Processus avec sauts et applications au marché de l'énergie

Examen du lundi 8 mars 2010 16h00-18h00

Les deux parties sont à rédiger sur des copies différentes.

I Intégrabilité

1. Soit Y et Z deux variables aléatoires réelles indépendantes. Montrer que $Y+Z$ est intégrable si et seulement si Y et Z sont intégrables. Pour la réciproque, on pourra considérer $\mathbb{E}[|Y+Z||Z]$.
2. Soit $N(dr,dv)=\sum_{i\in I}\delta_{(r_i,V_i)}(dt,dv)$ une mesure ponctuelle de Poisson sur $[0,t]\times\mathbb{R}$ d'intensité $dr\times\mu(dv)$, où μ est une mesure finie. On définit la fonction f sur $[0,t]\times\mathbb{R}$ par $f(r,x)=x$ et on a $N(f)=\sum_i V_i$.
   (a) On suppose $\mu(]-\infty,0[)=0$. Montrer que $N(f)$ est intégrable si et seulement si $\int_{[0,+\infty[} x\ \mu(dx)<+\infty$.
   (b) Déduire des questions précédentes que $N(f)$ est intégrable si et seulement si $\int_{\mathbb{R}}|x|\ \mu(dx)<+\infty$.
   (c) (FACULTATIF). On ne suppose plus μ finie mais simplement que μ est une mesure σ-finie sur $\mathbb{R}$: Il existe une partition $(E_n,n\in\mathbb{N})$ de $\mathbb{R}$ telle que $\mu(E_n)<+\infty$ pour tout $n\in\mathbb{N}$. Montrer que $N(f)$ est intégrable si et seulement si $\int_{\mathbb{R}}|x|\ \mu(dx)<+\infty$.

Soit h une fonction continue définie sur $\mathbb{R}$ à support compact telle que $h(x)=x$ sur un voisinage de 0. Soit $(X_t,t\geq 0)$ un processus à accroissements indépendants et stationnaires (PAIS) de caractéristique (b,c,F) où $b\in\mathbb{R}$, $c\geq 0$ et F est une mesure positive sur $\mathbb{R}$ telle que $F(\{0\})=0$ et $\int_{\mathbb{R}} 1\wedge\ell^2\ F(d\ell)<+\infty$. On rappelle que $\mathbb{E}[\mathrm{e}^{iuX_t}]=\mathrm{e}^{t\psi(u)}$ où

$$\psi(u)=ibu-c\frac{u^2}{2}+\int_{\mathbb{R}}F(d\ell)\left(\mathrm{e}^{iu\ell}-1-iuh(\ell)\right).$$

3. Donner des conditions nécessaires et suffisantes sur (b,c,F) pour que X_t soit intégrable.
4. (FACULTATIF). Donner des conditions nécessaires et suffisantes sur (b,c,F) pour que X_t soit de carré intégrable.

II Changement de mesure de Lévy

Sur l'espace de probabilité $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ soit $(X_t)_{t\geq 0}$ un processus de Lévy de triplet de caractéristiques (b,c,F) avec $b\in\mathbb{R}$, $c\in\mathbb{R}_+$ et F mesure sur $\mathbb{R}$ t.q. $F(\{0\})=0$ et $\int_{\mathbb{R}}1\wedge x^2F(dx)<+\infty$ et $\mathcal{F}_t=\sigma(X_s,0\leq s\leq t)$. On note

$$N(dt,dx)=\sum_{s>0:\Delta X_s\neq 0}\delta_{(s,\Delta X_s)}(dt,dx)$$

la mesure ponctuelle associée aux sauts de ce processus et $\tilde{N}(dt,dx)=N(dt,dx)-F(dx)dt$. On se donne également $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}_+$ une fonction mesurable telle que $\int_{\mathbb{R}}(h(x)-1)^2F(dx)<+\infty$ et on pose $F_h(dx)=h(x)F(dx)$. Pour $A\in\mathcal{B}(\mathbb{R})$, on note

$$Z_t^A=\int_{]0,t]\times A}(h(x)-1)\tilde{N}(ds,dx)=\int_{]0,t]\times\mathbb{R}}1_A(x)(h(x)-1)\tilde{N}(ds,dx)\quad\text{et}\quad Y_t^A=\mathcal{E}(Z^A)_t$$

son exponentielle de Doléans-Dade. On pose $Z_t=Z_t^{\mathbb{R}}$ et $Y_t=Y_t^{\mathbb{R}}$.

1. Que peut-on dire du processus Z_t^A ? Calculer $\mathbb{E}\left((Z_t^A)^2\right)$.
2. Exprimer ΔY_t^A à l'aide de ΔX_t et en déduire que pour tout $t \geq 0$, $\mathbb{P}(\Delta Y_t^A \neq 0) = 0$. On pose $\tau_n = \inf\{s \geq 0 : \int_0^s (Y_r^A)^2 dr \geq n\}$. Vérifier que le processus $1_{\{s \leq \tau_n\}} Y_{s^-}^A$ est prévisible.
   En admettant la formule intuitive $Y_{t\wedge\tau_n}^A = 1 + \int_{]0,t]\times A} 1_{\{s\leq\tau_n\}} Y_{s^-}^A (h(x)-1)\tilde{N}(ds,dx)$, vérifier que
   $$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall t \geq 0,\ \mathbb{E}\left((Y_{t\wedge\tau_n}^A)^2\right) \leq e^{t\int_A (h(x)-1)^2 F(dx)}.$$
   En déduire que $(Y_t^A)_{t\geq 0}$ est une martingale de carré intégrable.
3. Soient $A, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ t.q. $A \cap B = \emptyset$. Vérifier que $[Y^A, Y^B]_t = 0$.
   En calculant $d(Y^A \times Y^B)_t$ conclure que $Y_t^{A\cup B} = Y_t^A \times Y_t^B$.
4. L'intégrale $\int_{\mathbb{R}} (1 \wedge x^2)^2 F(dx)$ est-elle finie ?
   En déduire que $\int_{\mathbb{R}} (1\wedge x^2)|h(x)-1|F(dx) < +\infty$ puis que $\int_{\mathbb{R}} (1 \wedge x^2) F_h(dx) < +\infty$.

Soit $T > 0$. L'objectif de la suite du problème est de montrer que sous $\tilde{\mathbb{P}}$ de densité $\frac{d\tilde{\mathbb{P}}}{d\mathbb{P}} = Y_T$ par rapport à $\mathbb{P}$, la restriction de N à $[0,T]\times\mathbb{R}$ est une mesure ponctuelle de Poisson d'intensité $F_h(dx)dt$ i.e. $(X_t)_{t\in[0,T]}$ est un processus de Lévy de triplet de caractéristiques (b, c, F_h). Pour cela on se contentera de vérifier que pour $A, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ t.q. $A \cap B = \emptyset$, $0 \leq s < t \leq T$ et $0 \leq u < v \leq T$,

$$\forall \lambda, \mu > 0,\ \tilde{\mathbb{E}}\left(e^{-\lambda N(]s,t]\times A) - \mu N(]u,v]\times B)}\right) = e^{(t-s)F_h(A)(e^{-\lambda}-1)} e^{(v-u)F_h(B)(e^{-\mu}-1)}. \qquad (1)$$

5. Montrer que $F\left(\{x \in A : h(x) \leq \frac{1}{2}\}\right) \leq 4\int_{\mathbb{R}} (h(x)-1)^2 F(dx)$. En déduire que si $F(A) = +\infty$, alors $F\left(\{x \in A : h(x) > \frac{1}{2}\}\right) = +\infty$ et $F_h(A) = +\infty$. Conclure que si $F(A) + F(B) = +\infty$ alors (1) est satisfaite.
6. Vérifier que
   $$\tilde{\mathbb{E}}\left(e^{-\lambda N(]s,t]\times A) - \mu N(]u,v]\times B)}\right) = \mathbb{E}\left(e^{-\lambda N(]s,t]\times A)} \frac{Y_t^A}{Y_s^A}\right) \times \mathbb{E}\left(e^{-\mu N(]u,v]\times B)} \frac{Y_v^B}{Y_u^B}\right).$$
7. Soit $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ t.q. $F(A) < +\infty$.
   (a) Montrer que $\int_{\mathbb{R}} 1_A(x)|h(x)-1|F(dx) < +\infty$ et en déduire que $F_h(A) < +\infty$.
   (b) Quelle est la loi de $N(]s,t]\times A)$ sous $\mathbb{P}$?
   (c) Vérifier que $\frac{Y_t^A}{Y_s^A} = e^{(t-s)(F(A)-F_h(A))} \prod_{r\in]s,t]:\Delta X_r \in A\setminus\{0\}} h(\Delta X_r)$ où le produit porte presque sûrement sur un nombre fini de termes.
   (d) En déduire que si $\mathcal{E}(\zeta^A)_t$ désigne l'exponentielle de Doléans-Dade du processus $\zeta_t^A \stackrel{\text{def}}{=} \int_{]0,t]\times A} (e^{-\lambda} h(x) - 1)\tilde{N}(ds,dx)$, alors
   $$e^{(t-s)(1-e^{-\lambda})F_h(A) - \lambda N(]s,t]\times A)} \times \frac{Y_t^A}{Y_s^A} = \frac{\mathcal{E}(\zeta^A)_t}{\mathcal{E}(\zeta^A)_s}.$$
   En raisonnant comme dans la question 2, que peut-on dire du processus $(\mathcal{E}(\zeta^A)_t)_{t\geq 0}$ sous $\mathbb{P}$?
   (e) Conclure que $\mathbb{E}\left(e^{-\lambda N(]s,t]\times A)} \frac{Y_t^A}{Y_s^A}\right) = e^{(t-s)F_h(A)(e^{-\lambda}-1)}$ et que (1) est vérifiée lorsque $F(A) + F(B) < +\infty$.

Correction

I Intégrabilité

1. Si Y et Z sont intégrables alors $Y+Z$ est intégrable.

   On suppose que $Y+Z$ est intégrable. Alors $\mathrm{P}_Z(dz)$-p.p. $\mathbb{E}[|Y+Z|\ |Z=z]$ est fini. Comme Y et Z sont indépendants, on a $\mathrm{P}_Z(dz)$-p.p. $\mathbb{E}[|Y+Z|\ |Z=z]=\mathbb{E}[|Y+z|]$. On en déduit que $\mathbb{E}[|Y|]$ est fini et donc Y est intégrable et $Z=(X+Y)-Y$ aussi.

2. (a) On a
   $$\mathbb{E}\left[\mathrm{e}^{-\lambda N(f)}\right]=\mathrm{e}^{-t\int \mu(dx)\ \left(1-\mathrm{e}^{-\lambda f(x)}\right)}.$$
   Comme $N(f)\geq 0$ et $f(x)\geq 0$ $\mu(dx)$-p.p., on peut dériver cette égalité par rapport à λ, et faire tendre λ vers 0. Il vient :
   $$\mathbb{E}[N(f)]=t\int f(x)\ \mu(dx).$$
   Donc $N(f)$ est intégrable si et seulement si $\int_{[0,+\infty]} x\ \mu(dx)$ est fini.

   (b) On a $N(f)=N_+(f)+N_-(f)$ où N_+ et N_- sont des mesures ponctuelles de Poisson indépendantes d'intensité $dr\times \mathbf{1}_{\{v\geq 0\}}\mu(dv)$ et $dr\times \mathbf{1}_{\{v<0\}}\mu(dv)$. La question 1 assure que $N(f)$ est intégrable si et seulement si $N_+(f)$ et $N_-(f)$ sont intégrables. La question 2-(a) assure que ceci est vrai si et seulement si $\int_{[0,+\infty]} x\ \mu(dx)$ et $\int_{]-\infty,0[} x\ \mu(dx)$ sont finis.

   (c) Les démonstrations des questions 2-(a) et 2-(b) ne changent pas si μ n'est pas finie.

3. Quitte à considérer $X_t+t\int (h(x)-x\mathbf{1}_{\{|x|>1\}})\ dx$, on peut supposer que $h(x)=\mathbf{1}_{||x|\leq 1\}}$. On pose pour $k\in\mathbb{N}^*$, $Z_t^{(k)}=\sum_{s\leq t}\Delta X_s \mathbf{1}_{\{|\Delta X_s|\in]1/k,1/(k-1)]\}}$. On remarque que les processus $(Z^{(k)},k\in\mathbb{N}^*)$ sont des processus de Poissons composés indépendants de paramètres $(\theta_k,F^{(k)}/\theta_k)$ où $\theta_k=\int_{I_k} F(dx)$ et $F^{(k)}(dx)=\mathbf{1}_{I_k}(x)\ F(dx)$, avec $I_k=]1/k,1/(k-1)]$.

   Le théorème de représentation assure que $X_t=bt+cW_t+Z_t^{(1)}+M_t$, où W est un mouvement Brownien standard et $M=\sum_{k\geq 2}M^{(k)}$ avec $M_t^{(k)}=Z_t^{(k)}-\int x\ F^{(k)}(dx)$, et les processus W, $Z^{(1)}$ et M sont indépendants. La variable gaussienne W_t est de carré intégrable. Le théorème de représentation assure que M_t est de carré intégrable. On déduit de la question 1 que X_t est intégrable si et seulement si $Z_t^{(1)}$ est intégrable. La question 2-(b) assure que $Z_t^{(1)}$ est intégrable si et seulement si $|x|\mathbf{1}_{||x|>1\}}$ est F intégrable.

   On en déduit que X_t est intégrable si et seulement si $\int_{\mathbb{R}}(|\ell|\wedge \ell^2)\ F(d\ell)<+\infty$.

4. De manière similaire, on montre que :

   — $Y+Z$, où Y et Z sont indépendants, est de carré intégrable si et seulement si Y et Z sont de carré intégrable.

   — La mesure ponctuelle N de la question 2 est de carré intégrable si et seulement si $\int (|x|+x^2)\ \mu(dx)<+\infty$.

   On en déduit alors que X_t est de carré intégrable si et seulement si $Z^{(1)}$ est de carré intégrable et donc si et seulement si $\int_{\mathbb{R}}\ell^2\ F(d\ell)<+\infty$.