

Jeux sous forme produit : théorie, algorithmes, applications

Proposition de thèse

11 juin 2021

1 Organisme et supervision

Organisme

Nom : CERMICS, École des Ponts ParisTech

Adresse : 6 et 8 avenue Blaise Pascal, Cité Descartes, 77455 Marne la Vallée Cedex 2

Supervision

Directeur de thèse :

Michel DE LARA (CERMICS, michel.delara@enpc.fr, 01 64 15 36 21)

2 Proposition

Domaine de recherche

Mathématiques, théorie des jeux.

Contexte et positionnement

La théorie des jeux est la discipline mathématique qui étudie les interactions stratégiques entre des joueurs. À ce titre, elle est un des fondements axiomatiques en économie mathématique (interactions entre agents économiques) et est devenue un outil original en biologie de l'évolution (interactions entre organismes). Par interaction stratégique, on entend que les actions d'un joueur sont affectées par celles des autres joueurs. D'un côté, mon gain dépend de ce que font les autres (si un producteur d'énergie fixe un tarif, la facture du consommateur en dépend). D'un autre côté, l'information dont je dispose pour prendre une décision est aussi affectée par les actions des autres joueurs (selon que la nature de la consommation d'énergie est connue ou non, un producteur peut ajuster ou non son offre).

Le traitement des questions d'information en théorie des jeux a donné lieu à la création, par H. W. Kuhn, des jeux sous forme extensive [7]. De tels jeux sont formulés sur un arbre (un graphe acyclique), qu'il soit fini [7] ou bien infini [1]. Les jeux infinis ne sont pas une pure invention mathématique : ils se rencontrent quand des joueurs jouent un nombre indéterminé de fois (temps

discret ou continu), quand leurs actions sont continues (prix, quantités, par exemple) ou bien quand les joueurs eux-mêmes forment un continuum (jeux à champ moyen). Les difficultés de formuler des jeux infinis sous forme extensive sont bien reconnues [1]. En outre, en terme de modélisation, formuler un problème sur un arbre exige de disposer d'une chronologie et d'organiser les actions des joueurs le long des nœuds de l'arbre. Or, ceci peut être délicat quand l'ordre de jeu n'est pas clairement établi dès le début : par exemple, des joueurs prennent leurs actions en des points d'un réseau et leurs décisions dépendent à la fois du hasard et de ce que font leurs voisins ; autrement dit, la structure du problème est plutôt spatiale, mais le modèle d'arbre impose de subordonner la structure spatiale à la chronologie. De manière plus générale, R. Aumann parle du *rather cumbersome "tree" model for extensive games* [2].

L'objet de la thèse est de développer une alternative aux jeux sous forme extensive sur des arbres, à savoir les jeux sous forme produit inspirés du modèle dit intrinsèque de H. Witsenhausen [8]. Dans un jeu sous forme produit, chaque joueur dispose d'une relation de préférence sur les issues du jeu (par exemple, une croyance probabiliste et une fonction objectif) et d'un ensemble d'agents qui exécutent des actions (les exécutants du joueur). Chaque agent est équipé d'un espace mesurable où il prend ses actions ; la nature est aussi représentée par un espace mesurable. On forme le produit, l'espace des configurations, muni de la tribu produit. L'information de chaque agent (celle dont il dispose avant de prendre une décision) est représentée par une sous-tribu de la tribu des configurations.

Programme scientifique

Les jeux sous forme produit sont un objet mathématique nouveau pour lesquels à peu près tout reste à faire. Le modèle intrinsèque de H. Witsenhausen est quasiment inconnu en théorie des jeux (la seule mention se trouve dans [3]). Du point de vue théorique, un premier travail de correspondances entre jeux en arbres et jeux sous forme produit a été effectué [6]. De même, un théorème de Kuhn (équivalence entre stratégies mixtes et comportementales en mémoire parfaite) pour les jeux (infinis) a été établi pour les jeux sous forme produit [5]. Il reste à définir les notions d'équilibre de Nash, de sous-jeux, de sous-jeux en équilibre parfait, d'induction rétrograde, de jeux Bayésiens, de mécanismes d'incitation et de reformuler et de prouver les résultats classiques pour les jeux sous forme produit. En outre, nous comptons exploiter le fait (noté par H. Witsenhausen dans le cas d'un nombre fini d'agents [9]) que la structure d'information (la famille des sous-tribus des agents) induit naturellement une topologie d'Alexandroff sur l'ensemble des agents. La classification des structures d'information (séquentialité, mémoire parfaite, parallèle, hiérarchique, etc.) doit se poursuivre, en l'exprimant notamment avec des concepts topologiques.

Du point de vue algorithmique, on s'appuyera précisément sur la structure produit pour proposer des algorithmes de décomposition. C'est ainsi que les notions de sous-jeux et d'induction rétrograde seront, ici, plutôt reprises sous l'angle des notions de sous-systèmes et de décomposition, car la forme produit est, par nature, propice aux approches par décomposition (par groupes d'agents). On espère pouvoir faire de la programmation dynamique (induction rétrograde) par blocs d'agents.

Enfin, en matière de modélisation et d'applications, on profitera de l'extrême souplesse et flexibilité des jeux sous forme produit pour s'essayer à représenter des problèmes réels : tarification de contrats énergétiques, pilotage de smart grids avec coordination de différents acteurs, conception d'enchères, etc. D'un côté, Benjamin Heymann, qui travaille à Criteo, voit dans les enchères pour la publicité digitale un champ d'application prometteur. Il mentionne dans [4] le formalisme de

Witsenhausen dans un contexte où un acheteur est représenté par plusieurs agents qui ne communiquent pas entre eux. D’un autre côté, la transition numérique offre de nombreuses opportunités pour accompagner la transition énergétique. La difficulté est de collecter des masses de données — météorologiques à différentes échelles de temps, production d’énergies renouvelables, consommations d’énergie, etc. — et de s’en servir pour coordonner des acteurs — producteurs, consommateurs, agrégateurs — qui poursuivent des objectifs différents. Le formalisme des jeux sous forme produit est bien adapté pour représenter, de manière directe, de telles interactions informationnelles (sans avoir à créer un arbre dès le début). Il s’agira de voir si son caractère propice à la décomposition peut mener à des méthodes numériques pertinentes.

Références

- [1] Carlos Alós-Ferrer and Klaus Ritzberger. *The theory of extensive form games*. Springer Series in Game Theory. Springer-Verlag, Berlin, 2016.
- [2] Robert Aumann. Mixed and behavior strategies in infinite extensive games. In M. Dresher, L. S. Shapley, and A. W. Tucker, editors, *Advances in Game Theory*, volume 52, pages 627–650. Princeton University Press, 1964.
- [3] T. Basar and G. J. Olsder. *Dynamic noncooperative game theory*. Academic Press, New York, 1982.
- [4] Benjamin Heymann. How to bid in unified second-price auctions when requests are duplicated. *Operations Research Letters*, 48(4) :446–451, 2020.
- [5] Benjamin Heymann, Michel De Lara, and Jean-Philippe Chancelier. Kuhn’s equivalence theorem for games in product form, April 2021. Preprint hal-03006716, arXiv : 2011.08565.
- [6] Daniel Kadnikov. *Game Theory with Information. Games in Intrinsic Witsenhausen Form*. PhD thesis, Université Paris-Est, 2020. (<https://www.theses.fr/en/s185078>).
- [7] H. W. Kuhn. Extensive games and the problem of information. In H. W. Kuhn and A. W. Tucker, editors, *Contributions to the Theory of Games*, volume 2, pages 193–216. Princeton University Press, Princeton, 1953.
- [8] H. S. Witsenhausen. On information structures, feedback and causality. *SIAM J. Control*, 9(2) :149–160, May 1971.
- [9] H. S. Witsenhausen. The intrinsic model for discrete stochastic control : Some open problems. In A. Bensoussan and J. L. Lions, editors, *Control Theory, Numerical Methods and Computer Systems Modelling*, volume 107 of *Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems*, pages 322–335. sv, 1975.