Décision dans l'incertain

Le problème du vendeur de journaux

Jean-Philippe CHANCELIER

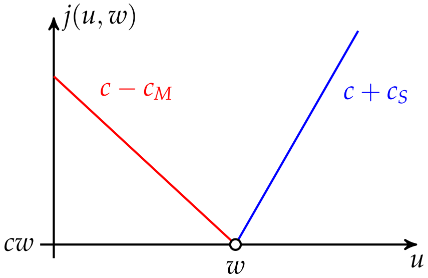
24 février 2022

Le problème du vendeur de journaux (une période)

- Chaque matin, le vendeur doit décider d'un nombre de journaux à commander $u \in \mathbb{U} = \{0, 1, \ldots\}$ au prix unitaire $c > 0$.
- La demande du jour est incertaine $w \in \mathbb{W} = \{0, 1, \ldots\}$
  - Si, à la fin de la journée, il lui reste des invendus : coût unitaire $c_S \in \mathbb{R}$.
  $$c_S(u - w)_+ = c_s \underbrace{\max(u - w, 0)}_{\text{invendus}}, \qquad c > -c_S$$
  - Si, à la fin de la journée, il n'a pas pu faire face à la demande on associe un coût unitaire c_M. Le coût lié à la non satisfaction de la demande est
  $$c_M(w - u)_+ = c_M \underbrace{\max(w - u, 0)}_{\text{manquants}}$$

FACE À UNE DEMANDE ALÉATOIRE, LE COÛT EST ALÉATOIRE

$$j(u,w) = \underbrace{cu}_{\text{achats}} + \underbrace{c_s(u-w)_+}_{\text{invendus}} + \underbrace{c_M(w-u)_+}_{\text{manquants}}$$



$$\mathrm{Argmin}_{u\in\mathbb{U}}\, j(u,w) = \{w\}$$: Quantité inconnue w !

Choix d'un critère en espérance

Le choix du critère : attitude face au risque du décideur. Comme le vendeur de journaux va vendre ses journaux chaque jour, on choisit ici un critère en espérance :

$$\min_{u \in \mathbb{U}} J(u) \quad \text{avec } J(u) := \underbrace{\mathbb{E}_w[j(u,w)]}_{\text{Espérance}}$$

Ce n'est pas le seul critère possible : Un vendeur de journaux pessimiste pourrait minimiser le pire des cas (utilise le support $\overline{\mathbb{W}}$ de la loi de la demande) :

$$\min_{u \in \mathbb{U}} J(u) \quad \text{avec } J(u) := \underbrace{\max_{w \in \overline{\mathbb{W}}} j(u,w)}_{\text{Pire des cas}}$$

Minimisation du coût en espérance

- On suppose que la demande, $\boldsymbol{W}$, est une variable aléatoire et le vendeur de journaux connaît, $\mathbb{P}_{\boldsymbol{W}}$, la loi de $\boldsymbol{W}$.
- Le coût à minimiser devient

$$J(u) = \mathbb{E}_{\boldsymbol{W}}[cu + c_s(u - \boldsymbol{W})_+ + c_M(\boldsymbol{W} - u)_+]$$

  fonction convexe pour $u \in \mathbb{R}_+$
- Le problème du vendeur de journaux devient

$$u^\star \overset{?}{\in} \operatorname*{Argmin}_{u \in \mathbb{U}} J(u)\,.$$

  Le vendeur de journaux prend une décision déterministe face à un aléa dont il connaît la loi mais pas la réalisation (Décision-Hasard).

MINIMISATION DU COÛT EN ESPÉRANCE

Commande optimale $u^\star$:

- Si $c_M \leq c$ alors J est une fonction croissante et ne rien commander est optimal.
- Si $c_M > c$ alors J atteint son minimum en $u^\star$:

$$u^\star = \inf\{z \in \mathbb{R} \,|\, F(z) \geq (c_M - c)/(c_M + c_S)\}$$

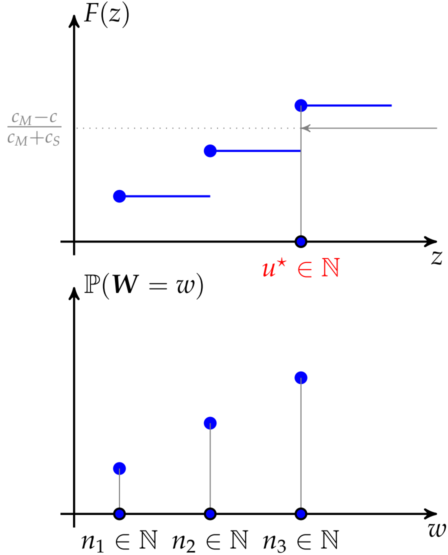
  où F est la fonction de répartition de $\boldsymbol{W}$, $F(z) = \mathbb{P}(\boldsymbol{W} \leq z)$.
- Si $\boldsymbol{W}$ est une variable aléatoire entière alors $u^\star \in \mathbb{N}$

En effet :

$$\begin{aligned} J(u) &= c_M \mathbb{E}_{\boldsymbol{W}}[\boldsymbol{W}] + (c - c_M)u + (c_M + c_S)\mathbb{E}_{\boldsymbol{W}}[(u - \boldsymbol{W})_+] \\ &= c_M \mathbb{E}_{\boldsymbol{W}}[\boldsymbol{W}] + (c - c_M)u + (c_M + c_S)\int_0^u F(z)dz \end{aligned}$$

J est continue et coercive pour $u \in \mathbb{R}_+$. Pour $c_M > c$ elle décroît puis croît avec un minimum en $u^\star$.

Minimisation du coût en espérance

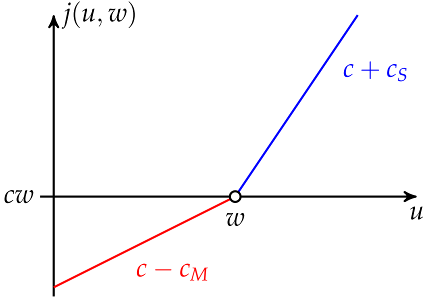


La commande optimale prend des valeurs entières

$$u^\star = \inf \left\{ z \in \mathbb{R} \,|\, F(z) \geq \frac{c_M - c}{c_M + c_S} \right\} ,$$

si la demande est une variable aléatoire entière.

Minimisation du coût en espérance $c_M \leq c$

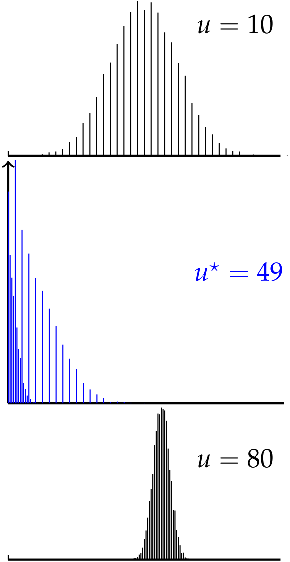


On remarque que

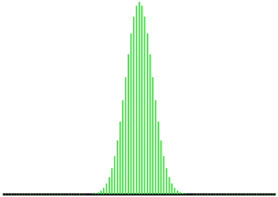
$$\min_{u \in \mathbb{U}} J(u) \geq \min_{u = \phi(\boldsymbol{W})} J(u) = \mathbb{E}_{\boldsymbol{W}}\big[\min_{u \in \mathbb{U}} j(u, \boldsymbol{W})\big]$$

Or $\min_{u \in \mathbb{U}} j(u,w)$ est atteint pour $u = 0$ pour tout w et donne une commande admissible pour le problème $\min_{u \in \mathbb{U}} j(u,w)$.

DISTRIBUTION DES COÛTS $j(u, \boldsymbol{W})$



Distribution de la demande $\mathrm{bin}(100, 1/2)$.



Stock initial et coût fixe d'approvisionnement

On suppose ici que l'on peut avoir un stock initial $x \in \mathbb{Z}$ et que toute commande a un coût fixe c_F. Le coût à minimiser devient maintenant :

$$\begin{aligned}
\widetilde{J}(u) &= \mathbb{E}_{\boldsymbol{W}}\left[c_F \mathbb{I}_{\{u>0\}} + cu + c_s(x+u-\boldsymbol{W})_+ + c_M(\boldsymbol{W}-x-u)_+\right] \\
&= c_F \mathbb{I}_{\{u>0\}} - cx + \mathbb{E}_{\boldsymbol{W}}\left[j(u+x,\boldsymbol{W})\right] \\
&= c_F \mathbb{I}_{\{u>0\}} + J(u+x) - cx
\end{aligned}$$

Commande optimale $u^\star(x)$ pour $c_M > c$:

La commande optimale est une stratégie (s, S) :

$$u^\star(x) = (S - x)\mathbb{I}_{\{x \leq s\}}$$

Quand le stock devient en dessous de s, on commande des journaux de façon à ramener le stock à S. La valeur de S est donnée par $\operatorname{Argmin}_{u \in \mathbb{U}} J(u)$.

Stock initial et coût fixe d'approvisionnement

Soit S le stock donné par $\{S\} = \operatorname{Argmin}_{u \in \mathbb{U}} J(u)$.

- Si $x \geq S$, il est optimal de ne rien faire ($J(\cdot) \nearrow$ et $c_F \geq 0$) :

$$\widetilde{J}(0) = J(x) - cx \leq J(x+u) - cx + c_F = \widetilde{J}(u)$$

- Si $x \leq S$, comme $J(\cdot)$ est minimale en S :
  - Si on commande, il faut commander $u = S - x$ de coût

$$\widetilde{J}(u) = J(S) - cx + c_F$$

  - Si on ne commande rien le coût est $J(x) - cx$

On doit choisir la solution la moins coûteuse, Il faut donc compléter son stock jusqu'à S si $J(x) \geq c_F + J(S)$ et ne rien faire sinon. De plus, on remarque que :

$$\{x \,|\, J(x) \geq c_F + J(S)\} = \{x \,|\, x \leq s\}$$

où s est donné par

$$\text{où} \quad s := \sup\{z \in (-\infty, S) \,|\, J(z) \geq c_F + J(S)\}$$

STOCK INITIAL ET COÛT FIXE D'APPROVISIONNEMENT

Posons $\boldsymbol{X}_0 = x$ et $\boldsymbol{X}_1 = f(\boldsymbol{X}_0, u)$ avec $f(x, u) := x + u - w$ et $\widetilde{j}(u, x_1) := c_F \mathbb{I}_{\{u>0\}} + cu + c_s(x_1)_+ + c_M(-x_1)_+$

Le vendeur de journaux : problème dynamique

$$\min_{\boldsymbol{U} \in \mathcal{U}, \boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{X}_0} \mathbb{E}_{\boldsymbol{W}}[\widetilde{j}(\boldsymbol{U}, \boldsymbol{X}_1)]$$

sous contraintes

$$\boldsymbol{X}_0 = x \quad \boldsymbol{X}_1 = f(X_0, \boldsymbol{U}, \boldsymbol{W})$$

Avec une contrainte de non-anticipativité

$$\mathcal{U} = \{\boldsymbol{U} : \mathbb{X}_0 \to \mathbb{N}\}$$

La commande du nombre de journaux est contrainte à n'utiliser que l'information disponible $\boldsymbol{X}_0 = x$ et pas la demande future $\boldsymbol{W}$.

Une "chaîne" de Markov

Les deux stocks de journaux $\boldsymbol{X}_0$ et $\boldsymbol{X}_1$ peuvent être vus comme les états d'une chaîne de Markov controlée. On peut autoriser des stocks négatifs et on a alors a priori $X_0 \in \mathbb{Z}$ et $X_1 \in \mathbb{Z}$.

- Supposant $u \in \mathbb{N}$ fixé, la matrice de transition de la chaîne de Markov est
$$P^u_{x_0,x_1} = \mathbb{P}(\boldsymbol{X}_1 = x_1 | \boldsymbol{X}_0 = x_0)$$
$$P^u_{x_0,x_1} = \begin{cases} \mathbb{P}(\boldsymbol{W} = w_0) & \text{si } x_1 = x_0 + u - w_0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$
- Supposant que u puisse être choisi comme une fonction de X_0, $u = \phi(\boldsymbol{X}_0)$, alors
$$P^\phi_{x_0,x_1} = \begin{cases} \mathbb{P}(\boldsymbol{W} = w_0) & \text{si } x_1 = x_0 + \phi(x_0) - w_0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$
- Étudier des problèmes sur N pas de temps sera l'objet du prochain cours.

TEMPS D'ARRÊT ET PROBLÈME DE CONTRÔLE

Soit P la matrice de transition d'une chaine de Markov d'espace d'état $\mathbb{X}$. On considère $\mathbb{Y} = \mathbb{X} \cup \Delta$ et deux matrices de transition

$$\forall (x,y) \in \mathbb{X} \quad P^{C}_{x,y} = P_{x,y} \quad \text{et} \quad P^{C}_{\Delta,\Delta} = 1 \quad \text{(continue)}$$

et

$$\forall (x,y) \in \mathbb{X} \quad P^{S}_{x,y} = 0 \quad \text{et} \quad \forall x \in \mathbb{Y} \quad P^{S}_{x,\Delta} = 1 \quad \text{(stop)}$$

On cherche à évaluer un coût sur un pas de temps pour la chaîne partant de $X_0 = x \in \mathbb{X}$

$$v(x) = \sup_{u \in \{C,S\}, X_0 = x} \mathbb{E}\left[c(u, X_0) + f_1(X_1)\right]$$

où la matrice de transition de la chaîne est P^u si le contrôle utilisé est u et avec $c(C,\cdot) = 0$ et $c(S,x) = f_0(x)$ et $f_1(\Delta) = 0$. On obtient pour $x \in \mathbb{X}$

$$v(x) = \sup\left(\sum_{y \in \mathbb{X}} P_{x,y} f_1(y), f_0(x)\right)$$

Un programme linéaire

Le problème du vendeur de journaux

$$\min_{u \in \mathbb{U}} J(u) = \mathbb{E}_{\boldsymbol{W}}[j(u, \boldsymbol{W})]$$

avec

$$j(u, w) = c_M w + (c - c_M)u + (c_M + c_S)(u - w)_+$$

peut s'écrire comme un problème linéaire

EXPLICITONS L'ESPÉRANCE

La demande $\boldsymbol{W}$ prend un nombre fini S de valeurs w_s, $s \in \mathbb{S}$, avec probabilité π_s

$$\mathbb{P}(\boldsymbol{W} = s) = \pi_s \ , \ \ \forall s \in \mathbb{S}$$

$$\sum_{s \in \mathbb{S}} \pi_s = 1 \quad \text{ et } \quad \pi_s \geq 0 \ , \ \ \forall s \in \mathbb{S}$$

Le critère à minimiser s'écrit alors

$$J(u) = \sum_{s \in \mathbb{S}} \pi_s \big(c_M w_s + (c - c_M)u + (c_M + c_S)(u - w_s)_+ \big)$$

Explicitons le max $(\cdot)_+$ avec des variables supplémentaires (Optim S1)

$$(u - w_s)_+ = \max\{0, u - w_s\} = \min\left\{v_s | vs \geq 0 \text{ et } v_s \geq u - w_s\right\}$$

$$\begin{aligned}
J(u) &= \sum_{s \in \mathbb{S}} \pi_s \big(c_M w_s + (c - c_M)u + (c_M + c_S)(u - w_s)_+ \big) \\
&= \sum_{s \in \mathbb{S}} \pi_s \min_{\substack{v_s \geq 0 \ , \quad \forall s \in \mathbb{S} \\ v_s \geq u - w_s \ , \quad \forall s \in \mathbb{S}}} c_M w_s + (c - c_M)u + (c_M + c_S) v_s \\
&= \min_{\substack{v_s \geq 0 \ , \quad \forall s \in \mathbb{S} \\ v_s \geq u - w_s \ , \quad \forall s \in \mathbb{S}}} \sum_{s \in \mathbb{S}} \pi_s \big(c_M w_s + (c - c_M)u + (c_M + c_S) v_s \big)
\end{aligned}$$

Le problème du vendeur de journaux comme un programme linéaire

$$\min_{u\in\mathbb{U},(v_s)_{s\in\mathbb{S}}\in\mathbb{V}^{\mathbb{S}}} \sum_{s\in\mathbb{S}} \pi_s\big(c_M w_s + (c-c_M)u + (c_M+c_S)v_s\big)$$

$$\begin{aligned}
&\text{sous les contraintes}\\
&v_s \geq u - w_s \quad \forall s \in \mathbb{S}\\
&v_s \geq 0 \quad \forall s \in \mathbb{S}\\
&u \geq 0
\end{aligned}$$

On obtient un programme linéaire en nombres entiers ($\mathbb{U} = \mathbb{N}$ et $\mathbb{V} = \mathbb{N}$) et on peut étudier la version relâchée ($\mathbb{U} = \mathbb{R}$ et $\mathbb{V} = \mathbb{R}$).

Question :

Est-ce que la version relâchée donne une solution entière ?

LA CONTRAINTE DE MESURABILITÉ

Le fait que la commande $u \in \mathbb{U}$ doit être la même pour toutes les réalisations de w_s peut s'exprimer en introduisant de nouvelles commandes $u_s \in \mathbb{U}^{\mathbb{S}}$ (duplication de variables) et en les contraignant a être toutes égales, $u_s = u \quad \forall s \in \mathbb{S}$.

$$\min_{u \in \mathbb{U}, u_s \in \mathbb{U}^{\mathbb{S}}, (v_s)_{s \in \mathbb{S}} \in \mathbb{V}^{\mathbb{S}}} \sum_{s \in \mathbb{S}} \pi_s \big(c_M w_s + (c - c_M) u_s + (c_M + c_S) v_s \big)$$

$$\begin{aligned} & \text{sous les contraintes} \\ & v_s \geq u - w_s \quad \forall s \in \mathbb{S} \\ & v_s \geq 0 \quad \forall s \in \mathbb{S} \\ & u \geq 0 \\ & u_s = u \quad \forall s \in \mathbb{S} \end{aligned}$$

Si on dualise les contraintes, $u_s = u \quad \forall s \in \mathbb{S}$, on découple les problèmes s par s. Des méthodes numériques sont basées sur cette idée.

POUR ALLER PLUS LOIN : COURS DE L'ÉCOLE DES PONTS

- 1A : cours d'« Optimisation » (matrices unimodulaires)
- 2A :
  - cours de « Recherche Opérationnelle »
  - cours d'« Optimisation et contrôle »
  - cours « Modéliser l'Aléa »