NOM, Prénom :

Exam a)
Optimisation stochastique (OS) 2019–2020
Master Parisien de Recherche Opérationnelle (MPRO)

Michel De Lara (cermics-enpc)

Lundi 6 janvier 2020

1 Optimisation stochastique à un pas de temps

- Chaque jour D, un producteur d'énergie doit décider d'une quantité u d'énergie, dans l'intervalle $[0, u^\sharp]$, où $u^\sharp > 0$. Cette énergie est "mise en réserve" et doit pouvoir être mobilisée en prévision de la demande d'énergie du jour $D+1$.
- En effet, le jour $D+1$, voit se réaliser une demande d'énergie, représentée par une variable aléatoire $\mathbf{W} : \Omega \to \mathbb{R}_+$, où $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ est un espace de probabilité.
- On suppose que $\mathbf{W}$ admet une densité continue f sur l'intervalle $[0, w^\sharp]$, où $w^\sharp > 0$:

$$\mathbb{P}_{\mathbf{W}}([a,b]) = \mathbb{P}\{\mathbf{W} \in [a,b]\} = \int_a^b f(w)dw \ , \ \ 0 \leq a \leq b \leq w^\sharp \ . \tag{1}$$

  La densité f est connue du vendeur.

- Les données économique sont les suivantes :
  - une unité d'énergie mise en réserve coûte $c > 0$;
  - une unité d'énergie vendue rapporte $p > c$;
  - une unité d'énergie invendue à la fin du jour $D+1$ coûte $h > -p$
    (coût de stockage, voire un coût négatif si cette énergie peut être revendue) ;
  - une unité d'énergie non satisfaite à la fin du jour $D+1$ coûte $b > 0$
    (coût d'insatisfaction de clients n'ayant pas obtenu leur demande).

- On note $j_0(u,w)$ le coût de décider la quantité d'énergie u le jour D et d'être confronté à la demande d'énergie w le jour $D+1$.

On pose le critère

$$J_0(u) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[j_0(u,\mathbf{W})] \ , \ \ \forall u \in \mathbb{R}_+$$

et on considère le problème d'optimisation stochastique

$$\min_{0 \leq u \leq u^\sharp} J_0(u) = \min_{0 \leq u \leq u^\sharp} \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[j_0(u,\mathbf{W})] \ . \tag{2}$$

1.1. Quelles sont les deux propriétés qui font de la fonction f une densité de probabilité ?

1.2. Pourquoi a-t-on $\int_0^{w^\sharp} wf(w)dw < +\infty$. Que représente cette quantité ?

1.3. Montrer qu'il existe deux coefficients h_- et h_+ tels que $-h_- < c < h_+$ et que l'on puisse écrire

$$j_0(u,w) = cu - pw + h_+[w-u]_+ + h_-[w-u]_- \ , \tag{3}$$

avec les notations $x_+ = \max\{0,x\}$ et $x_- = \max\{0,-x\}$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.

1.4. En utilisant (3), donner une formule (qui comprendra deux intégrales) pour

$$J_0(u) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[j_0(u, \mathbf{W})] \ , \ \ \forall u \in \mathbb{R}_+ \ . \tag{4}$$

1.5. Développer la formule précédente sous la forme

$$J_0(u) = XXXu + XXX + h_-[XXX - XXX] + h_+[XXX - XXX] \ , \ \ \forall u \in \mathbb{R}_+ \ . \tag{5}$$

1.6. Montrer que la fonction J_0 en (4) est dérivable sur $[0, +\infty[$ et que

$$J_0'(u) = c + h_- \int_0^u f(w)dw - h_+ \int_u^{w^\sharp} f(w)dw \ , \ \ \forall u \in [0, w^\sharp] \ . \tag{6}$$

Quelle est l'expression de $J_0'(u)$ pour $u \geq w^\sharp$? Quel est le signe de $J_0'(u)$ pour $u \geq w^\sharp$?

1.7. On suppose que la densité f est strictement positive. Montrer que la fonction J_0 en (4) a un unique minimum sur $[0, +\infty[$. Montrer que le problème d'optimisation stochastique (2) a une unique solution $u^\star$. Discuter la solution $u^\star$ selon deux cas.

2 Optimisation stochastique à deux pas de temps

On suppose que la demande en énergie peut prendre un nombre S fini de valeurs possibles w^s, $s \in \mathbb{S}$. Ici, le terme s désigne un *scenario* dans l'ensemble S fini (S=card($\mathbb{S}$)). On note π^s la probabilité du scenario s, avec

$$\sum_{s \in \mathbb{S}} \pi^s = 1 \text{ et } \pi^s \geq 0 \ , \ \ \forall s \in \mathbb{S} \ .$$

2.1. Proposer un espace de probabilité Ω, une probabilité $\mathbb{P}$ finie sur Ω et une variable aléatoire $\mathbf{W} : \Omega \to \mathbb{R}$ naturellement attachés aux données ci-dessus.

2.2. Exprimer ce que représente le problème d'optimisation suivant

$$\min_{u_0 \in \mathbb{R}_+, \left\{u_1^s\right\}_{s \in \mathbb{S}} \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{S}}} \sum_{s \in \mathbb{S}} \pi^s j^s(u_0, u_1^s) \tag{7}$$

où

$$j^s(u_0, u_1^s) = c_0 u_0 + c_1^s u_1^s + h_+^s [w^s - u_0 - u_1^s]_+ + h_-^s [w^s - u_0 - u_1^s]_- \ . \tag{8}$$

2.3. Montrer que le problème d'optimisation (7) peut se mettre sous la forme

$$\min_{u_0 \in \mathbb{R}_+} \sum_{s \in \mathbb{S}} \pi^s Q^s(u_0) \tag{9}$$

où $Q^s(u_0)$ est la valeur d'un problème d'optimisation (lequel ?).

2.4. On suppose que $-h_-^s < c^s < h_+^s$ pour tout scenario $s \in \mathbb{S}$. Montrer que

$$Q^s(u_0) = c_0 u_0 + c_1^s [w^s - u_0]_+ + h_-^s [w^s - u_0]_- \ , \ \ \forall u_0 \geq 0 \ , \ \ \forall s \in \mathbb{S} \ . \tag{10}$$

2.5. En déduire que, pour tout scenario $s \in \mathbb{S}$, la fonction Q^s s'exprime comme le maximum de deux fonctions affines. À quelle classe de fonctions appartient la fonction Q^s ?

2.6. Quel algorithme est inadapté à la résolution numérique du problème d'optimisation (7) ? Pourquoi ?

2.7. Quel algorithme est adapté à la résolution numérique du problème d'optimisation (7) ? En quoi l'algorithme est plus simple dans notre cas.