Processus avec sauts et applications au marché de l'énergie

Examen du lundi 2 mars 2009 15h15-17h15

Les deux parties sont à rédiger sur des copies différentes.

I Changement aléatoire de temps

Soit h une fonction continue définie sur $\mathbb{R}$ à support compact telle que $h(x) = x$ sur un voisinage de 0. Soit X une variable aléatoire infiniment divisible de caractéristique (b, c, F) où $b \in \mathbb{R}$, $c \geq 0$ et F est une mesure positive sur $\mathbb{R}$ telle que $F(\{0\}) = 0$ et $\int_{\mathbb{R}} 1 \wedge \ell^2 \, F(d\ell) < +\infty$. On note μ la loi de X et $\hat{\mu}$ sa transformée de Fourier. On rappelle que $\hat{\mu}(u) = \mathbb{E}[\mathrm{e}^{iuX}] = \mathrm{e}^{\psi(u)}$ où

$$\psi(u) = ibu - c\frac{u^2}{2} + \int_{\mathbb{R}} F(d\ell) \left(\mathrm{e}^{iu\ell} - 1 - iuh(\ell)\right).$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère $(X_k^n, k \in \mathbb{N}^*)$ des variables aléatoires indépendantes et de même loi μ_n, telles que $\sum_{k=1}^n X_k^n$ a même loi que X. Soit N_n une variable aléatoire indépendante de loi de Poisson de paramètre n. On pose $Z_n = \sum_{k=1}^{N_n} X_k^n$.

1. Montrer que $(Z_n, n \geq 1)$ converge en loi vers X.
2. Montrer, en utilisant le cours, que $\lim_{n\to\infty} n\mu_n(g) = F(g)$ pour toute fonction g continue bornée et nulle sur un voisinage de 0.
3. On suppose que X est positive p.s. : $\mathbb{P}(X \geq 0) = 1$.
   (a) En utilisant la formule de représentation des processus de Lévy (ou processus à accroissements indépendants et stationnaires), montrer que $c = 0$.
   (b) Montrer par l'absurde que $\mathbb{P}(X_1^n \leq -a) = 0$ pour tout $a > 0$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$.
   (c) En déduire que $F(]-\infty, 0]) = 0$.
   (d) Soit $\lambda > 0$. On pose $g_\lambda(x) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda x}$. Montrer que $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[\mathrm{e}^{-\lambda Z_n}] = \mathbb{E}[\mathrm{e}^{-\lambda X}]$. En déduire que la suite $(n\mu_n(g_\lambda), n \in \mathbb{N}^*)$ est bornée par une constante C_λ.
   (e) En considérant des régularisations des fonctions $f_\varepsilon(x) = x\mathbf{1}_{[\varepsilon,1]}(x)$, déduire de la question précédente que $\int_{\mathbb{R}^+} 1 \wedge \ell \, F(d\ell) < +\infty$.
   (f) Déduire de ce qui précède que
   $$\psi(u) = ib'u + \int_{\mathbb{R}^+} F(d\ell) \left(\mathrm{e}^{iu\ell} - 1\right). \tag{1}$$
   On admet que (1) implique que pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ de partie réelle positive, on a
   $$\mathbb{E}[\mathrm{e}^{-\lambda X}] = \mathrm{e}^{-b'\lambda - \int_{\mathbb{R}^+} F(d\ell)\left(1 - \mathrm{e}^{-\lambda\ell}\right)}. \tag{2}$$
   (g) Montrer que la fonction $\varphi(\lambda) = b'\lambda + \int_{\mathbb{R}^+} F(d\ell) \left(1 - \mathrm{e}^{-\lambda\ell}\right)$ est croissante. Calculer φ' en le justifiant et en déduire que b' est positif.

Soit $(X_t, t \geq 0)$ une processus de Lévy tel que X_1 ait même loi que X. On suppose que p.s. X est positif.

4. Vérifier que $(X_t, t \geq 0)$ est un processus croissant.

Soit $(B_t, t \geq 0)$ un mouvement brownien indépendant de $(X_t, t \geq 0)$. On modélise le prix d'un actif à l'instant t par $\mathrm{e}^{\mu B_{X_t} + \nu X_t}$. Il s'agit d'une variante du modèle de Black-Sholes où l'horloge propre du marché est différente du temps réel et le temps du marché est modélisé par le processus $(X_t, t \geq 0)$.

5. Montrer que $(\mu B_{X_t} + \nu X_t, t \geq 0)$ est un processus de Lévy et donner sa transformée de Fourier en utilisant (2).

II Dualité Call-Put dans un modèle exponentiel de Lévy

On s'intéresse à un sous-jacent de valeur initiale $x > 0$ qui évolue comme l'exponentielle $X_t^x = xe^{Z_t}$ d'un processus de Lévy $(Z_t)_{t\geq 0}$. On note $b \in \mathbb{R}$, σ^2 où $\sigma \in \mathbb{R}_+$ et F mesure sur $\mathbb{R}$ t.q. $F(\{0\}) = 0$ et $\int_{\mathbb{R}} 1 \wedge z^2 F(dz) < +\infty$ le triplet tel que

$$\forall t \geq 0,\ \forall u \in \mathbb{R},\ \mathbb{E}(e^{iuZ_t}) = e^{t\psi(u)} \text{ où } \psi(u) = ibu - \frac{\sigma^2 u^2}{2} + \int_{\mathbb{R}} (e^{iuz} - 1 - iuz1_{\{|z|\leq 1\}})F(dz).$$

On se donne une maturité $T \in]0, +\infty[$ et on note $\mathcal{F}_t = \sigma(X_s^x, s \leq t)$.

1. Montrer que $(-Z_t)_{t\geq 0}$ est un processus de Lévy sous $\mathbb{P}$ et donner son triplet de caractéristiques.
2. Rappeler la représentation de Lévy-Itô du processus $(Z_t)_{t\geq 0}$.
3. On suppose d'abord que F **est la mesure nulle, que** $\sigma > 0$ **et que** $b = r - \delta - \frac{\sigma^2}{2}$. On note $C_e(x, y, r, \delta) = \mathbb{E}\left(e^{-rT}(X_T^x - y)^+\right)$, $C_a(x, y, r, \delta) = \sup_{\tau\in\mathcal{T}} \mathbb{E}\left(e^{-r\tau}(X_\tau^x - y)^+\right)$, $P_e(x, y, r, \delta) = \mathbb{E}\left(e^{-rT}(y - X_T^x)^+\right)$ et $P_a(x, y, r, \delta) = \sup_{\tau\in\mathcal{T}} \mathbb{E}\left(e^{-r\tau}(y - X_\tau^x)^+\right)$ les prix des Calls et Puts européens et américains de strike $y > 0$ et de maturité T lorsque r désigne le taux d'intérêt sans risque, δ le taux de dividendes versé par l'actif et $\mathcal{T}$ l'ensemble des $\mathcal{F}_t$-temps d'arrêt à valeurs dans $[0, T]$.
   (a) Vérifier que $(e^{(\delta-r)t}X_t^x)_{t\geq 0}$ est une $\mathcal{F}_t$-martingale sous $\mathbb{P}$.
   (b) Vérifier que sous la probabilité $\mathbb{Q}$ de densité $\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} = e^{(\delta-r)T+Z_T}$ par rapport à $\mathbb{P}$, le processus $(-Z_t)_{t\in[0,T]}$ est un processus de Lévy et donner son triplet de caractéristiques ? En déduire que
   $$C_e(x, y, r, \delta) = P_e(y, x, \delta, r).$$
   (c) Pour $t \geq 0$, on pose $Y_t^y = ye^{-Z_t}$. Montrer que pour $\tau \in \mathcal{T}$,
   $$\mathbb{E}\left(e^{-r\tau}\left(X_\tau^x - y\right)^+\right) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left(e^{-\delta\tau}\left(x - Y_\tau^y\right)^+\right).$$
   Vérifier que $\mathcal{F}_t = \sigma(Y_s^y, s \leq t)$ et en déduire que $C_a(x, y, r, \delta) = P_a(y, x, \delta, r)$.
4. On suppose désormais que $\int_{\mathbb{R}} e^z F(dz) < +\infty$.
   (a) Calculer $\mathbb{E}(e^{Z_t})$ et en déduire b pour que $(e^{(\delta-r)t}X_t^x)_{t\leq T}$ soit une $\mathcal{F}_t$-martingale sous $\mathbb{P}$.

   Dans la suite, c'est cette valeur que l'on fixe pour b.

   (b) Montrer que pour un processus de Lévy $(\zeta_t)_{t\leq T}$ dont on précisera le triplet de caractéristiques $\mathbb{E}\left(e^{-rT}(X_T^x - y)^+\right) = \mathbb{E}\left(e^{-\delta T}(x - ye^{\zeta_T})^+\right)$. Vérifier que $(e^{(r-\delta)t+\zeta_t})_{t\leq T}$ est une martingale sous $\mathbb{P}$ pour la filtration $\mathcal{G}_t = \sigma(\zeta_s, s \leq t)$. Montrer que si $\tilde{\mathcal{T}}$ désigne l'ensemble des $\mathcal{G}_t$-temps d'arrêt à valeurs dans $[0, T]$
   $$\sup_{\tau\in\mathcal{T}} \mathbb{E}\left(e^{-r\tau}(X_\tau^x - y)^+\right) = \sup_{\tau\in\tilde{\mathcal{T}}} \mathbb{E}\left(e^{-\delta\tau}(x - ye^{\zeta_\tau})^+\right).$$
   (c) À quelle condition sur la mesure de Lévy F le marché est-il symétrique au sens où la mesure de Lévy de $(\zeta_t)_{t\leq T}$ est égale à F ? Comment cette condition s'écrit-elle dans le cas où F possède une densité f par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$?

Correction

I Changement aléatoire de temps

1. On a $\psi_{Z_n}(u) = \mathrm{e}^{-n(1-\psi_{X_1^n}(u))}$ et
$$\psi_{X_1^n}(u) = \psi_X(u)^{1/n} = \mathrm{e}^{\frac{1}{n}\log(\psi_X(u))} = 1 + \frac{1}{n}\log(\psi_X(u)) + o(1/n).$$
On en déduit que $\psi_{Z_n}(u) = \psi_X(u) + o(1)$. Ceci assure que $(Z_n, n \in \mathbb{N}^*)$ converge en loi vers X ;
2. Z_n a pour caractéristique $(n\mu_n(h), 0, n\mu_n)$ et converge en loi vers X de caractéristique (b, c, F). Ceci implique, d'après le cours, que $\lim_{n\to\infty} n\mu_n(g) = F(g)$ pour toute fonction g continue bornée et nulle sur un voisinage de 0.
3. (a) La formule de représentation assure que $X = cG + X'$ où G est de loi $\mathcal{N}(0,1)$ et X' est indépendant de G et de caractéristique $(b, 0, F)$. On a $\mathbb{P}(X < 0) = \mathbb{P}(cG < -X') = \mathbb{E}[\varphi(X')]$ où $\varphi(x) = \mathbb{P}(cG < -x)$. Si $c \neq 0$, on a $\varphi > 0$ et donc $\mathbb{P}(X < 0) > 0$. On déduit le résultat par contraposée.

   (b) Soit $a > 0$ tel que $\mathbb{P}(X_1^n \leq -a) > 0$. On a
$$\mathbb{P}(X \leq -na) = \mathbb{P}(\sum_{k=1}^n X_k^n \leq -na) \geq \mathbb{P}(X_k^n \leq -a \text{ pour } 1 \leq k \leq n) > 0.$$
On déduit le résultat par contraposée.

   (c) Soit g_ε une fonction continue telle que $\mathbf{1}_{]-\infty,-\varepsilon[} \leq g_\varepsilon \leq \mathbf{1}_{]-\infty,-\varepsilon/2[}$. On a $\mu_n(g_\varepsilon) = 0$. La question I.2 assure alors, par passage à la limite, que $F(]-\infty, -\varepsilon[) = 0$ pour tout $\varepsilon > 0$. Comme $F(\{0\}) = 0$, on en déduit que $F(]-\infty, 0]) = 0$.

   (d) On considère la fonction continue bornée $f(z) = \mathrm{e}^{-\lambda z}\,\mathbf{1}_{\{z\geq 0\}} + \mathbf{1}_{\{z<0\}}$. La question I.3 assure que p.s. $f(Z_n) = \mathrm{e}^{-\lambda Z_n}$. On a $\mathbb{E}[f(Z_n)] = \mathrm{e}^{-n\mu_n(g_\lambda)}$. La convergence de la question I.1 assure que
$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{e}^{-n\mu_n(g_\lambda)} = \lim_{n\to\infty} = \mathbb{E}[f(X)] = \mathbb{E}[\mathrm{e}^{-\lambda X}].$$
Comme X est p.s. fini, on a $\mathbb{E}[\mathrm{e}^{-\lambda X}]$ strictement positif. Il vient $\lim\limits_{n\to\infty} n\mu_n(g_\lambda) = -\log(\mathbb{E}[\mathrm{e}^{-\lambda X}])$ qui est donc fini. On en déduit que la suite $(n\mu_n(g_\lambda), n \in \mathbb{N}^*)$ est bornée par une constante C_λ.

   (e) Soit $\tilde{f}_\varepsilon$ une fonction continue telle que $f_\varepsilon \leq \tilde{f}_\varepsilon \leq f_{2\varepsilon} + \mathbf{1}_{]1,1+\varepsilon]}$. On a $\tilde{f}_\varepsilon \leq \mathrm{e}^{-1} g_1$. On déduit de la question précédente et de la question I.2 que
$$\mathrm{e}^{-1} C_1 \geq \lim_{n\to\infty} n\mu_n(\tilde{f}_\varepsilon) = F(\tilde{f}_\varepsilon) \geq F(f_\varepsilon).$$
Par le théorème de convergence monotone, on obtient que $F(f_0) = \int_{]0,1]} \ell\, F(d\ell)$ est majoré par $\mathrm{e}^{-1} C_1$ et est donc fini.

   (f) On déduit de la question précédente que $\int_{\mathbb{R}} F(d\ell)|h(\ell)| < +\infty$. Comme $F(\mathbb{R}_-) = 0$, on obtient (1) avec $b' = b - \int_{\mathbb{R}} F(d\ell)h(\ell)$.

   (g) La fonction $\lambda \mapsto \mathbb{E}[\mathrm{e}^{-\lambda X}]$ est décroissante. Ceci implique que φ est croissante. Le théorème de convergence dominée implique que φ est $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ et que pour $\lambda > 0$,
$$\varphi'(\lambda) = b' + \int_{\mathbb{R}_+} F(d\ell)\; \ell\, \mathrm{e}^{-\lambda \ell}.$$

On déduit du théorème de convergence dominée que $\lim_{\lambda\to\infty} \varphi'(\lambda) = b'$. Comme φ est croissante, on en déduit que $b' \geq 0$.

4. Soit $t > 0$. Soit $n > t$. On a $X_1 = X_{t/n} + X'$ où X' est indépendant de $X_{t/n}$. Un raisonnement similaire à celui de la question I.3.a assure que $X_{t/n}$ est p.s. positive. Comme $X_t = \sum_{k=1}^n X_k^{n,t}$, où les variables aléatoires $(X_k^{n,t}, k \in \mathbb{N}^*)$ sont indépendantes de même loi que $X_{t/n}$, on en déduit que X_t est p.s. positive. Comme $X_{t+s} - X_s$ a même loi que X_t, on en déduit que le processus X est croissant.
5. On pose $S_t = \mu B_{X_t} + \nu X_t$. Remarquons que l'accroissement $X_{t+s} - X_s$ est indépendant de $((B_{X_u}, X_u), u \leq s)$ et a même loi que X_t. Comme $B_{X_{t+s}} - B_{X_s} = B_{(X_{t+s}-X_s)+X_s} - B_{X_s}$, et que le mouvement brownien est à accroissement indépendant et stationnaire, on en déduit que $(B_{X_{t+s}} - B_{X_s}, X_{t+s} - X_s)$, est indépendant de $((B_{X_u}, X_u), u \leq s)$ et a même loi que (B_{X_t}, X_t). On en déduit que $S_{t+s} - S_s$ est indépendant de $((B_{X_u}, X_u), u \leq s)$, et donc de $(S_u, u \leq s)$, et a même loi que S_t. Donc $(S_t, t \geq 0)$ est un processus de Lévy.

   En conditionnant d'abord par rapport à X_t, on obtient

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[e^{iuS_t}\right] &= \mathbb{E}\left[e^{iu\mu B_{X_t} + iu\nu X_t}\right] \\
&= \mathbb{E}\left[e^{-\frac{\mu^2 u^2}{2} X_t + iu\nu X_t}\right] \\
&= \exp\left(-b'(\frac{\mu^2 u^2}{2} - i\nu u)t - t\int_{\mathbb{R}_+} F(d\ell)\left(1 - e^{-\ell(\frac{\mu^2 u^2}{2} - i\nu u)}\right)\right).
\end{aligned}$$