complexes, technique qui deviendra habituelle par la suite. L'argument, d'une grande habileté, est encore celui qui est enseigné de nos jours¹⁴. Il consiste à contrôler les identifications formelles grâce à des majorations par des séries à coefficients réels positifs, en utilisant de façon primordiale les inégalités de Turin.

Les travaux de Cauchy durant son périple en Europe sont peu nombreux, surtout si l'on compare avec le rythme impressionnant qu'il tiendra après son retour en France puisqu'en dix ans, il publiera plus de 240 articles et des recueils d'exercices. Mais ils sont d'une profondeur exceptionnelle. Cauchy prend le temps de suivre très loin ses idées. « Vous comprendrez, écrit-il à sa mère en 1834 de Leipzig, combien le temps me manque [pour vous écrire davantage] lorsque vous saurez que j'ai entrepris la rédaction d'un très beau mémoire qui est tout entier dans ma tête et que je n'ai pas encore pu parvenir à trouver le temps pour finir cette rédaction ». Il s'agit de son approche par des fonctions majorantes, méthode dont il voit l'application non seulement aux équations différentielles mais à la question des *fonctions implicites* définies par une relation $G(x,y)=0$, et dont il cherche à donner la pleine fécondité.

Finalement en 1838 aux dix-huit ans du prince héritier dont l'éducation scientifique avait été une tâche difficile et peu gratifiante, l'exil s'acheva alors que la situation politique à Paris n'avait pas changé. Cauchy allait pouvoir exploiter ces idées majeures.

Que se serait-il passé si, dans ce royaume des fonctions de variables complexes, Cauchy n'était pas parvenu à élaborer un discours cohérent ? S'il avait trouvé un raisonnement conduisant à un résultat différent de celui établi sans nombres complexes ? Ce ne sont pas là des questions absurdes.

¹⁴ Cf. H. Cartan, *Théorie élémentaire des fonctions analytiques d'une ou plusieurs variables complexes*, Hermann 1961, chapitre VII.

Souvenons-nous de la méfiance qu'avaient eue les mathématiciens déjà pour les nombres négatifs. Les nombres complexes étaient sûrement encore plus dangereux, et les propriétés obtenues par des séries entières pouvaient *a priori* dépendre de la manière de choisir les points au voisinage desquels on faisait les développements. Mais la situation s'était retournée. Des difficultés rencontrées, Cauchy avait forgé des outils nouveaux et posé les bases d'une théorie qui apparaît aujourd'hui le cœur parfaitement ciselé de la partie la plus classique de l'analyse, et par ses objets et ses raisonnements, une des plus impressionnantes expressions de la beauté mathématique.

Les mathématiciens, suivant leur personnalité, sont plus ou moins audacieux ou libéraux vis-à-vis de ce qu'ils considèrent recevable. Certes la rigueur a son rôle. Mais elle n'est pas le seul critère. Certaines idées vagues, certains principes de transfert, sont de grandes découvertes. A cet égard Cauchy donne un exemple de tempérament imaginatif mais non subversif. Son but est de donner à l'analyse et à la mécanique des bases qui embrassent les résultats importants du passé et fournissent aux travaux futurs une correction irréprochable. Son projet n'est pas d'échapper aux mathématiques de son temps, il ne s'engage pas dans l'étude des géométries non-euclidiennes, il n'est pas révolutionnaire, il entend donner à l'analyse et à l'algèbre la rigueur du traité d'Euclide. Il est convaincu que les valeurs et l'excellence du passé sont aussi celles de demain.

Pourquoi cette mise en ordre prit-elle le tour d'une profusion de découvertes et de tant d'ouvertures pour l'avenir ? Fondamentalement, la raison en est qu'un langage s'élabore, celui des fonctions, celui de Weierstrass : l'analyse fonctionnelle. Ne perdons pas de vue qu'à cette époque et durant tout le dix-neuvième siècle, les mathématiciens n'avaient pas complètement formalisé leur science ni éclairé ses fondements, et se trouvaient donc dans le risque permanent de cet entre-deux : faire confiance plutôt à l'intuition ou plutôt à la logique. Le mysticisme de Cauchy, son goût pour la sublimation joint à son envie de légiférer, le met en position d'une confiance évidente et absolue dans l'expression de son imaginaire par ce nouveau symbolisme. Qu'une intégrale dans le plan complexe contournant les points où les fonctions ne sont pas définies pût conduire à une contradiction ? A l'époque bien des philosophes eussent avancé *a priori* une réponse prudente. Cauchy a une foi totale dans les mathématiques, elle le porte comme l'amour de sa mère, et il trouve des écritures pour le dire...