

Modèles de prix non gaussiens pour les marchés de l'énergie

Benoît Alessis
benoit.alessis@edf.fr

Contexte : modélisation des prix de l'électricité

Principales caractéristiques du prix spot de l'électricité $(S_t)_{t \geq 0}$

1 Saisonnalité multi-échelle

- Annuelle, hebdomadaire, journalière
- Reliée à la saisonnalité de la demande, des activités socio-économiques et à la météorologie

2 Retour à la moyenne : prix tendant à revenir vers des tendances moyennes

- Réponse de l'offre à la demande
- Tendance court terme : équilibre offre/demande, couplage des marchés
- Tendance long terme : investissements, conditions économiques de long-terme

3 Forte volatilité

- Volatilité inversement dépendante du niveau d'offre
- Prix et volatilités corrélés positivement

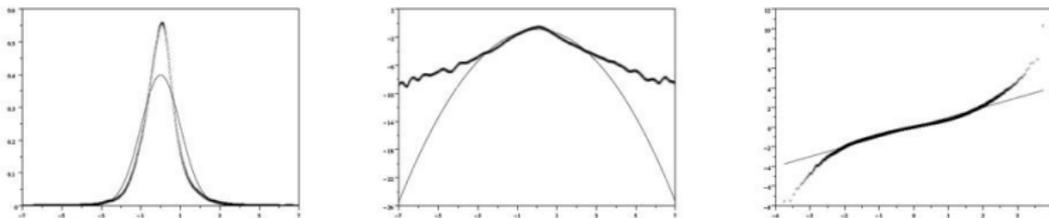
Contexte : modélisation des prix de l'électricité

Principales caractéristiques du prix spot de l'électricité $(S_t)_{t \geq 0}$ (suite)

- ④ Effets de calendrier : vacances, jours fériés
- ⑤ Présence d'importants **pics de prix**
 - Pic : Mouvement à la hausse suivi d'un retour rapide au même niveau
 - Caractère non stockable de l'électricité
 - Discontinuité des coûts de production
- ⑥ Evènements atypiques : prix négatifs ou nuls
- ⑦ Corrélation aux autres matières premières énergétiques (gaz, pétrole, charbon)

Pourquoi utiliser des modèles non gaussiens ?

- ▶ La distribution des résidus extraits de prix électriques (après désaisonnalisation et log-transformation) est non gaussienne : présence de pics de prix.
- ▶ Si les prix spot désaisonnalisés sont l'exponentielle d'un processus d'Ornstein-Uhlenbeck, on obtient par exemple :



German electricity prices (LPX 2001): Residuals density (left), log-density (middle) and normal QQ-plot (right)

- ▶ La distribution empirique des résidus extraits est **fortement leptokurtique** :
 - Plus concentrée autour de zero
 - Masse plus faible au niveau des valeurs intermédiaires
 - Queues épaisses

Distribution leptokurtique

- ▶ **Kurtosis** : coefficient d'aplatissement, correspondant à une mesure de l'aplatissement ou de la "pointicité", de la distribution d'une v.a. réelle.
- ▶ **Excès de kurtosis** ou Kurtosis normalisé d'une v.a. de moyenne μ et d'écart type σ :

$$\gamma_2 = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3 \quad \text{avec} \quad \mu_4 := \mathbb{E} \left[(X - \mu)^4 \right]$$

- ▶ *Mésokurtique* : $\gamma_2 = 0$, cas de la loi Normale avec un moment d'ordre 4 normalisé égal à 3.
- ▶ *Leptokurtique* : $\gamma_2 > 0$, distribution est plutôt pointue en sa moyenne, queues de distribution plus longues et épaisses, e.g. Cauchy, Student, Laplace, Poisson
- ▶ *Platikurtique* : $\gamma_2 < 0$, faible pointe autour de la moyenne et queues plus fines, e.g. Bernoulli de paramètre 1/2, Uniforme

Principales approches non gaussiennes recensées dans la littérature

- ① **Modèles structurels ou d'équilibre**, cf. [Bar02], [ACNT09], [ACL11]
 - **Idée** : Le prix spot est obtenu par **confrontation d'un niveau de demande et d'une fonction d'offre**
 - Demande : décrite par un processus stochastique (gaussien)
 - Fonction d'offre : souvent supposée déterministe, les arrêts de centrales sont mieux décrits par des processus aléatoires (e.g. Poisson composé)

Principales approches non gaussiennes recensées dans la littérature

② Modèles markoviens avec sauts, cf. [GR06]

- **Idée** : Les fluctuations aléatoires du signal de prix sont dues à des **fluctuations standards** (Brownien), à des **fluctuations exceptionnelles** (processus à sauts avec amplitudes et fréquences aléatoires).
- Typiquement, le log-prix spot désaisonnalisé est modélisé comme la somme de deux processus X et Y tels que :

$$dX_t = -aX_t dt + \sigma_c dW_t^1 + dN_t, \quad Y_t = \sigma_L W_t^2$$

avec N , processus de Poisson composé.

- Difficulté pour estimer les paramètres de saut (fréquence et amplitude)
- Les sauts sont bien représentés mais les pics de prix sont mal représentés.

Principales approches non gaussiennes recensées dans la littérature

③ Modèles à changement de régime, cf. [Wer05]

- **Idée** : La dynamique du signal de prix évolue selon 2 modèles : un **modèle standard** (régime de base) et un **modèle de crise** (régime à "pics").
- Typiquement, 2 modèles de retour à la moyenne (processus d'OU) avec des paramètres de volatilités différents (un faible et un fort).
- La transition d'un régime à l'autre (switching) peut être gouvernée par un seuil déterministe sur le niveau de prix, ou par un processus aléatoire (e.g. chaîne de Markov à deux états non-observables).
- Loi de probabilité de la transition difficile à calibrer

Principales approches non gaussiennes recensées dans la littérature

- 4 **Modèles à loi leptokurtique**, cf. [BKM06], [Oud03]
 - **Idée** : Modèles de retour à la moyenne (type OU) dans lequel le mouvement Brownien (distribution gaussienne) est **remplacé par un processus de Lévy** mais dont la distribution est **leptokurtique**.
 - Typiquement, le log-prix spot désaisonnalisé est modélisé comme somme de 2 processus d'Ornstein-Uhlenbeck : le premier est gaussien, le second est dirigé par un processus de Lévy.
 - **Nous allons nous intéresser à un modèle factoriel de Lévy de type NIG.**

Rappels sur la loi Normale Inverse Gaussienne

- ▶ Famille des *lois hyperboliques généralisées* (cf. [Pra99]), se déclinant autour de 5 paramètres.
- ▶ $\alpha > 0$ détermine la **forme** de la densité.
- ▶ β tel que $0 \leq |\beta| < \alpha$ détermine le degré d'**asymétrie**.
Si $\beta = 0$, la distribution est symétrique, si $\beta > 0$, elle est bombée à droite.
- ▶ μ est le paramètre de **position**.
- ▶ δ est le paramètre d'**échelle**.
- ▶ λ détermine l'**épaisseur** des queues de distribution.
- ▶ $\lambda = -\frac{1}{2} \rightarrow$ **Distribution** $NIG(\alpha, \beta, \delta, \mu)$

Rappels sur la loi Normale Inverse Gaussienne

Propriétés de la loi $X \sim \text{NIG}(\alpha, \beta, \delta, \mu)$:

① On peut calculer sa densité et sa fonction génératrice des moments.

②

$$\mathbb{E}[X] = \mu + \frac{\delta\beta}{\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}}$$

③

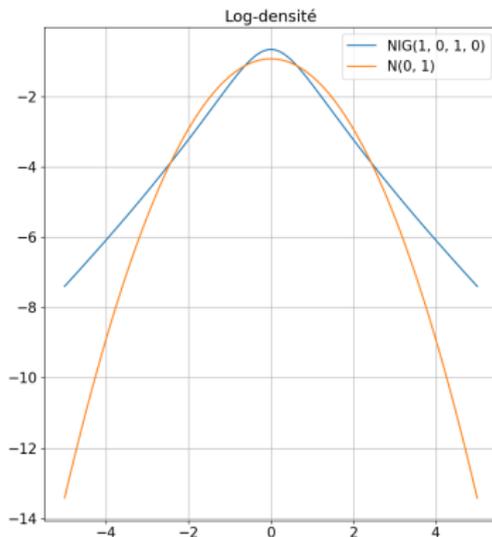
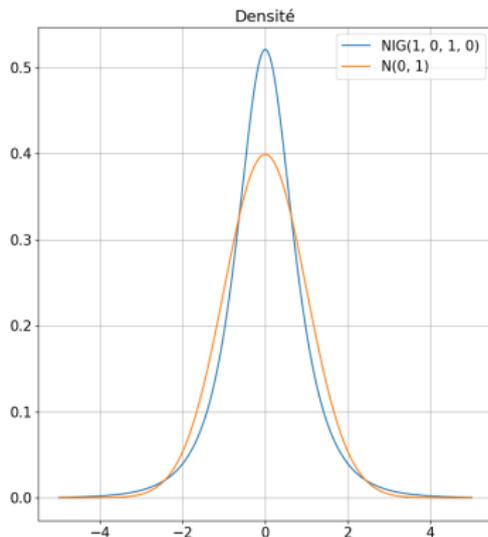
$$\text{Var}[X] = \frac{\delta\alpha^2}{\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}^3}$$

④ Distribution leptokurtique : queues de distribution telles que

$$f_{\text{NIG}}(x) = \begin{cases} |x|^{-3/2} e^{(-\alpha+\beta)x} & \text{quand } x \rightarrow +\infty, \\ |x|^{-3/2} e^{(\alpha+\beta)x} & \text{quand } x \rightarrow -\infty. \end{cases}$$

⑤ On sait la simuler sans difficulté majeure.

Comparaison entre les lois gaussienne et NIG



Modèle à un facteur NIG pour l'électricité

$$\forall t_0 \leq t \leq T, \quad F(t, T) = F(t_0, T) \exp \left\{ M(t_0, t, T) + e^{-a(T-t)} X_t \right\}$$

- ▶ Un facteur non gaussien : $X_t = \int_{t_0}^t \sigma(u) e^{-a(t-u)} dL_u$
- ▶ Volatilité σ , retour à la moyenne a
- ▶ L , processus de Lévy de type NIG de paramètres $(\alpha, \beta, \delta, \mu)$, c'est-à-dire que son premier accroissement $L_1 \sim NIG(\alpha, \beta, \delta, \mu)$. $(L_t)_{t \geq 0}$ est un processus de saut pur qui présente une infinité de petits sauts sur tout intervalle de temps fini, ce qui est cohérent avec la nature du prix spot

$$S_t = F(t_0, t) \exp \left\{ M(t_0, t, t) + \int_{t_0}^t \sigma(u) e^{-a(t-u)} dL_u \right\}.$$

- ▶ Terme de dérive :

$$M(t_0, t, T) = \int_{t_0}^t m(u, T) du$$

Modèle à un facteur NIG pour l'électricité

$$\forall t_0 \leq t \leq T, \quad F(t, T) = F(t_0, T) \exp \left\{ M(t_0, t, T) + e^{-a(T-t)} X_t \right\}$$

Modèle de prix spot et de prix futures induits :

$$\forall t \geq t_0, \quad S_t := F(t, t) = F(t_0, t) \exp \{ M(t_0, t, t) + X_t \},$$

$$F(t, T, T + \theta) = \frac{1}{\theta} \sum_{i=0}^{\theta-1} F(t, T + i).$$

Modèle à un facteur NIG pour l'électricité

1. Processus d'OU-NIG : Le processus X est un **processus d'Ornstein-Uhlenbeck** dirigé par un processus de Lévy L vérifiant :

$$dX_t = -aX_t dt + \sigma(t)dL_t, X_{t_0} = 0.$$

2. EDS : Dans le modèle précédent, la **dynamique des prix à terme** s'écrit :

$$\begin{aligned} \frac{dF(t, T)}{F(t^-, T)} = & m(t, T)dt + \sigma(t)e^{-a(T-t)}dL_t \\ & + \int_{\mathbb{R}} \left(e^{\sigma(t)e^{-a(T-t)}x} - 1 - \sigma(t)e^{-a(T-t)}x \right) \mu(dx, dt) \end{aligned}$$

où μ est la mesure aléatoire des sauts de L .

3. Condition de dérive : Les processus $(F(t, T))_{t \leq T}$ sont rendus **martingales** par un choix du terme de dérive tel que :

$$m(t, T) = -\mu\sigma(t)e^{-a(T-t)} + \delta \left(\sqrt{\alpha^2 - (\beta + \sigma(t)e^{-a(T-t)})^2} - \sqrt{\alpha^2 - \beta^2} \right)$$

Modèle à un facteur NIG pour l'électricité

1. **Processus d'OU-NIG** : Le processus X est un **processus d'Ornstein-Uhlenbeck** dirigé par un processus de Lévy L vérifiant :

$$dX_t = -aX_t dt + \sigma(t)dL_t, X_{t_0} = 0.$$

2. **EDS** : Dans le modèle précédent, la **dynamique des prix à terme** s'écrit :

$$\begin{aligned} \frac{dF(t, T)}{F(t^-, T)} = & m(t, T)dt + \sigma(t)e^{-a(T-t)}dL_t \\ & + \int_{\mathbb{R}} \left(e^{\sigma(t)e^{-a(T-t)}x} - 1 - \sigma(t)e^{-a(T-t)}x \right) \mu(dx, dt) \end{aligned}$$

où μ est la mesure aléatoire des sauts de L .

3. **Condition de dérive** : Les processus $(F(t, T))_{t \leq T}$ sont rendus **martingales** par un choix du terme de dérive tel que :

$$m(t, T) = -\mu\sigma(t)e^{-a(T-t)} + \delta \left(\sqrt{\alpha^2 - (\beta + \sigma(t)e^{-a(T-t)})^2} - \sqrt{\alpha^2 - \beta^2} \right)$$

Modèle à un facteur NIG pour l'électricité

1. Processus d'OU-NIG : Le processus X est un **processus d'Ornstein-Uhlenbeck** dirigé par un processus de Lévy L vérifiant :

$$dX_t = -aX_t dt + \sigma(t)dL_t, X_{t_0} = 0.$$

2. EDS : Dans le modèle précédent, la **dynamique des prix à terme** s'écrit :

$$\begin{aligned} \frac{dF(t, T)}{F(t^-, T)} = & m(t, T)dt + \sigma(t)e^{-a(T-t)}dL_t \\ & + \int_{\mathbb{R}} \left(e^{\sigma(t)e^{-a(T-t)}x} - 1 - \sigma(t)e^{-a(T-t)}x \right) \mu(dx, dt) \end{aligned}$$

où μ est la mesure aléatoire des sauts de L .

3. Condition de dérive : Les processus $(F(t, T))_{t \leq T}$ sont rendus **martingales** par un choix du terme de dérive tel que :

$$m(t, T) = -\mu\sigma(t)e^{-a(T-t)} + \delta \left(\sqrt{\alpha^2 - (\beta + \sigma(t)e^{-a(T-t)})^2} - \sqrt{\alpha^2 - \beta^2} \right)$$

Estimation des paramètres d'un processus OU-NIG

- ▶ On considère X un **processus d'Ornstein-Uhlenbeck** dirigé par un **processus de Lévy** L tel que $\forall t \geq 0, X_t = \int_0^t \sigma e^{-a(t-s)} dL_s$.
- ▶ On observe X à des instants discrets espacés de Δt :
 $(X_k := X_{t_k})_{0 \leq k \leq n}$.
- ▶ Les **résidus** $\varepsilon_k = X_{k+1} - e^{-a\Delta t} X_k = \int_{t_k}^{t_{k+1}} \sigma e^{-a(t_{k+1}-s)} dL_s$ sont **i.i.d.**
- ▶ SPDG, on suppose $\sigma := 1$ et laisse libres les quatre paramètres de la loi NIG.
- ▶ La méthode consiste à maximiser la **log-vraisemblance** de l'échantillon évaluée aux points observés i.e.
 $\max_{\theta} L(\theta) := \log f(X_0, \dots, X_n; \theta)$, où f est la densité jointe des observations et $\theta := (a, \alpha, \beta, \delta, \mu)$.

Estimation des paramètres d'un processus OU-NIG en deux temps

- ▶ Pour des raisons de robustesse et de réduction de l'espace d'optimisation, au lieu d'estimer globalement tous les paramètres $(a, \alpha, \beta, \delta, \mu)$, on peut préférer procéder en deux étapes :
 - ① **Méthode des moindres carrés** pour l'estimation de a ,
 - ② **Maximum de vraisemblance** pour l'estimation de $(\alpha, \beta, \delta, \mu)$.
- ▶ **Moindres carrés** : Estimateur $\hat{a} = -\frac{1}{\Delta t} \log(\hat{\tilde{a}})$ où $\hat{\tilde{a}}$ est solution de :

$$\min_{\tilde{a}} \sum_{k=1}^n |X_{k+1} - \tilde{a}X_k|^2.$$

- ▶ **Maximum de vraisemblance pour un échantillon NIG** : On estime les paramètres NIG $\theta = (\alpha, \beta, \delta, \mu)$ maximisant

$$L(\theta) = \sum_{k=1}^n \log f_{NIG}(\hat{\varepsilon}_k; \theta), \quad \text{avec} \quad \hat{\varepsilon}_k = X_{k+1} - \hat{\tilde{a}}X_k.$$

Estimation des paramètres d'un processus OU-NIG en deux temps

- ▶ Simplification possible : **loi NIG centrée réduite**, i.e. telle que

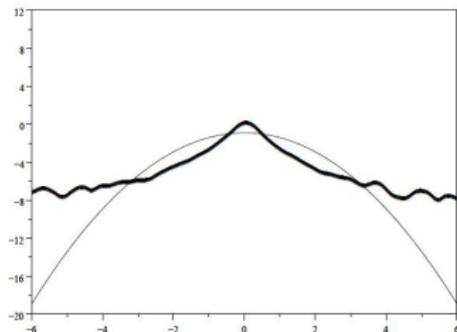
$$\mathbb{E}[L_1] = \mu + \frac{\delta\beta}{\gamma} = 0 \text{ et } \text{var}(L_1) = \frac{\delta\alpha^2}{\gamma^3} = 1,$$

\implies Seulement deux paramètres libres (α, β) , avec $\delta = \frac{\gamma^3}{\alpha^2}$ et $\mu = -\frac{\beta\gamma^2}{\alpha^2}$.

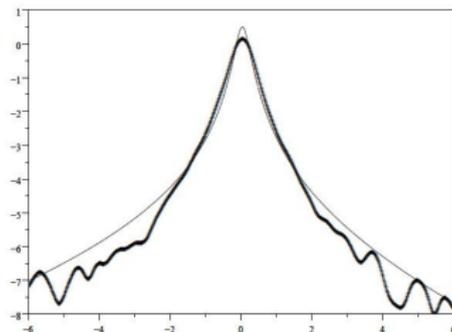
- ▶ Typiquement, paramètres estimés : $\alpha \approx 0.5 - 0.8$ et $\beta \approx \mu \approx 0$.
- ▶ La fréquence des sauts **augmente quand α tend vers 0**.

Estimation des paramètres d'un processus OU-NIG en deux temps

- ▶ Meilleure représentation des queues de distribution par le modèle NIG :

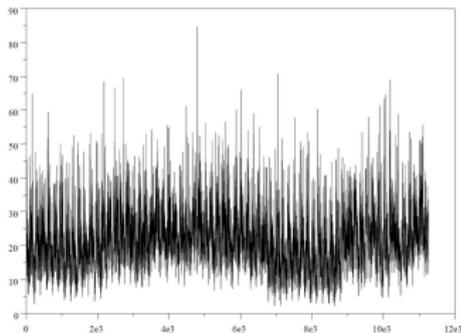


Log-densité gaussienne

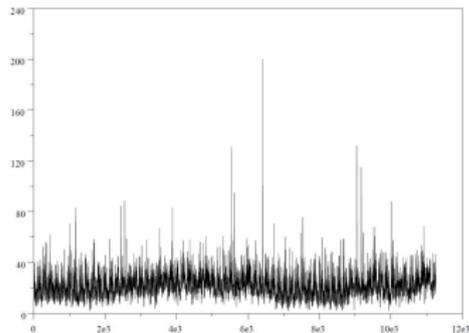


Log-densité NIG

Meilleure représentation des pics de prix par le modèle NIG :



Prix simulé avec un bruit gaussien



Prix simulé avec un bruit NIG

Conclusions

Approches non-gaussiennes pour la modélisation des prix de l'électricité

- ▶ Nécessaires pour capter les **pics de prix électriques** (importants et fréquents)
- ▶ Différents types de modèles : modèles d'équilibre (offre-demande), modèles à saut, modèles à changement de régime, modèles à loi leptokutique
- ▶ Approche du **modèle factoriel de Lévy de type NIG** :
 - Distribution NIG : propriétés utiles pour la simulation et l'implémentation
 - Calibration relativement aisée du modèle d'OU-NIG avec les méthodes des moindres carrés et du maximum de vraisemblance
 - Représentation des queues de distribution des résidus des prix électriques

Conclusions

Utilisation de ce modèle factoriel NIG

- ▶ Valorisation d'options très en dehors de la monnaie
- ▶ Valorisation en non gaussien :
 - ① Valeur vue comme coût de la couverture : cadre de marché incomplet
 - ② Valorisation risque neutre : pas d'unicité du changement de mesure de probabilité martingale

Références

-  Aïd, Campi and Langrené (2011) : A structural risk-neutral model for pricing and hedging power derivatives
-  Aïd, Campi, Nguyen Huu and Touzi (2009) : A structural risk-neutral model of electricity prices
-  Barlow (2002) : A diffusion model for electricity prices
-  Benth, Benth and Koekebakker (2008) : Stochastic modelling of electricity and related markets
-  Benth, Kallsen and Meyer-Brandis (2006) : A non-gaussian Ornstein-Uhlenbeck process for electricity spot price modeling and derivatives pricing
-  Geman and Roncoroni (2006) : Understanding the fine structure of electricity prices
-  Meyer-Brandis and Tankov (2007) : Multi jump-diffusion models for electricity prices
-  Prause (1999) : The Generalized Hyperbolic Model : Estimation, Financial Derivatives, and Risk Measures
-  Weron (2005) : Heavy tails and electricity prices

Modèles de prix non gaussiens pour les marchés de l'énergie

Benoît Alessis
benoit.alessis@edf.fr