

5/10/2017

MPRO - Stochastic Optimization

Exercice 1. On considère un problème de vendeur en gros de cidre. Vous pouvez acheter à l'instant initial u_0 litres de cidre pour un prix $p_0 = 0.5$. Il y a ensuite deux dates de ventes 1 et 2, où vous décidez de vendre une quantité u_i , au prix p_i , avec une quantité maximale vendue de b_i . Une fois les deux dates passées on ne pourra revendre le cidre (qui est donc perdu). On cherche à maximiser l'espérance des gains. Les probabilités sont données dans la table ci-après.

Probabilité	b_1	p_1	b_2	p_2
0.3	100	2	50	3
0.3	100	2	150	1
0.2	120	2.5	50	2
0.2	120	2.5	100	3

1. Écrire sous forme mathématique la fonction objectif du problème et les contraintes (à part les contraintes d'informations, qui seront spécifiées dans les questions suivantes).
2. On suppose ici que l'on ne vend pas de cidre à la date 2, que u_0 est choisit sans connaître la demande b_1 et le prix p_1 , et que u_1 est choisit en connaissant b_1 et p_1 .
 - (a) Écrire l'arbre représentant le problème en spécifiant la probabilité de chaque scénario et la valeur des variables aléatoires attachées aux scénarios.
 - (b) Écrire le problème linéaire déterministe équivalent au problème stochastique (i.e. le problème linéaire à résoudre pour calculer les commandes optimales).
3. On suppose maintenant que l'on peut également vendre lors de la date 2. On suppose que u_1 et u_2 sont prises connaissant (b_1, b_2, p_1, p_2) .
 - (a) Écrire l'arbre représentant le problème en spécifiant la valeur des variables aléatoires attachées aux scénarios.
 - (b) Écrire le problème linéaire déterministe équivalent au problème stochastique (i.e. le problème linéaire à résoudre pour calculer les commandes optimales).
4. On suppose finalement que u_1 est pris connaissant (b_1, p_1) et u_2 est pris connaissant (b_1, b_2, p_1, p_2) .
 - (a) Écrire l'arbre représentant le problème en spécifiant la valeur des variables aléatoires attachées aux scénarios.
 - (b) Écrire le problème linéaire déterministe équivalent au problème stochastique (i.e. le problème linéaire à résoudre pour calculer les commandes optimales).
5. Sans les calculer, classer (en justifiant) par ordre croissant les valeurs des problèmes d'optimisation des questions précédentes.

Exercice 2. Un maître d'oeuvre a remporté un appel d'offre pour un projet qui doit se réaliser sur 5 semaines. Il doit décider du nombre d'ouvriers qualifié (OQ) et non qualifié (ONQ) à recruter. Chaque ouvrier travaille 35h/semaine. Un ouvrier qualifié peut faire le travail d'un ouvrier non qualifié (mais pas l'inverse). Les ouvriers sont engagés pour le projet entier. L'heure planifiée (i.e. dans le contrat) d'un OQ est de 30€, et de 20€ pour un ONQ. L'heure supplémentaire d'un OQ est de 45€ et de 30€ pour un ONQ. Le maître d'oeuvre estime qu'il y a 4 scénarios possible pour le travail requis pour le projet :

- 50% de chance de nécessiter 500h d'OQ et 1000h d'ONQ;
- 20% de chance de nécessiter 700h d'OQ et 1100h d'ONQ;
- 20% de chance de nécessiter 600h d'OQ et 1300h d'ONQ;
- 10% de chance de nécessiter 800h d'OQ et 1500h d'ONQ.

On souhaite minimiser l'espérance de coût face aux différents scénarios.

1. Justifier que l'on peut modéliser le problème sous forme d'un problème "two-stage", en précisant la fonction objectif et les variables de première et seconde étape.
2. Ecrire la forme extensive du problème sous forme d'un problème linéaire en nombres entiers.
3. Discuter du critère d'optimisation et des contraintes.