

Examen d'optimisation stochastique

Vincent Leclère

10/11/2016

Name: _____

1 Partie Théorique

1. (6 points) On considère le système dynamique à valeur dans $\{0, 1, 2\}$ donné par

$$\mathbf{x}_{t+1} \equiv \mathbf{x}_t + \mathbf{u}_t + \mathbf{w}_{t+1}[3].$$

On suppose que $\mathbf{u}_t \in \mathbb{Z}$, $\mathbf{x}_0 = 0$, et que $(\mathbf{w}_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ est une suite de variable aléatoire i.i.d de Bernoulli de paramètre 0.5 (i.e. $\mathbb{P}(w_t = 1) = 0.5$ et $\mathbb{P}(w_t = 0) = 0.5$). Par exemple si $u_0 = 2$, $\mathbf{x}_1$ vaut 2 avec probabilité 0.5 ($\mathbf{w}_1 = 0$) et 0 sinon ($\mathbf{w}_1 = 1$).

On souhaite résoudre le problème suivant

$$\min_{u_0, \mathbf{u}_1} \mathbb{E}[|u_0| + |\mathbf{u}_1| + \mathbf{x}_2^2] \quad (1)$$

$$s.t. \quad \mathbf{x}_{t+1} \equiv \mathbf{x}_t + \mathbf{u}_t + \mathbf{w}_{t+1}[3] \quad (2)$$

$$\mathbf{u}_t \in \mathbb{Z} \quad (3)$$

$$u_0 \text{ déterministe} \quad \sigma(\mathbf{u}_1) \subset \sigma(\mathbf{w}_1) \quad (4)$$

- (a) (1 point) Expliquer pourquoi le problème peut-être résolu par programmation dynamique ? Donner la structure d'information du problème.

- (b) (1 point) Justifier que l'on peut se contenter d'étudier un nombre fini de contrôle u que l'on expliciteras.

- (c) (2 points) Trouver la valeur du problème par programmation dynamique. Donner la stratégie optimale sous forme de “look-up” table

- (d) (2 points) Trouver la borne inférieure obtenue en considérant une solution anticipative.

2. (6 points) Considérons le problème suivant

$$\begin{aligned} \min_{x, \mathbf{y}} \quad & \mathbb{E} \left[x^2 + \mathbf{y}^2 \right] \\ \text{s.t.} \quad & x + \mathbf{y} = \mathbf{d} \\ & \sigma(\mathbf{y}) \subset \sigma(\mathbf{d}) \end{aligned}$$

où $\mathbf{d}$ est une variable de Bernoulli de paramètre p (i.e. $\mathbb{P}(\mathbf{d} = 1) = p$ et $\mathbb{P}(\mathbf{d} = 0) = 1 - p$).

(a) (1 point) Justifier que ce problème est un “two-stage program”, et l’écrire sous forme extensive.

(b) (2.5 points) Introduire une variable supplémentaire de première étape pour représenter la contrainte de non-anticipativité et dualiser cette contrainte. Justifier qu’il n’y a pas de saut de dualité et expliciter le problème dual sous forme décomposée (on doit obtenir une maximization de somme de problèmes de minimisation indépendants).

- (c) (2.5 points) Expliciter les deux variables de premières étapes en fonction du multiplicateur de la contrainte de non-anticipativité. En déduire le multiplicateur optimal, les variables primales optimales et la valeur du problème.

2 Partie Modélisation

Rappel de probabilité: une variable aléatoire $\mathbf{X}$ suit une loi Binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ si elle est à support dans $\llbracket 0, n \rrbracket$, avec $\mathbb{P}(\mathbf{X} = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$.

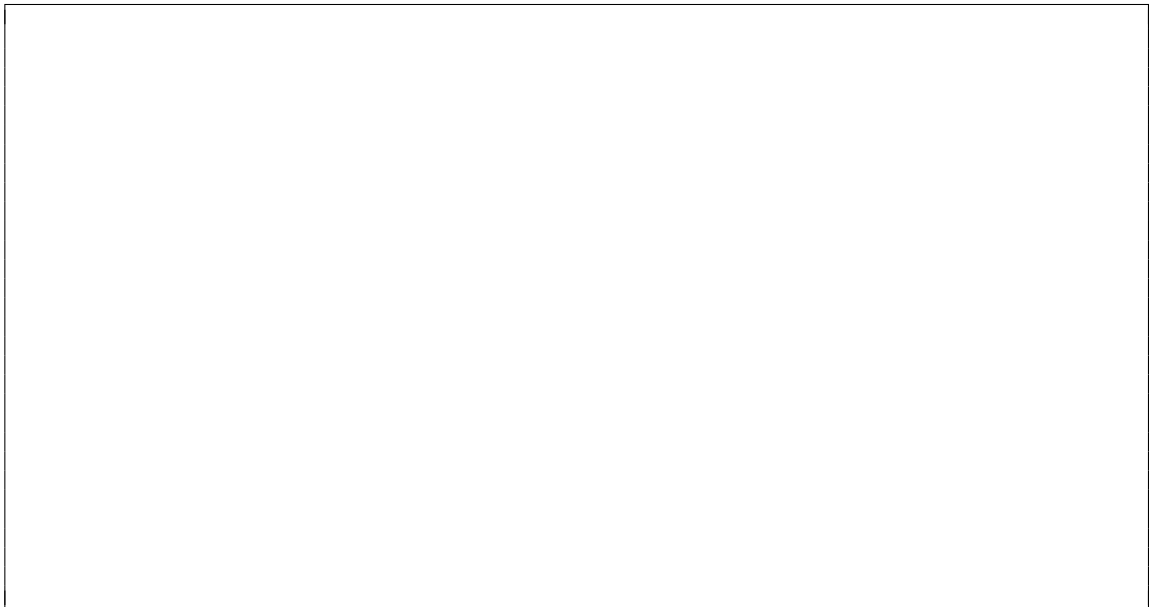
Dans les exercices suivants il sera parfois demandé de quelles bibliothèques vous avez besoin pour résoudre le problème. Par bibliothèque nous entendons des éléments de $\{\text{alg\`e\`re lin\`eaire, solveur lin\`eaire, solveur PLNE, solveur convexe, g\`en\`erateur de nombres al\`eatoires}\}$

L'objectif de l'examen n'étant pas d'évaluer vos connaissances en combinatoire vous pourrez définir des nombres avec des règles combinatoires du type : "soit A le nombre de vecteurs de tel espace à coordonnées entières vérifiant telle condition" quand la formule explicite est complexe.

3. (11 points) Un directeur d'usine dispose d'une chaîne de montage qui peut produire 10 types possibles de voitures (indicées par i). Il dispose d'un garage pouvant accueillir (gratuitement) jusqu'à 500 voitures. Au début de chaque mois il reçoit les commandes (nombre de voitures de chaque type) à livrer à la fin du mois, avec un maximum de 100 de chaque type. Le coût de production est donné par une fonction linéaire par morceau $c_t(u)$ où $u \in \mathbb{R}^{10}$ représente le vecteurs des quantités à produire durant le mois. A la fin de l'année les voitures en stock sont valorisées au prix unitaire π_i , $i \in \llbracket 1, 10 \rrbracket$. La demande en chaque type de voiture est modélisée par une loi binomiale $\mathcal{B}(100, p_{i,t})$ toutes étant indépendantes (en temps et en types de voitures). L'objectif est de minimiser l'espérance du coût annuel de production. Au début de l'année on suppose qu'il dispose de 50 voiture de chaque type dans son garage.
- (a) (2 points) Préciser le système dynamique contrôlé correspondant au problème. Spécifier son espace d'état, son espace de contrôle, sa dynamique et les bruits l'affectant. Quelle est la structure de décision : boucle ouverte, hasard-décision ou décision-hasard ? Quel est le coût instantané ? Quel est le coût final ?



- (b) (2 points) Formuler le problème d'optimisation sous forme mathématique.



- (c) (1 point) De quelle(s) bibliothèque(s) a-t-on besoin pour résoudre le problème par programmation stochastique ? Combien de feuilles dans l'arbre seront nécessaires ? Est-ce raisonnable ?

- (d) (1 point) Aujourd'hui le directeur de l'usine dispose d'un outil résolvant efficacement la version déterministe du problème (où l'on suppose connaître la demande pour toute l'année). Comment estimer une borne inférieure du coût de production annuel espéré ? A l'aide de quelle(s) bibliothèque(s) ?

- (e) (2 points) Écrire et justifier l'équation de programmation dynamique associée au problème.

- (f) (1 point) Si l'on dispose de la fonction de Bellman associée au problème, comment trouver la stratégie optimale ?

- (g) (1 point) Peut-on résoudre le problème par programmation dynamique ? Si oui combien d'opérations élémentaires (évaluation de fonction, somme, produit, test d'appartenance à un intervalle) sont nécessaires ? Si non quelle approximation est nécessaire ?

- (h) (1 point) Le directeur de l'usine vous demande de trouver une bonne stratégie de gestion de son stock de voiture, quelle type d'approche suggérez vous ?

4. (7 points) Considérons un problème de contrôle de mobile en dimension 3. Soit $\mathbf{x}_t \in \mathbb{R}^3$ la position du mobile à l'instant t et $\mathbf{u}_t \in \mathbb{R}^4$ le vecteur de contrôles que vous pouvez appliquer. On suppose qu'entre le contrôle que vous voulez appliqué et le contrôle réellement appliqué au mobile il y a une erreur $\mathbf{w}_t \in \mathbb{R}^4$. On suppose que l'erreur est i.i.d et telle que $\mathbb{E}[\mathbf{w}_t] = 0$. Le mobile évolue suivant une dynamique linéaire: $\mathbf{x}_{t+1} = A\mathbf{x}_t + B(\mathbf{u}_t + \mathbf{w}_t)$. De plus on suppose que le mobile est 0 à $t = 0$. Nous cherchons à minimiser sur 10 pas de temps l'espérance de la somme des carrés des écarts à une trajectoire $(x_t^{ref})_{t \in \llbracket 0, 10 \rrbracket}$ donnée: $\|\mathbf{x}_t - x_t^{ref}\|^2$ et des carrés des contrôles appliqués $\|\mathbf{u}_t\|^2$.

Aujourd'hui le problème est résolu par programmation dynamique en 1' en se fixant des bornes raisonnables sur $\mathbf{x}_t$ et $\mathbf{u}_t$ et en choisissant un pas de discrétisation pour l'état et le contrôle de 0.1.

- (a) (2 points) Écrire le problème sous forme d'un problème d'optimisation stochastique. Quelle est la structure d'information ?

- (b) (1 point) Écrire l'équation de programmation dynamique associée au problème.

- (c) (1 point) La qualité de la solution n'étant pas satisfaisante, on vous demande de diviser par 2 le pas de discrétisation (état et contrôle) pour avoir un contrôle plus fin. Combien de temps prendra la résolution du problème ?

- (d) (3 points) On vous demande de trouver un moyen plus rapide et au moins aussi précis de résoudre le problème, que proposez vous ? De quelles bibliothèque aurez-vous besoin ? Quels sont les avantages / inconvénients de votre suggestion ?