

Cours RTE 2022

*Optimisation Stochastique*

Mars-avril 2022

P. Carpentier<sup>\*</sup>, J.-P. Chancelier<sup>†</sup>, M. De Lara<sup>‡</sup>, V. Leclère<sup>§</sup>  
École des Ponts ParisTech

---

<sup>\*</sup>pierre.carpentier@ensta-paris.fr

<sup>†</sup>jean-philippe.chancelier@enpc.fr

<sup>‡</sup>michel.delara@enpc.fr

<sup>§</sup>vincent.leclere@enpc.fr

## Résumé

Dans un problème d'optimisation déterministe, les valeurs de tous les paramètres sont supposées connues. Comment formuler un problème d'optimisation dans lequel les données sont incertaines (par exemple, les prix des énergies)? Et quand certaines valeurs des données sont révélées au cours des étapes de décision (par exemple, les demandes en énergie)? L'optimisation stochastique est un cadre pour répondre à de telles questions et pour formuler des problèmes sous incertitude. C'est également un ensemble de méthodes de résolution.

Dans ce cours, nous présentons

- l'*optimisation stochastique* statique (à une étape),
- la *programmation stochastique* à deux étapes (et la résolution sur arbre de scénarios ou par scénarios),
- le *contrôle stochastique* à temps discret (et la résolution par *programmation dynamique stochastique*).

Comme les problèmes d'optimisation stochastique multi-étapes sont généralement trop difficiles pour être résolus d'une manière directe, nous présentons ensuite des méthodes avancées permettant de résoudre ces problèmes par décomposition. Enfin, nous ouvrons sur les mesures de risque.

**Mots-clés :** programmation stochastique, arbre de scénarios, *Progressive Hedging*, commande optimale stochastique, programmation dynamique stochastique, *Stochastic Dual Dynamic Programming*, décomposition.

Lien: <http://cermics.enpc.fr/~delara/TEACHING/coursRTE2022/coursRTE2022/>

## Table des matières

1	Séance 1. Mercredi 30 mars 2022 (9h00-12h30). <i>Programmation stochastique à une étape</i>	4
2	Séance 2. Mercredi 30 mars 2022 (14h00-17h30). <i>De la programmation stochastique à une étape vers deux étapes</i>	5
3	Séance 3. Vendredi 8 avril 2022 (9h00-12h30). <i>Programmation stochastique à deux étapes (méthodes numériques)</i>	6
4	Séance 4. Vendredi 8 avril 2022 (14h00-17h30). <i>Programmation dynamique stochastique</i>	7
5	Séance 5. Vendredi 15 avril 2022 (9h00-12h30). <i>Politiques <math>(s, S)</math> de gestion de stocks. Mise en perspective des méthodes. Mesures de risque</i>	8
6	Séance 7. Vendredi 22 avril 2022 (9h00-12h30). <i>Méthodes de décomposition</i>	8
7	Séance 9. Mercredi 18 mai 2022 (9h00-17h30). <i>Séance interactive sur des problèmes RTE</i>	8

Au cours de la première partie du cours (séances 1 à 5), nous présentons les deux approches mathématiques standards traitant des problèmes d'optimisation stochastique multi-étapes, c'est-à-dire la programmation stochastique et la commande optimale stochastique.

Dans la deuxième partie du cours (séances 6 à 8), nous présentons des extensions. Comme les problèmes d'optimisation stochastique multi-étapes sont souvent trop difficiles pour être résolus d'une manière directe, nous détaillons des méthodes avancées permettant de résoudre ces problèmes par décomposition — c'est-à-dire d'itérativement (en parallèle ou séquentiellement) résoudre des sous-problèmes de taille raisonnable, plutôt que l'ensemble. Nous présentons également les mesures de risque et comment les incorporer dans des problèmes d'optimisation stochastique.

La formation alterne séances de cours, de modélisation et d'exercices. Des diapositives correspondantes (en Anglais) sont mises en ligne sur le site web (un astérisque \* dénote un support de cours particulièrement adapté à la séance courante).

## 1 Séance 1. Mercredi 30 mars 2022 (9h00-12h30).

### *Programmation stochastique à une étape*

**Orateur** : Michel De Lara [9h00-12h30]

Nous étudions la *programmation stochastique* à une étape au travers d'exemples.

Idée-clef : le résultat d'un problème d'optimisation stochastique est la distribution des valeurs aléatoires prises par le critère ; c'est au décideur de choisir entre plusieurs distributions selon son type d'aversion au risque.

#### **Exercice (1h00)**

Nous commençons par un exercice de modélisation de tests sanguins groupés. Nous formulerons un problème d'optimisation *stochastique* de minimisation du nombre *moyen* de tests en fonction de la taille des groupes. Nous comparerons la taille optimale obtenue à celle correspondant au problème d'optimisation *robuste* de minimisation du *pire* nombre de tests. Nous comparerons les distributions du nombre de tests selon la taille des groupes.

#### **Cours (1h00)**

Nous ferons des rappels de calcul des probabilités : espace de probabilité, probabilité, variable aléatoire (v.a.), loi d'une v.a., fonction indicatrice, espérance mathématique, indépendance, loi forte des grands nombres.

#### **Exercice (1h00)**

Nous poursuivons en étudiant le problème dit du vendeur de journaux. Le vendeur doit décider le matin du nombre (déterministe) de journaux qu'il va commander, alors que la

demande est aléatoire (de distribution supposée connue). Nous montrons comment le nombre optimal de journaux dépend de la distribution de probabilité de la demande.

Lecture suggérée : [SDR09, Chap. 1]

## 2 Séance 2. Mercredi 30 mars 2022 (14h00-17h30). *De la programmation stochastique à une étape vers deux étapes*

**Orateur** : Vincent Leclère [14h00–15h30]

### Cours (1h30)

Nous avançons de la programmation stochastique à une étape vers deux étapes.

Idée-clef : quand une première décision est prise avant la réalisation d'un aléa et une seconde décision est prise après la réalisation d'un aléa, la façon mathématique de représenter cela est par le biais d'une *contrainte de non-anticipativité*; formuler un problème d'optimisation stochastique sur un arbre de scénarios est une façon de coder directement une contrainte de non-anticipativité.

Nous encadrons la valeur d'un problème stochastique par celles obtenues par un décideur myope (contraintes d'information durcies - boucle ouverte) et par un décideur clairvoyant (contraintes d'information relâchées - anticipative).

Nous discutons ensuite de l'extension au cas multi-étape sur un arbre de scénario et des limites numériques associées.

Lectures suggérées : § 2.1, 2.2 et 2.3 de [SDR09, Chap. 2]

**Orateur** : Jean-Philippe Chancelier [16h00–17h30]

### Cours (1h30)

Rappels sur convexité et optimisation.

- Rappels sur la convexité : ensembles convexes, fonctions convexes, convexité stricte et forte (caractérisation par le Hessien dans le cas régulier), opérations préservant convexité.
- Formulation abstraite d'un problème de minimisation : critère, contraintes. Conditions suffisantes pour l'existence d'un minimum (continuité et compacité/coercivité). Condition suffisante pour l'unicité d'un minimum (convexité stricte). Exercices avec une fonction objectif quadratique sur un intervalle.

- Définition d'un minimiseur local ; condition nécessaire dans le cas différentiable. Formulation d'un problème de minimisation sous contraintes d'égalité explicites. Conditions nécessaires d'optimalité du premier ordre dans le cas de contraintes d'égalité régulières ou affines ; Lagrangien, dualité, multiplicateurs. Conditions suffisantes d'optimalité du premier ordre dans le cas convexe-affine. Exercices.

### 3 Séance 3. Vendredi 8 avril 2022 (9h00-12h30).

#### *Programmation stochastique à deux étapes (méthodes numériques)*

Nous développons la programmation stochastique à deux étapes, particulièrement dans le cas d'un espace de probabilité fini (scénarios).

Idée-clef : la programmation stochastique à deux étapes se prête naturellement à des méthodes de décomposition, soit par scénario (*Progressive Hedging*) soit temporelle (*L-shaped*).

**Orateur** : Michel De Lara [9h00–10h30]

#### **Cours (1h30)**

Nous montrons comment passer d'un problème d'optimisation mono-étape — soit déterministe polyédral sans contraintes soit linéaire — à un problème d'optimisation stochastique linéaire à deux étapes.

Nous poursuivons la programmation stochastique à deux étapes et montrons comment la contrainte de non-anticipativité peut être prise en compte

- en indiquant les solutions par un arbre de scénarios,
- ou en indiquant les solutions par un peigne, puis en écrivant des égalités entre composantes de la solution.

Avec cette deuxième façon de faire, nous introduisons la *décomposition par scénarios*, puis le *Progressive Hedging* [RW91].

**Orateur** : Vincent Leclère [11h00-12h30]

#### **Cours (1h30)**

Après avoir présenté les notions de recours complet ou relativement complet, nous nous intéressons particulièrement au cas des problèmes stochastique linéaires (avec éventuelles variables entières pour la première étape). Après avoir décomposé le problème en deux pas

de temps, nous exploitons la dualité linéaire pour introduire la *L-shaped method*, qui est une méthode standard de résolution de tel problèmes.

## 4 Séance 4. Vendredi 8 avril 2022 (14h00-17h30). *Programmation dynamique stochastique*

**Orateur** : Vincent Leclère [14h00-15h30]

### **Cours (1h30)**

Nous soulevons les difficultés du passage de la programmation stochastique à deux étapes vers plusieurs étapes. À l'aide d'une hypothèse de bruits temporellement indépendant, nous présentons la programmation dynamique stochastique. L'idée clef étant l'existence d'un *état* qui contient les informations suffisantes pour prendre une décision optimale à une étape donnée. La programmation dynamique stochastique consistant alors à décomposer le problème global en une suite de problèmes à une étape.

Nous introduisons le formalisme des opérateurs de Bellman qui transfère une fonction de coût futur sur  $[t + 1, T]$  en une fonction de coût sur  $[t, T]$ , ainsi que la politique associée.

Finalement nous soulignons les malédictions de la dimension, inhérentes aux méthodes de programmation dynamique.

Lecture suggérée : [Ber00, Chap. 1]

**Orateur** : Michel De Lara [16h00-17h30]

### **Exercice (0h45)**

Croissance et reproduction optimales d'une plante.

### **Cours (0h45)**

Contrôle optimal stochastique avec coûts quadratiques et dynamique linéaire, sans contraintes sur la commande.

### **Travail pratique informatique (optionnel)**

Programmation de l'algorithme de programmation dynamique.

**5 Séance 5. Vendredi 15 avril 2022 (9h00-12h30).**  
***Politiques  $(s, S)$  de gestion de stocks. Mise en perspective des méthodes. Mesures de risque***

**Orateur :** Jean-Philippe Chancelier [9h00–10h00]

**Cours (1h00)**

Politique  $(s, S)$  dans le problème du vendeur de journaux multi-étapes.

**6 Séance 7. Vendredi 22 avril 2022 (9h00-12h30).**  
***Méthodes de décomposition***

**Orateur :** Pierre Carpentier [9h00-12h30]

Au cours de cette séance, nous explorerons différents schémas de décomposition permettant de diviser un problème de contrôle stochastique optimal — impliquant un grand nombre d’unités — afin d’obtenir plusieurs sous-problèmes à petite échelle. Ces méthodes permettent de résoudre les sous-problèmes par la programmation dynamique ou par SDDP.

**Cours (1h30)**

*Mélange de techniques de décomposition et de programmation dynamique.* Nous donnerons tout d’abord quelques exemples classiques de problèmes d’optimisation de grande taille et nous rappellerons les concepts d’optimisation nécessaires pour mettre en œuvre les méthodes de décomposition. Puis, nous rappellerons deux méthodes classiques de décomposition et coordination, dans un cadre très général (Hilbertien). Nous nous interrogerons enfin sur les particularités de la décomposition dans le cadre des problèmes d’optimisation stochastique dynamique et sur la difficulté en stochastique du mélange de la décomposition et de la programmation dynamique

**7 Séance 9. Mercredi 18 mai 2022 (9h00-17h30).**  
***Séance interactive sur des problèmes RTE***

**Références**

[Ber00] D. P. Bertsekas. *Dynamic Programming and Optimal Control*. Athena Scientific, Belmont, Massachusetts, second edition, 2000. Volumes 1 and 2.

- [CCCD15] P. Carpentier, J.-P. Chancelier, G. Cohen, and M. De Lara. *Stochastic Multi-Stage Optimization. At the Crossroads between Discrete Time Stochastic Control and Stochastic Programming*. Springer-Verlag, Berlin, 2015.
- [RW91] R.T. Rockafellar and R. J-B. Wets. Scenarios and policy aggregation in optimization under uncertainty. *Mathematics of operations research*, 16(1) :119–147, 1991.
- [SDR09] A. Shapiro, D. Dentcheva, and A. Ruszczyński. *Lectures on stochastic programming : modeling and theory*. The society for industrial and applied mathematics and the mathematical programming society, Philadelphia, USA, 2009.