Processus avec sauts et applications au marché de l'énergie

Examen du lundi 7 mars 2011 16h00-18h00

Les deux parties sont à rédiger sur des copies différentes.

I Transformation de Girsanov pour les mesures ponctuelles de Poisson

Soit M une mesure aléatoire sur $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ définie sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ telle que $\omega \mapsto M(\omega, A)$ est mesurable par rapport à la tribu $\mathcal{F}$ pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$. On suppose qu'il existe une mesure μ sur $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ σ-finie, non-atomique et telle que pour toute fonction $g \geq 0$ définie sur $\mathbb{R}^d$ mesurable on a :

$$\mathbb{E}\left[\mathrm{e}^{-M(g)}\right] = \exp\left(-\int_{\mathbb{R}^d} \mu(dx)\ \left(1 - \mathrm{e}^{-g(x)}\right)\right).$$

1. Montrer que si $(A_i, i \in I)$ est une suite au plus dénombrable de boréliens disjoints deux à deux, alors les variables aléatoires $(M(A_i), i \in I)$ sont indépendantes.
2. Préciser la loi de $M(A_i)$.
3. En déduire que si M est atomique, alors M est une mesure ponctuelle de Poisson d'intensité μ.

Soit ν une mesure sur $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ σ-finie, non atomique. Soit N une mesure ponctuelle de Poisson d'intensité ν. Soit $f \geq 0$ une fonction mesurable définie sur $\mathbb{R}^d$ telle que $\nu(1-\mathrm{e}^{-f}) < +\infty$. On pose $\nu^f(dx) = \mathrm{e}^{-f(x)}\ \nu(dx)$.

4. Vérifier que $Z = \mathrm{e}^{-N(f)+\nu(1-\mathrm{e}^{-f})}$ est une variable aléatoire positive et que $\mathbb{E}[Z] = 1$.
5. On définit une nouvelle probabilité par la relation $\mathbb{P}^f(B) = \mathbb{E}[Z\mathbf{1}_B]$ pour tout événement B. Montrer que sous $\mathbb{P}^f$, N est une mesure ponctuelle de Poisson d'intensité ν^f.

II Transformée de Laplace

Sur l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ soit $(X_t)_{t\geq 0}$ un processus de Lévy de triplet de caractéristiques (b, c, F) avec $b \in \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}_+$ et F mesure sur $\mathbb{R}$ t.q. $F(\{0\}) = 0$ et $\int_{\mathbb{R}}(1 \wedge x^2)F(dx) < +\infty$ et $\mathcal{F}_t = \sigma(X_s, 0 \leq s \leq t)$. On note

$$N(dt, dx) = \sum_{s>0:\Delta X_s \neq 0} \delta_{(s,\Delta X_s)}(dt, dx)$$

la mesure ponctuelle associée aux sauts de ce processus et $\tilde{N}(dt, dx) = N(dt, dx) - F(dx)dt$. On suppose que $\alpha \in \mathbb{R}$ est t.q. $\int_{\mathbb{R}} 1_{\{|x|>1\}} e^{\alpha x} F(dx) < +\infty$ et on veut montrer que si

$$Y_t = \int_{]0,t]\times\mathbb{R}} x\mathbf{1}_{\{|x|>1\}} N(ds, dx) + \int_{]0,t]\times\mathbb{R}} x\mathbf{1}_{\{|x|\leq 1\}} \tilde{N}(ds, dx)$$

alors $\mathbb{E}(e^{\alpha Y_t}) < +\infty$ et

$$\forall u \in \mathbb{R},\ \mathbb{E}\left(e^{(\alpha+iu)Y_t}\right) = e^{t\int_{\mathbb{R}}\left(e^{(\alpha+iu)x} - 1 - (\alpha+iu)x\mathbf{1}_{\{|x|\leq 1\}}\right)F(dx)}. \qquad (1)$$

1. Montrer que $\int_{\mathbb{R}} \left|e^{\alpha x} - 1 - \alpha x \mathbf{1}_{\{|x|\leq 1\}}\right| F(dx) < +\infty$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \geq 0$, on pose $Y_t^n = \int_{]0,t]\times\mathbb{R}} x\mathbf{1}_{\{n>|x|>1\}} N(ds,dx) + \int_{]0,t]\times\mathbb{R}} x\mathbf{1}_{\{\frac{1}{n}<|x|\leq 1\}} \tilde{N}(ds,dx)$.

2. Quelle est l'intensité de la mesure de Poisson $\mathbf{1}_{\{\frac{1}{n}<|x|<n\}} N(ds,dx)$?
   En déduire deux constantes $\lambda_n \in \mathbb{R}_+, \mu_n \in \mathbb{R}$ et une mesure de probabilité ν_n sur $\mathbb{R}$ telles que $Y_t^n + \mu_n t$ est un processus de Poisson composé d'intensité λ_n et de sauts distribués suivant ν_n.
3. Soit $\gamma \in \mathbb{C}$. Vérifier que $\int_{\mathbb{R}} |e^{\gamma x}|\nu_n(dx) < +\infty$ et en déduire que
   $$\mathbb{E}(e^{\gamma(Y_t^n+\mu_n t)}) = e^{\lambda_n t\left(\int_{\mathbb{R}} e^{\gamma x}\nu_n(dx)-1\right)}$$
   puis que
   $$\mathbb{E}(e^{\gamma Y_t^n}) = e^{t\int 1_{\{\frac{1}{n}<|x|<n\}}\left(e^{\gamma x}-1-\gamma x\mathbf{1}_{\{|x|\leq 1\}}\right)F(dx)}. \tag{2}$$

On pose $Z_t^n = \int_{]0,t]\times\mathbb{R}} x\mathbf{1}_{\{n>|x|>1\}} N(ds,dx)$, $\zeta_t^n = \int_{]0,t]\times\mathbb{R}} x\mathbf{1}_{\{\frac{1}{n}<|x|\leq 1\}} \tilde{N}(ds,dx)$ et $\zeta_t = \int_{]0,t]\times\mathbb{R}} x\mathbf{1}_{\{|x|\leq 1\}} \tilde{N}(ds,dx)$.

4. Vérifier que pour presque tout $\omega \in \Omega$, il existe $N(\omega) < +\infty$ t.q. la suite $(Z_t^n)_{n\geq N(\omega)}$ est constante et en déduire que Z_t^n converge presque sûrement lorsque $n \to \infty$ vers une limite Z_t à préciser.
   Calculer $\mathbb{E}((\zeta_t - \zeta_t^n)^2)$ et en déduire que ζ_t^n converge en probabilité vers ζ_t lorsque $n \to \infty$.
   Pour $\varepsilon > 0$, vérifier que
   $$\mathbb{P}(|Y_t - Y_t^n| \geq \varepsilon) \leq \mathbb{P}\left(|Z_t - Z_t^n| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right) + \mathbb{P}\left(|\zeta_t - \zeta_t^n| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right).$$
   En déduire que Y_t^n converge vers Y_t en probabilité lorsque $n \to \infty$.
5. Vérifier l'existence de $\nu : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ strictement croissante telle que $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{E}((\zeta_t - \zeta_t^{\nu(k)})^2) \leq \frac{1}{k^2}$. En déduire que la sous-suite $(Y_t^{\nu(k)})_{k\in\mathbb{N}^*}$ converge presque sûrement vers Y_t.
   Vérifier que pour $\gamma = \alpha$, le second membre de (2) converge vers $e^{t\int_{\mathbb{R}}\left(e^{\alpha x}-1-\alpha x\mathbf{1}_{\{|x|\leq 1\}}\right)F(dx)}$ lorsque $n \to \infty$. En déduire, en utilisant le lemme de Fatou, que
   $$\mathbb{E}(e^{\alpha Y_t}) \leq e^{t\int_{\mathbb{R}}\left(e^{\alpha x}-1-\alpha x\mathbf{1}_{\{|x|\leq 1\}}\right)F(dx)}.$$
6. Soit $\lambda > 1$ et $u \in \mathbb{R}$. Vérifier que les variables aléatoires $e^{(\frac{\alpha}{\lambda}+iu)Y_t^n}$ convergent en loi vers une limite à préciser lorsque $n \to \infty$.
   Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on note $\varphi_k : z \in \mathbb{C} \mapsto (|z| \wedge k)e^{i\arg(z)} \in \mathbb{C}$. Vérifier que
   $$\left|\mathbb{E}\left(e^{(\frac{\alpha}{\lambda}+iu)Y_t^n} - \varphi_k(e^{(\frac{\alpha}{\lambda}+iu)Y_t^n})\right)\right| \leq \mathbb{E}\left((e^{\frac{\alpha}{\lambda}Y_t^n} - k)^+\right).$$
   En déduire que
   $$\left|\mathbb{E}\left(e^{(\frac{\alpha}{\lambda}+iu)Y_t^n} - e^{(\frac{\alpha}{\lambda}+iu)Y_t}\right)\right| \leq \left|\mathbb{E}\left(\varphi_k(e^{(\frac{\alpha}{\lambda}+iu)Y_t^n}) - \varphi_k(e^{(\frac{\alpha}{\lambda}+iu)Y_t})\right)\right| + \frac{\mathbb{E}(e^{\alpha Y_t^n} + e^{\alpha Y_t})}{k^{\lambda-1}}$$
   puis que
   $$\mathbb{E}\left(e^{(\frac{\alpha}{\lambda}+iu)Y_t}\right) = e^{t\int_{\mathbb{R}}\left(e^{(\frac{\alpha}{\lambda}+iu)x}-1-(\frac{\alpha}{\lambda}+iu)x\mathbf{1}_{\{|x|\leq 1\}}\right)F(dx)}.$$
7. Conclure que (1) est vérifiée.
8. Montrer que
   $$\forall t \geq 0,\ \forall u \in \mathbb{R},\ \mathbb{E}\left(e^{(\alpha+iu)X_t}\right) = e^{t\left((\alpha+iu)b+\frac{c(\alpha+iu)^2}{2}+\int_{\mathbb{R}}\left(e^{(\alpha+iu)x}-1-(\alpha+iu)x\mathbf{1}_{\{|x|\leq 1\}}\right)F(dx)\right)}.$$

Correction

I Transformation de Girsanov pour les mesures ponctuelles de Poisson

1. Pour $i \in I$, soit $\lambda_i \geq 0$. On pose $F = \sum_{i\in I} \lambda_i M(A_i)$. On a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\mathrm{e}^{-F}] &= \exp\left(-\int_{\mathbb{R}} \mu(dx)\ \left(1 - \mathrm{e}^{-\sum_{i\in I}\lambda_i \mathbf{1}_{A_i}(x)}\right)\right) \\
&= \exp\left(-\int_{\mathbb{R}} \mu(dx)\ \sum_{i\in I} \mathbf{1}_{A_i}(x)\left(1 - \mathrm{e}^{-\lambda_i}\right)\right) \\
&= \prod_{i\in I} \exp\left(-\mu(A_i)\left(1 - \mathrm{e}^{-\lambda_i}\right)\right) \\
&= \prod_{i\in I} \mathbb{E}[\mathrm{e}^{-\lambda_i M(A_i)}],
\end{aligned}$$

   avec la convention que $\mu(A_i)\left(1 - \mathrm{e}^{-\lambda_i}\right) = 0$ si $\lambda_i = 0$. Ceci assure que les variables aléatoires positives $(M(A_i), i \in I)$ sont indépendantes.

2. Si $\mu(A_i) < +\infty$, alors on déduit de ce qui précède (en prenant $\lambda_j = 0$ si $j \neq i$) que $M(A_i)$ suit une loi de Poisson de paramètre $\mu(A_i)$. Si $\mu(A_i) = +\infty$, on déduit de ce qui précède que p.s. $M(A_i) = +\infty$.
3. Il suffit de remarquer que $\mathbb{E}[M(A_i)] = \mu(A_i)$ si $\mu(A_i) < +\infty$ car l'espérance d'une variable aléatoire de loi de Poisson de paramètre θ est θ ; et également si $\mu(A_i) < +\infty$ car alors p.s. $M(A_i) = +\infty$ et donc $\mathbb{E}[M(A_i)] = +\infty$.
4. Trivial.
5. On remarque que :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}^f\left[\mathrm{e}^{-N(g)}\right] &= \mathbb{E}\left[\mathrm{e}^{-N(g+f)}\right]\mathrm{e}^{\nu(1-\mathrm{e}^{-f})} \\
&= \exp\left(-\int_{\mathbb{R}^d} \nu(dx)\,\mathrm{e}^{-f(x)}(1 - \mathrm{e}^{-g(x)})\right) \\
&= \exp\left(-\int_{\mathbb{R}^d} \nu^f(dx)(1 - \mathrm{e}^{-g(x)})\right).
\end{aligned}$$

   De plus sous $\mathbb{P}^f$, N est toujours une mesure atomique. Le résultat découle alors de la question 3.