

NOM, Prénom :
---------------

*Mini-Exam b)*  
Optimisation stochastique (OS) 2019–2020  
Master Parisien de Recherche Opérationnelle (MPRO)

Michel DE LARA (CERMICS-ENPC)

Lundi 20 janvier 2020

Toutes les variables aléatoires sont dénotées en lettres capitales grasses. Soient  $\mathbf{W}_1$  et  $\mathbf{W}_2$  deux variables aléatoires indépendantes avec

$$\mu = \mathbb{E}[\mathbf{W}_1] = \mathbb{E}[\mathbf{W}_2], \quad \rho^2 = \mathbb{E}[\mathbf{W}_1^2] = \mathbb{E}[\mathbf{W}_2^2] = \sigma^2 + \mu^2. \quad (1)$$

Soient  $k_0$  et  $k_1$  deux scalaires. Nous considérons le problème d'optimisation stochastique

$$\min \quad \mathbb{E}[k_0^2 u_0^2 + k_1^2 \mathbf{U}_1^2 + \mathbf{X}_2^2], \quad (2)$$

où toutes les variables sont des scalaires et où

$$x_0 \in \mathbb{R}, \quad \mathbf{X}_1 = x_0 + u_0 + \mathbf{W}_1, \quad \mathbf{X}_2 = \mathbf{X}_1 + \mathbf{U}_1 + \mathbf{W}_2, \quad (3)$$

avec des solutions de la forme  $u_0 = \gamma_0^*(x_0)$ ,  $\mathbf{U}_1 = \gamma_1^*(\mathbf{X}_1)$ , où  $\gamma_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  pour  $i = 0, 1$ .

1. Quelles sont les équations de la dynamique ? Justifier votre réponse et identifier l'état.

2. Quel est le coût final? Quels sont les coûts instantanés?

3. Pourquoi est-il possible d'écrire une équation de programmation dynamique avec  $x$  pour état?

4. Donner l'équation de programmation dynamique. Que vaut  $V_2(x)$ ? Quelles sont les deux équations reliant les fonctions valeurs  $V_0(x)$ ,  $V_1(x)$  et  $V_2(x)$ ?

5. Résoudre l'équation de programmation dynamique reliant  $V_1(x)$  et  $V_2(x)$ . Montrer que la politique optimale à  $t = 1$  est

$$\gamma_1^*(x) = -\frac{x + \mu}{k_1^2 + 1}. \quad (4)$$

6. En déduire que

$$V_1(x) = \frac{k_1^2}{k_1^2 + 1}(x + \mu)^2 + \sigma^2. \quad (5)$$

7. Résoudre l'équation de programmation dynamique reliant  $V_0(x)$  et  $V_1(x)$ , puis calculer la politique optimale  $\gamma_0^*(x)$  à  $t = 0$ . On trouvera

$$\gamma_0^*(x) = -\frac{k_1^2}{k_0^2 + k_1^2 + k_0^2 k_1^2}(x + 2\mu). \quad (6)$$

8. Partant de l'état initial  $x_0 = 0$ , quelles sont les trajectoires optimales d'état et de contrôle? Interpréter le problème d'optimisation (2)–(3) et les trajectoires optimales. Que se passe-t-il dans le cas où  $k_1 = 0$ ? Que se passe-t-il dans le cas où  $k_0 = 0$ ?

